TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу 06

Даражали қаторлар. Қаторларни ҳадма ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- Даражали қаторлар.
- Қаторларни ҳадма ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш
- Фойдаланилган адабиётлар

Даражали қаторлар

1-Таъриф. Ҳадлари функциялардан иборат бўлган қаторларга функционал қатор дейилади.

Масалан. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - бир x аргументнинг функционал қатори.

Мисоллар. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ell n^n x = \ell n x + \ell n^2 x + \ell n^3 x + \cdots$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \cdots$

Функционал қаторлар ичида қуйидагича таърифланадиган қаторлар алоҳида ўрин тутади.

2-Таъриф. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (1)$

кўринишдаги функционал қаторга даражали қатор дейилади. Бу ерда a_n - даражали қатор коэффицентлари дейилади.

Мисоллар.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \cdots$

Қатор учун асосий масала унинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини аниқлаш, бу ҳолда сонли қаторникидан фарқлидир. Даражали қаторнинг яқинлашуви ёки узоқлашувчи бўлишига x ўзгарувчининг қандай қиймат қабул қилишга бевосита боғлик бўлади.

3-Таъриф. Агар (1) қатор $x = x_1$ бўлганда яқинлашса, у ҳолда (1) даражали қатор $x = x_1$ нуқтада яқинлашувчи дейилади.

Таъриф. x ўзгарувчининг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатори яқинлашадиган барча қийматлари тўпламига даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси дейилади ва $D(\Sigma)$ билан белгиланади.

Мисол: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

даражали қатор x ўзгарувчининг (-1, 1) ораликдан олинган ҳар бир қийматида чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндиси сифатида яқинлашувчи бўлади. Демак бу қатор учун $D(\Sigma) = (-1,1)$.

Таъкидлаш лозимки, ихтиёрий даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси бўш тўплам бўлмайди, чунки ҳар қандай даражали қатор ҳеч бўлмаганда $x = 0$ да чекли йиғиндига эга.

Абель теоремаси. Агар (1) даражали қатор бирор $x = x_0$ да яқинлашса, у ҳолда бу қатор $|x| < |x_0|$ шартни каноатлантирувчи барча x ларда ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исботи. Бу ерда $x_0 \neq 0$ деб қараш керак. Чунки $x_0 = 0$ бўлса, $|x| < 0$ бўлса, шартни каноатлантирувчи тўплам бўш тўпламдир.

Теорема шартига кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0{}^n$ сонли қатор якинлашувчи. Қатор яқинлашишининг зарурий шартига асосан $\lim_{n\to\infty} a_n x_0{}^n = 0$.

У ҳолда шундай $c > 0$ топа оламизки, барча $n = 1, 2, 3, \ldots$ учун

$$|a_n x_0{}^n| < c$$

бўлади.

Энди $|x| < |x_0|$ шартли каноатлантирувчи ихтиёрий x ни олиб

$$|a_n x^n| = |a_n x_0{}^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < c\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Тенгсизликни эътиборга олсак, даражали чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндиси бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \qquad (2)$$

қатор яқинлашувчилигидан солиштириш теоремасига асосан (2) қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади. Демак, (1) даражали қатор $|x|<|x_0|$ шартни бажарувчи барча x ларда абсолют яқинлашувчи қатор экан. Теорема исбот бўлди.

Қуйидаги натижа ҳам ўринлидир. Агар бирор $x=x_0$ қийматда (1) даражали қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $|x|>|x_0|$ тенгсизликни каноатлантирувчи барча x ларда ҳам узоқлашувчи бўлади.

Бу тасдиқлар даражали қаторнинг яқинлашиш ва узоқлашиш нуқталари тўпламларини аниқлашга ундайди.

Хусусан: (1) қатор $x=x_0$ да яқинлашувчи бўлса, $(-|x_0|;|x_0|)$ интервалда яқинлашувчи $x=x_0$ да узоқлашувчи бўлса $(-\infty;-|x_0|)$ ва $(|x_0|;\infty)$ интервалларда узоқлашувчи бўлади.

Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема: Агар (1) даражали қатор x нинг баъзи $(x=0)$ қийматларида яқинлашувчи, баъзи қийматларида эса узоқлашувчи бўлса, у ҳолда ягона шундай $R>0$ сон топиладики, (1) даражали қатор x нинг $|x|<R$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x|>R$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади.

Бу теорема ёрдамида топилган R сонига (1) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси, $(-R,R)$ интервал эса (1) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали дейилади.

Қаторнинг берилишига қараб R чекли ёки $R=\infty$ бўлиши мумкин. Яъни шундай даражали қаторлар борки улар $(-\infty,\infty)$ да яқинлашувчи қатор бўлади.

Агар R чекли сон бўлса, у ҳолда даражали қатор яқинлашиш радиуси

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ ёки } R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

формула билан аниқланади.

Агар R чекли сон бўлса Абель теоремасидан (1) даражали қаторнинг $D(\Sigma)=(-R;R)$ соҳада яқинлашиши келиб чиқсада, $x=-R$ ва $x=R$ қийматларда қатор қандай қатор эканлиги очиқ қолади. Бу масала ҳар бир даражали қатор учун алоҳида - алоҳида кўриб чиқилади.

Мисоллар.

1). $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

қатор яқинлашиши радиуси аниқлансин.

Ечиш. Берилган қаторда $a_n=1,\ n=1,2,3,\ldots$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}1=1$$

Мисол: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

қатор яқинлашиш радиуси топилсин.

Ечиш. Агар

$$a_n=\frac{1}{n!};\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Мисол: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ қаторнинг яқинлашиш соҳаси аниқлансин.

Ечиш. Берилишига кўра

$$a_n=\frac{1}{n^2+1};\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2=1}=1$$

Абель теоремасига қаралаётган қатор (-1,1) интервалда яқинлашади. Ўз навбатида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

қатор яқинлашувчи бўлганлиги сабабли $x=-1,\ x=1$ қийматларда қатор абсолют яқинлашувчи қатор бўлади. Натижада берилган қатор $[-1,1]$ да абсолют яқинлашувчи, $|x|>1$ бўлганда эса узоқлашувчи қатор бўлади.

Мисол: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$ қаторнинг яқинлашиш соҳаси аниқлансин.

Ечиш. Берилганига кўра $a_n=\frac{1}{n+2}$

у ҳолда $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}=1$

Агар $x=1$ десак, қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

кўринишни олади. Бу қатор узоқлашувчи қатордир.

Энди $x=-1$ деб олсак

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

кўринишдаги ишораси алмашувчан қаторга эга бўламиз. Лейбниц теоремаси шартлари бажарилганлиги учун бу қатор яқинлашувчидир.

Шундай қилиб қаралаётган даражали қатор (-1,1)да абсолют яқинлашувчи, $[-1;1)$ да яқинлашувчи, $|x|>1$ бўлганда узоқлашувчи қатор.

Мисол: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ қатор текширилсин.

Ечиш. Бу ерда $a_n=\frac{1}{3^n}$ кўринишдалигини эътиборга олиб, яқинланиш радиусини

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}}=3$$

усулда аниқлаймиз.

Агар $x=-1$ ва $x=1$ деб олинса, мос равишда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ва $\sum_{n=0}^{\infty}1^n$ узоқлашувчи қатор ҳосил қиламиз. Бу қаторлар яқинлашишининг зарурий шарти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ бажарилмайди.

Демак берилган қатор (-3,3) интервалда абсолют яқинлашувчи ва барча $|x|\geq 3$ қийматларда узоқлашувчи қатордир.

Қаторларни ҳадма ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш.

Даражали қаторлар муҳим амалий қўлланишларга эгадир. Шу мақсадда уларнинг баъзи хоссаларини ўрганайлик.

Англаш қийин эмаски даражали қатор ўзининг $(-R;R)$ яқинлашиш соҳасида x ўзгарувининг

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (1)$$

функциясини аниклайди.

Бу $f(x)$ функция $(-R;R)$ соҳасида узлуксиз бўлиб, исталган тартибли узлуксиз ҳосилаларга эгадир. Шу билан бирга $f'(x)$ ҳосила (1) қатор ҳадларнинг ҳосилалари йиғиндисига тенгдир, яъни

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+n\,a_nx^{n-1}+\cdots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

Худди шунингдек

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}$$

ва ҳаказо.

Бу хоссани одатда «даражали қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш» хоссаси деб юритилади.

Шу каби «Даражали қатор йиғиндисининг интеграл қатор ҳадлари интегралларнинг йиғиндисига тенгдир» мазмундаги хосса ҳам ўринлидир.

Яъни $(-R;R)$ оралиқдан олинган ҳар қандай x учун

$$\int f(x)dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$ бўлади.

Агар дифференциал тенгламани ечиш интеграллашга олиб келинса, тенгламани ечиш учун тақрибий усулдан фойдаланишга тўғри келади. Бу усуллардан бири тенгламанинг ечимини Тейлор қатори шаклида тасвирлашдир; бу қатор чекли сондаги ҳадларнинг йиғиндиси тақрибан изланган хусусий ечимга тенг бўлади. Масалан:

$$y'' = F(x, y, y') \qquad (1)$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг

$$(y)_{x=x_0} = y_0, \quad (y')_{x=x_0} = y'_0 \qquad (2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \ldots.$$

орқали ҳисобланади.

Биз $f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0),....$ ларни, яъни хусусий ечимдан олинган ҳосилаларнинг $x=x_0$ бўлгандаги қийматларини топишимиз керак. Буни (1) тенглама ва (2) шартлар ёрдами билан бажариш мумкин. Хақиқатдан, (2) шартдан

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = y_0, \qquad f'(x_0) = y'_0$$

эканлиги келиб чиқади. (1) тенгламадан

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}_0) = (y'')_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0} = F(x_0, y_0, y'_0)$$ бўлади.

(1) тенгламанинг ҳар иккала томонини x бўйича дифференциалласак

$$\mathrm{y}''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y''$$

ҳосил бўлади.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.,
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ
XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH
MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир
Ашурович

Олий математика кафедраси
катта ўқитувчиси

+ 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov