TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу 03

Мусбат ҳадли қаторлар Солиштириш теоремалари. Даламбер ва Коши аломатлари.

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- Мусбат ҳадли қаторлар ва солиштириш теоремалари
- Даламбер ва Коши аломатлари
- Фойдаланилган адабиётлар

Мусбат ҳадли қаторлар ва солиштириш теоремалари

Таъриф: Агар барча $n=1,2,3,\dots$ лар учун $a_n>0$ бўлса, $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ мусбат ҳадли қатор дейилади.

Бизга иккита $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ мусбат ҳадли қаторлар берилган бўлсин.

5-Теорема: Агар барча $n=1,2,3,\dots$ лар учун $a_n\le b_n$, бўлиб $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ яқинлашса $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ яқинлашувчи қатор бўлади.

Исботи: Қаторларнинг хусусий йиғиндиларни

$$S_{a_n} = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$

$$S_{b_n} = b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n$$

деб белгилайлик. Теорема шартига кўра $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ яқинлашувчи, яъни $\lim_{n\to\infty} S_{b_n} = S_b$ мавжуд. Ҳамда $S_{a_n} \le S_{b_n} \le S_b$ ўринлидир. Бундан $\{S_{a_n}\}$ монотон ўсувчи кетма-кетлик бўлиб, юқоридан чегараланган кетма-кетлик бўлиб чиққанлигини аниқлаймиз.

Маълумки ҳар қандай чегараланган монотон ўсувчи кетма-кетлик чекли лимитга эгадир. Шу сабабли $\lim\limits_{n\to\infty} S_{a_n} = S_a < \infty$ мавжуд бўлади.

Демак $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи қатор экан. Теорема исбот қилинди.

Мисол. Қуйидаги:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

қатор яқинлашувчи қатордир. Ҳақиқатдан агар:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

қаторни олсак, бу қаторлар учун

$$\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{2^n};(n=1,2,3\cdots)$$

эканлигини кўрамиз. Яъни кейинги қатор иккинчи ҳадидан бошлаб, биринчи ҳади $\frac{1}{2^2}$ ва махражи $q=\frac{1}{2}$ бўлган, чексиз камаювчи геометрик прогресиянинг барча ҳадлари йиғиндисидан иборат. Шу сабабли бу қатор якинлашувчи қатор бўлиб йиғиндиси $1+\dfrac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=1\dfrac{1}{2}$ га тенгдир.

6-Теорема: Агар барча $n=1,2,3,\dots$ лар учун $a_n \le b_n$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ҳам узоқлашувчи қатор бўлади.

Мисол: Қуйидаги

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots$$ қатор текширилсин.

Биз $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ гармоник қаторни олайлик $n=1,2,3,\dots$ бўлганда $\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ эканлигини кўрамиз, ҳамда гармоник қатор узоқлашувчи қатордир. Шунинг учун теоремага асосан берилган қатор узоқлашувчидир.

Даламбер аломати

Қатор яқинлашиши ёки узоқлашишини бошқа қаторларга солиштирмасдан, балки унинг ҳадларидан тузилган баъзи кўринишдаги ифодаларнинг $n \to \infty$ даги лимитга қараб аниқловчи аломатлар ишлаб чиқилган. Шулардан баъзиларини келтириб ўтамиз.

Даламбер аломати: Айтайлик $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат ҳадли қатор бўлиб $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$ лимит мавжуд бўлсин.

У ҳолда:

1) агар $b < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи;
2) агар $b > 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

Исботи: Теорема шартига кўра

$$\ell im_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$$

Яъни ҳар қандай етарлича кичик мусбат ε-сон олинмасин, шундай n_0 топиладики ундан кичик бўлмаган n лар учун

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - b \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу тенгсизликни

$b-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<b+\varepsilon$ кўринишда ёзамиз. 1) $b<1$ бўлсин. Биз ε сонни шундай танлаб оламизки $b+\varepsilon<1$ шарт бажарилади. Агар $b+\varepsilon=q$ десак $0<q<1$ бўлади. Ўз навбатида $n\geq n_0$ лар учун $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ яъни $a_{n+1}<a_n q$ тенгсизликка эга бўламиз.

Буни $n=n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ldots$ лар учун қўлласак

$$a_{n_0+1}<a_{n_0}q$$

$$a_{n_0+2}<a_{n_0+1}q<a_{n_0}q^2$$

$$a_{n_0+3}<a_{n_0+2}q<a_{n_0}q^3$$

....

тенгсизликларни ҳосил қиламиз.

Энди теоремадаги ҳолларни кўриб чиқамиз.

Энди қаралаётган қаторнинг

$$a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+a_{n_0+3}+\cdots$$

n - колдиғини қарасак, унинг ҳадлари

$$a_{n_0}q+a_{n_0}q^2+a_{n_0}q^3+\cdots$$

геометрик прогрессиянинг мос ҳадларидан кичикдир. Бу қатор $0<q<1$ бўлгани сабабли якинлашувчи қатордир. У ҳолда солиштириш теоремасига кўра n_0 - қолдиқ қатор ва ундан эса $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

1) Энди $b>1$ бўлсин. Биз $\varepsilon>0$ шундай танлаб оламизки $b-\varepsilon>1$ бўлади. У ҳолда $n\geq n_0$ лар учун $a_{n_0}<a_{n_0+1}<a_{n_0+2}<\cdots$ бўлишини аниқлаймиз.

Бу муносабатлар қараётган мусбат қатор ҳадлари ўсиб бориши, ҳамда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ эканлигини кўрсатилади. Бу эса қатор яқинлашининг зарурий шарти бажарилмаётганлигини билдиради. Демак $b>1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ узоқлашувчи қатор экан.

Эслатма: Агар $b=1$ бўлиб қолса, шундай қаторлар учрайдики уларнинг баъзилари яқинлашувчи бўлса, баъзилари узоқлашувчи бўлади.

Демак, Даламбер аломатини $b=1$ да қўллаб бўлмайди.

Бундай ҳолларда қаторни бошқа аломатлар ёрдамида текшириш керак.

Мисоллар:

1. Қуйидаги $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$ қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Ечиш: Қаторнинг умумий ҳади

$$a_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\ldots \cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\ldots \cdot (2n-1)}=\frac{n!}{(2n-1)!!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{(2n-1)!!(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

Демак берилган қатор якинлашувчи экан.

4. Гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ текширилсин.

Ечиш Бу ерда: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ Яъни $b=1$.

TIQXMMI
Toshkent Irrigatsiya va Qishloq Xo'jaligini

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ қатор текширилсин.

Ечиш: Бу ерда

$$a_n=\frac{3^n}{n};\ a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{n+1} \quad \text{ва} \quad \lim_{n\to 0}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3n}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=3>1$$

Шу сабабли Даламбер аломатига кўра қатор узоқлашади,

2. $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ қатор текширилсин.

Ечиш: Бу қаторда

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)},\ a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{ва} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1$$

Лекин бу қаторнинг якинлашувчи эканлигини бевосита қатор яқинлашиши таърифидан ҳам келтириб чиқариш мумкин.

Ҳақиқатдан:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\ }{n}\right.$$

чекли сон. Яъни $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ яқинлашувчи қатор ва йиғиндиси $S=1$.

Коши аломати: Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторда $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.

Лимит мавжуд бўлса у ҳолда: $q<1$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $q>1$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади. Бу ерда ҳам $q=1$ бўлиб қолса, қатор яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлиги очиқ қолади.

Мисоллар:

1. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\cdots$ қатор текширилсин.

Ечиш: Қаторнинг умумий ҳади.

$$a_n = \frac{1}{\ell n^n(n+1)}$$ кўринишга эга.

Бундан:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ell n^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ell n(n+1)} = 0 < 1,$$ демак берилган қатор яқинлашувчи экан.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(4n-1)}{(n+2)}\right)^n$$ қатор текширилсин.

Ечиш:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+2} = 4 > 1,$$ яъни берилган қатор узоқлашувчи.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й. 315 б.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й. 336 б.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й. 148 б.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й., 400 б.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

☎ + 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov