TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу 09

Фурье қаторлари. Даврий функциянинг Фурье қатори.

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- Тригонометрик қаторлар
- Фурье коэффициентлари. Фурье қатори.
- Даврий функцияларни Фурье қаторига ёйиш
- Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қатори
- Фойдаланилган адабиётлар

Тригонометрик қаторлар. Фурье қатори.

Ушбу $\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + \cdots$

ёки

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx) \qquad (1)$$

функционал қаторга *тригонометрик қатор* деб аталади. a_0, a_n ва b_n $(n = 1,2,3 \dots)$ сонлар тригонометрик қаторнинг коэффициентлари деб аталади.

Агар (1) қатор яқинлашса, унинг йиғиндиси даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция бўлади, чунки $cosnx$ ва $sinnx$ лар даври 2π бўлган даврий функциялардир.

Айтайлик функция 2π даврлик даврий функция бўлсин. Қандай шартлар бажарилганда $f(x)$ учун берилган функцияга яқинлашувчи тригонометрик қаторни топиш мумкин деган саволга жавоб берайлик.

Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция $(-\pi, \pi)$ ораликда шу функцияга яқинлашувчи тригонометрик қаторни тасвирласин, яъни шу қаторни йиғиндиси бўлсин: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)$ (2).

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги функциядан олинган интеграл (2) қатор ҳадларидан олинган интегралларнинг йиғиндисига тенг бўлсин дейлик.

Бу эса берилган тригонометрик қаторнинг коэффициентларидан тузилган сонли қатор, абсалют яқинлашганда, яъни

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \cdots + |a_n| + |b_n| + \cdots \qquad (3)$$

Мусбат ҳадли қатор яқинлашганда бажарилади.

Бу ҳолда (1) қатор кучайтирилган, демак, уни $-\pi$ дан π гача ҳадлаб интеграллаш мумкин. Бундан a_0 коэффициентни ҳисоблаш учун фойдаланамиз. (2) тенгликнинг иккала қисмини $-\pi$ дан π гача интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnxdx \right). \quad (4)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни ҳар бирини алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0, \int_{-\pi}^{\pi} a_n cosnxdx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx = a_n \frac{sinnx}{n} |_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n sinnxdx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} sinnxdx = -b_n \frac{cosnx}{n} |_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Демак, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0$

Бундан эса $a_{0=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Қаторнинг қолган коэффициентларини топиш учун бизга баъзи бир аниқ интеграллар керак бўлади. Агар n ва k бутун сон бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринлидир: агар $n \neq k$ бўлса.

$$\left.\begin{array}{r}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxcoskxdx = 0\\ \int_{-\pi}^{\pi} cosnxsinkxdx = 0\\ \int_{-\pi}^{\pi} sinnxsinkxdx = 0\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Агар *n*=*k* бўлса,

$$\left.\begin{array}{c}\int_{-\pi}^{\pi} cos^2kxdx = \pi\\ \int_{-\pi}^{\pi} coskxsinkxdx = 0\\ \int_{-\pi}^{\pi} sin^2kxdx = \pi\end{array}\right\} \qquad (6)$$

(2) Қаторнинг a_n ва b_n коэффициентларини топамиз.
$k \neq 0$ бўлган бирор қийматида a_k ни топиш учун (2) қаторнинг иккала томонини $coskx$ га кўпайтирамиз:

$$f(x)coskx = \frac{a_0}{2}coskx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnxcoskx + b_n sinnxsinkx) \qquad (2')$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида ҳосил бўлган қатор кучайтирилгандир. Шунинг учун уни исталган кесмага, жумладан, $-\pi$ дан π гача чегараларда интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} coskxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosnxcoskxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} sinnxcoskxdx\right)$$

(6) ва (5) формуларни эътиборга олсак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} cos^2kxdx = a_k \pi,$$

бундан эса $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx$ (7)

(2) тенгликнинг иккала томонини $sinkx$ га кўпайтириб, яна $-\pi$ дан π гача интегралласак $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 kxdx = b_k \pi,$ бўлиб бундан эса $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx$ (8) ни ҳосил қиламиз.

(4), (7) ва (8) формулалар бўйича аниқланган коэффициентлар $f(x)$ функциянинг *Фурье коэффициентлари* деб аталади. Шундай коэффициентли (1) тригонометрик қатор $f(x)$ функциянинг *Фурье қатори* дейилади.

Таърифф. Агар $[a,b]$ кесмани чекли сондаги $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ нуқталар билан шундай $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ оралиқларга бўлиш мумкин бўлсаки, бу оралиқларнинг ҳар бирида берилган функция монотон, яъни ўсмайдиган ёки камаймайдиган бўлса, $f(x)$ функцияни $[a,$b] кесмада бўлакли монотон деб аталади.

Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада бўлакли монотон ва чегараланган бўлса, таърифга асосан бу функция фақат биринчи жинс узилиш нуқтасига эга бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан, агар $x=c$ нуқта $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлса, функциянинг монотонлигидан

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0),$$

$$\lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$$

Лимитлар мавжуд, яъни с нуқта биринчи жинс узилиш нуқтаси бўлади.

Теорема. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция $[-\pi, \pi]$ кесмада бўлакли монотон ва чегараланган бўлса, бу фунция учун тузилган Фурье қатори шу кесманинг ҳамма нуқталарида яқинлашади. Ҳосил қилинган қаторнинг S(x) йиғиндиси $f(x)$ функциянинг узлуксизлик нуқталаридаги қийматига тенг. $f(x)$ функциянинг узилиш нуқталарида қаторнинг йиғиндиси функциянинг ўнг ва чап лимитлари ўрта арифметик қийматига тенг бўлади, яъни агар x=c нуқта $f(x)$функциянинг узилиш нуқтаси бўлса, у вақтда

$$S(x)_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$$

Даврий функцияларни Фурье қаторига ёйиш

Даври 2π бўлган $\Psi(x)$ даврий функция учун λ ҳар қандай сон бўлганда ҳам қуйидаги тенглик ўринлидир.

$\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+\pi}\Psi(x)dx$ бунда $\Psi(x)$ даврий функциядан узунлиги функциянинг даврига тенг бўлган, исталган кесма бўйича олинган интеграл доимо битта ва фақат битта қийматга эга бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги хоссадан Фурье коэффициентларини ҳисоблашда интеграллаш оралиғи $(-\pi,\pi)$ ни $(\lambda,\lambda+2\pi)$ интеграллаш оралиғи билан алмаштириш мумкинлиги келиб чиқади, яъни

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)cosnxdx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)sinnxdx \qquad (9)$$

Агар $f(x)$ жуфт функция бўлса, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ (10)

бўлиши, агар $f(x)$ток функция бўлса, у ҳолда

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$ (11) бўлиши бизга маълум.

Агар $f(x)$ ток функция Фурье қаторига ёйилса $f(x)coskx$ кўпайтма ҳам ток. $f(x)sinkx$ эса жуфт функция бўлади, демак,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx = 0, \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx \quad (12)$$

яъни ток функциянинг Фурье қатори “фақат синусларни” ўз ичига олади.

Агар жуфт функция Фурье қаторига ёйилса,$f(x)sinkx$ функция тоқ, $f(x)coskx$ эса жуфт функция бўлади, демак,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)coskxdx,$ $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sinkxdx = 0$ (13) яни, жуфт функцияларнинг Фурье қатори “фақат косинусларни” ўз ичига олади.

Мисол. Ушбу $f(x) = x$ функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

Ечиш. Фурье коэффициентларини топамиз:

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xsinnxdx = -\frac{2}{n\pi}xcosnx|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} cosnxdx = -\frac{2}{n}cosn\pi =$

$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$ (n=1, 2,….)

Демак, $f(x) = x$ функциянинг Фурье қатори $x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}sinnx$ бўлади.

Мисол. Ушбу $f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ жуфт функциянинг Фурье қаторини ёзинг.

Ечиш. Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 cosnxdx = \frac{2}{\pi}x^2\frac{sinnx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} xsinnxdx =$$

$$-\frac{4}{n\pi}\left[\left(-x\frac{cosnx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} + +\int_0^{\pi} cosnxdx\right] = (-1)^n\frac{4}{n^2} \qquad \text{(n=1, 2,….)}$$

Демак, $f(x) = x^2$ функциянинг Фурье қатори

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}cosnx$$

бўлади.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

+ 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov