TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу 07

Тейлор ва Маклорен қаторлари. Биномиал қаторлар.

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- Тейлор ва Маклорен қаторлари
- Биномиал қаторлар
- Фойдаланилган адабиётлар

Тейлор ва Маклорен қаторлари

Агар $y = f(x)$ функция $x = x_0$ нуқта атрофида $(n+1)$ – тартиблигача ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қуйидаги Тейлор формуласи ўринлидир

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

бу ерда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}(0 < \theta < 1)$. $R_n(x)$- Тейлор формуласининг Лагранж шаклидаги қолдиқ ҳади дейилади.

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

кўпҳад $y = f(x)$ функциянинг ***n-даражали Тейлор кўпҳади дейилади.***

$x = 0$ да Тейлор формуласининг хусусий ҳоли – Маклорен формуласи ҳосил бўлади.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

bu yerda $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n$ $(0 < \theta < 1)$.

Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқта атрофида исталган марта дифференциалланувчи бўлса ва бу нуқтанинг бирорта атрофида

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

бўлса, Тейлор ва Маклорен формулаларидан ушбу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

ва $\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \cdots$ чексиз қатор ҳосил бўлади.

Буларнинг биринчиси Тейлор қатори, иккинчиси Маклорен қатори дейилади.

Бу қаторлар x ning $\underset{n\to\infty}{R_n}(x) = 0$ бўладиган қийматларида $f(x)$ га яқинлашади.

1-Мисол. $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ функцияни $(x-1)$ икки ҳад даражалари бўйича ёйинг

Ечиш. $x_0 = 1$ учун Тейлор формуласидан фойдаланамиз. Функциянинг ҳосилаларини ва уларнинг $x_0 = 1$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$y(1) = 2;\; y'(1) = (4x^3 - 6x + 2)_{x=1} = 0;\; y''(1) = (12x^2 - 6)_{x=1} = 6;$

$y'''(1) = 24x_{x=1} = 24;\; y^{IV} = 24;\; y^V = 0$ ва ҳ.к.

Демак, $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4$

ёки

$y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4.$

2-Мисол . $\boldsymbol{y=\frac{1}{x}}$ функция учун $x_0 = 1$ нуқтада n −даражали Тейлор кўпҳадини ёзинг.

Ечиш. Функциянинг ҳосилаларини ва уларнинг $x_0 = 1$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$y(1) = 1;$$

$$y'(1) = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1} = -1;$$

$$y''(1) = \frac{1\cdot 2}{x^3}\Big|_{x=1} = \frac{1\cdot 2}{1} = 2!;$$

$$y'''(1) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\Big|_{x=1} = -3!;$$

$$y^{IV}(1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}\Big|_{x=1} = 4!, \ldots, y^{(n)}(1) == (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\Big|_{x=1} = (-1)^n n!$$

Демак, Тейлор кўпҳади қуйидаги кўринишда бўлади:

$$P_n(x) = 1 - \frac{x-1}{1!} + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 - \frac{3!}{3!}(x-1)^3 + \frac{4!}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{n!}(x-1)^n$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n.$$

Берилган функция учун қолдиқ ҳад

$R_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{(1+\theta(x-1))^{n+2}}(x-1)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$ кўринишда бўлади.

3-Мисол. $y = 2^x$ функцияни Маклорен қаторига ёйинг.

Ечиш. Ҳосиланинг $x = 0$ нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$y(0) = 1;\ \ y'(0) = 2^x \ln 2|_{x=0} = \ln 2;\ \ y''(0) = 2^x \ln^2 2|_{x=0} = \ln^2 2\,;$$

$$y'''(0) = 2^x \ln^3 2|_{x=0} \ln^3 2, \dots, y^n(0) = 2^x \ln^n 2|_{x=0} \ln^n 2.$$

Маклорен қаторини тузамиз:

$$y = 2^x = 1 + x\ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 2}{3!}x^3 + \dots + \frac{\ln^n 2}{n!}x^n + \cdots$$

Топилган қаторнинг яқинлашиш радиуси қуйидагича бўлади:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{\ln^2 2\ln 2}\cdot\frac{\ln^2 2}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\ln 2} = \infty.$$

Демак, сонлар ўқининг барча нуқталарида абсалют яқинлашувчи бўлади.

Асосий функциялар ёйилмасининг жадвали

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (|x| < \infty);$

2. $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad (|x| < \infty);$

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (|x| < \infty);$

4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad (|x| < 1);$

5. $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n =$

$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots \quad (|x| < 1)$

Биномиал қаторлар

Қуйидаги тенгликга биномиал қатор деб айтилади:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1*2*3}x^3 \ldots \qquad (1)$$

m нинг маълум қийматларида бир қатор функцияларнинг даражали қаторларини келтириб чиқариш мумкин.

а) $$m = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \qquad (2)$$

б) $$m = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots$$

в) (2) - тенгликнинг ҳар иккала томонидаги *х* лар ўрнига -x^2 қўйилса , қуйидаги даражали қатор келиб чиқади:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots \qquad (3)$$

г) Даражали қаторни интеграллаш мумкинлиги юқорида айтилди. Шунинг учун (3) ни иккала томонини интеграллаймиз:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + \ldots\right)dt$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (4)$$

д) m = -1 бўлганда (1) дан

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots \qquad (5)$$

даражали қатор келиб чиқади.

е) (5)- тенгликни иккала томонини интеграллаб $f(x)=ln(1+x)$ функциянинг даражали қаторини чиқарамиз:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x (1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+\ldots)dt$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (6)$$

Бу тенглик (-1,1) интервалда ўринлидир.

ж) (6)- тенгликда *x* нинг ўрнига –*x* қўямиз.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \qquad (7)$$

з) (6) ва (7) ларнинг айирмасидан эса кейинги даражали қаторни чиқаришимиз мумкин:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right] \qquad (8)$$

Бу ерда $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ бўлсин, бунда $x = \frac{1}{2n+1}$ келиб чиқади.

Ҳар қандай $n>0$ ва $0<x<1$ учун (8)- дан

$$\ln\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right]$$ бўлади.

Бу ерда n=1 деб олсак

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right]$$

ва $\ln x$ функциянинг x=2 нуқтадаги қиймати келиб чиқади.

и) (4) – тенгликдан эса x нинг ўрнига 1 ёзсак arc sin x нинг x=1 нуқтадаги қиймати чиқади:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

+ 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov