

**8-MAVZU: VEKTOR TUSHUNCHASI.
VEKTORLAR USTIDA CHIZIQLI
AMALLAR. VEKTORNING O'QDAGI
PROYEKSIYASI. VEKTORLARNING
SKALYAR KO'PAYTMASI**

Vektor tushunchasi

Vektor kattalik (miqdor) lar vektor ko'rinishida tasvirlanadi.

1-ta'rif. Yo'nalgan kesma **vektor** deyiladi.

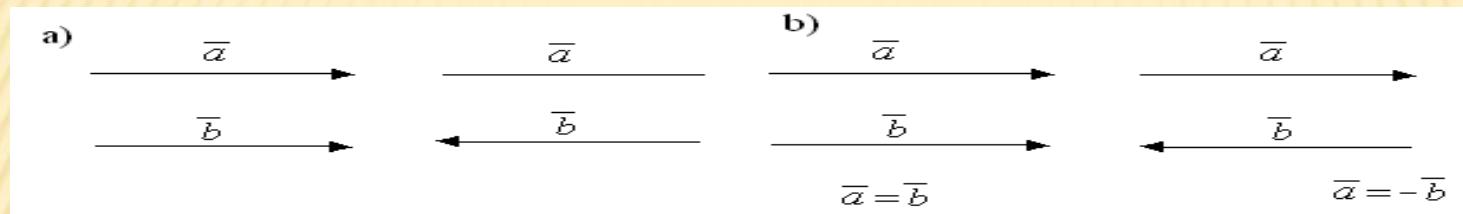
Boshlanish (bosh) nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo'lgan vektorni \overrightarrow{AB} kabi yozish qabul qilingan. Ba'zan vektorni bitta harf bilan \vec{a} (yoki \bar{a}) kabi belgilanadi. A va B nuqtalar orasidagi masofa \overrightarrow{AB} vektoring uzunligi deyiladi.

\overrightarrow{AB} vektoring uzunligini uning **moduli** ham deb yuritiladi va $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi oxiri bilan ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi. Demak, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ —nol vektor. Nol vektoring moduli 0 ga teng bo'lib, uning yo'nalishi aniq emas.

\overrightarrow{BA} vektor \overrightarrow{AB} vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi. \vec{a} vektorga qarama-qarshi vektor- \vec{a} kabi belgilanadi. Uzunligi 1 ga teng vektor birlik vektor deyiladi va \vec{a} vektorga mos (u bilan bir o'qda yotgan hamda bir xil yo'nalishga ega) birlik vektor \vec{a}^0 kabi belgilanadi.

2-ta‘rif. Bitta to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotuvchi \vec{a} va \vec{b} vektorlar **kollinear** vektorlar deyiladi (6-rasm).



6-rasm.

3-ta‘rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar **komplanar vektorlar** deb aytiladi.

4-ta‘rif. Kollinear \vec{a} va \vec{b} vektorlar bir xil yo’nalgan hamda bir xil uzunlikka ega bo’lsa, teng deyiladi ($\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi) (6-rasm).

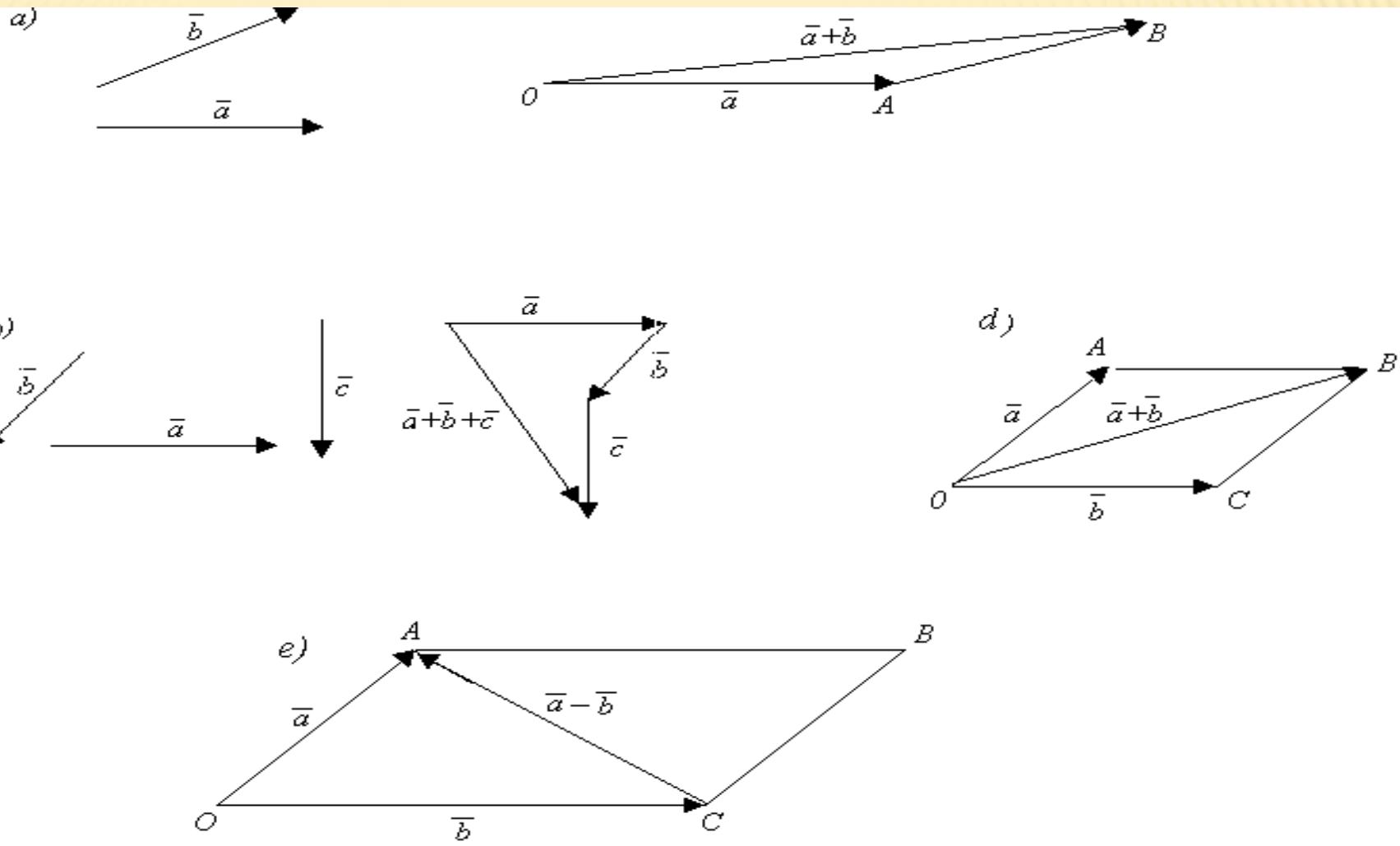
Ta‘rifga binoan berilgan vektorni o’zo’ziga parallel ko’chirish natijasida unga teng vektor hosil bo’ladi. Boshqacha aytganda vektorni uzunligi va yo’nalishini o’zgartirmagan holda uni fazoning bir nuqtasidan boshqa bir nuqtasiga ko’chirish mumkin ekan. Bunday vektorlar **erkin** vektorlar deyiladi. Biz faqatgina erkin vektorlar bilan ish ko’ramiz.

Vektorlar ustida chiziqli amallar

Matematikada vektor tushunchasi son tushunchasiga nisbatan murakkab tushuncha. Sonlar ustida bajariladigan barcha amallarni vektorlar ustida bajarib bo'lmaydi. Masalan ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish kabi amallarni vektorlar ustida bajarish mumkin emas.

Vektorlar ustida **chiziqli amallar** deb, vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorlarni songa ko'paytirish amallariga aytildi.

1. **Vektorlarni qo'shish.** Noldan farqli ikkita \vec{a} va \vec{b} vektorlarni olamiz. Ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ vektorni yasaymiz, so'ngra A nuqtaga $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Ikkita \vec{a} va \vec{b} vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ deb birinchi qo'shiluvchi \vec{a} vektoring boshini ikkinchi qo'shiluvchi \vec{b} vektoring oxiri bilan tutashtiruvchi \overrightarrow{OB} vektorga aytildi. (7-rasm). Vektorlarni bunday qo'shish usuli **uchburchak usuli** deyiladi.



7-rasm

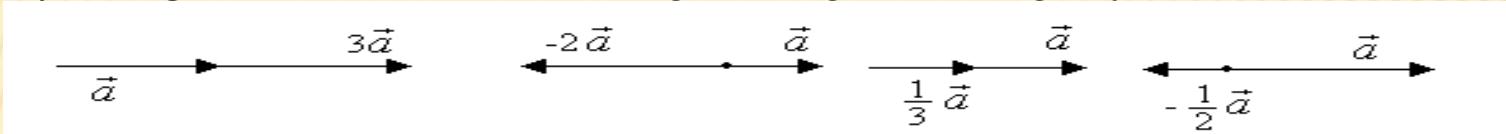
Uchta \vec{a} , \vec{b} va \vec{c} vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ deb birinchi qo'shiluvchi \vec{a} vektorni oxiriga ikkinchi qo'shiluvchi \vec{b} vektorni boshini qo'yib, so'ngra ikkinchi qo'shiluvchi vektorning oxiriga uchinchi \vec{c} qo'shiluvchi vektorning boshini qo'yib birinchi \vec{a} vektorning boshi bilan uchinchi \vec{c} vektorning oxirini tutashtirish natijasida hosil bo'lgan vektorga aytildi (7^b -rasm).

Vektorlarni bu xilda qo'shish qo'shiluvchilar soni har qanday bo'lganda ham yaroqlidir.

Endi vektorlarni qo'shishning boshqa bir usuli bilan tanishamiz. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ vektorlarni yig'indisini topish uchun bu vektorlarni umumiyluq nuqtada joylashtirib OABC parallelogramm yasaymiz. Parallelogrammning O uchidan o'tkazilgan diagonali \overrightarrow{OB} vektor, \vec{a} va \vec{b} vektorlarni yig'indisini ifodalaydi. Vektorlarni bunday qo'shish usuli **parallelogramm** qoidasi deb ataladi (7^d -rasm).

2. Vektorlarni ayirish. \vec{a} va \vec{b} vektorlarni ayirmasi $\vec{a} - \vec{b}$ deb \vec{b} vektor bilan yig'indisi \vec{a} vektorni beradigan \vec{c} vektorga aytildi. Demak $\vec{a} - \vec{b}$ ayirmani topish uchun \vec{a} vektor bilan \vec{b} vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorni yig'indisini topish lozim ekan. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ vektorlarni ayirmasini topish uchun bu vektorlarni umumiyluq nuqtada joylashtirib, yasalgan OABC parallelogrammning C uchidan o'tkazilgan diagonali \overrightarrow{CA} vektorni topish lozim. Ayirma vektorda yo'nalish «ayriluvchidan» dan «kamayuvchi» ga qarab yo'naladi (7^e -rasm).

3. Vektorni songa ko'paytirish. Noldan farqli \vec{a} vektorning $m \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, \vec{a} vektorga kollinear, uzunligi $|m| \cdot |\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, $m > 0$, bo'lganda \vec{a} vektor bilan bir xil yo'nalgan, $m < 0$ bo'lganda esa unga qarama-qarshi yo'nalgan hamda $m \vec{a}$ bilan belgilanadigan vektorga aytiladi(8-rasm).



8- rasm.

Izoh. 1. Istalgan \vec{a} vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ bilan unga mos \vec{a}^0 birlik vektorni ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin, ya'ni $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$.

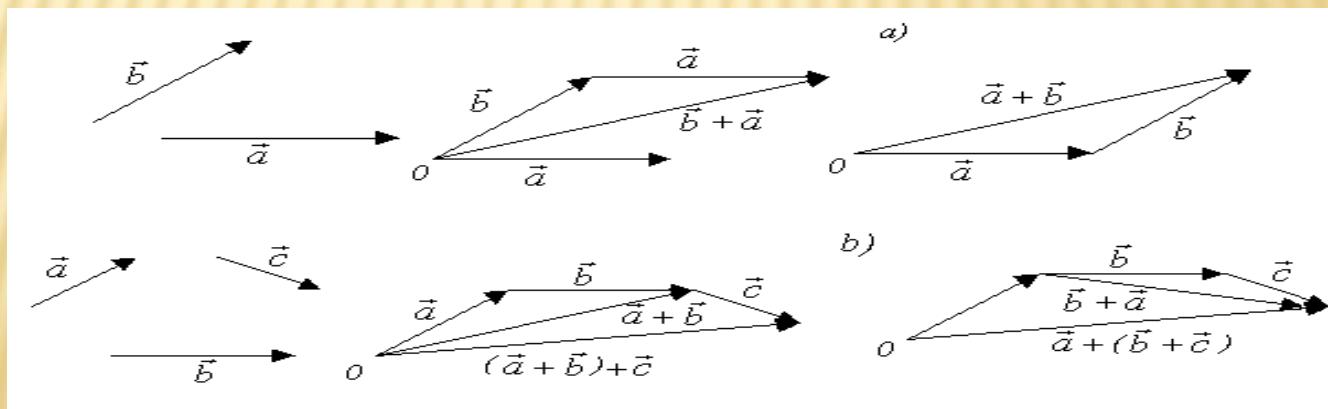
2. \vec{a} va \vec{b} ($\vec{b} \neq \vec{0}$) kollinear vektorlar uchun shunday yagona λ son mavjud bo'lib $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, $\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^0$ vektorlarni kollinearligidan $\vec{a}^0 = \pm \vec{b}^0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $\vec{a} = \pm |\vec{a}| \vec{b}^0 = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$ yoki $\pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \lambda$ belgilashni kiritsak $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorni songa ko'paytirish natijasida vektor hosil bo'lar ekan.

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (9^a -chizma);
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (9^b -chizma);
3. $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.
4. $\vec{a} + 0 = \vec{a}$;
5. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
6. $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$;
7. $(m+n) \cdot \vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, m va n haqiqiy sonlar;
8. $(m \cdot n) \cdot \vec{a} = m \cdot (n\vec{a}) = n(m\vec{a})$.



9-rasm.

Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi

Fazoda \vec{a} va \vec{b} vektorlar berilgan bo'lsin. Fazoda ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.

5-tarif. \vec{a} va \vec{b} vektorlar orasidagi burchak deb \overrightarrow{OA} va \overrightarrow{OB} vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust tushishi uchun burilishi lozim bo'lgan φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) burchakka aytildi.

\vec{a} vektor bilan ℓ o'q orasidagi burchak deganda \vec{a} vektor bilan ℓ o'qda joylashgan va u bilan bir xil yo'nalган $\vec{\ell}$ birlik vektor orasidagi burchak tushiniladi. \vec{a} va \vec{b} vektorlar orasidagi burchak ($\vec{a} \wedge \vec{b}$) kabi belgilanadi.

Vektorning o'qqa proeksiyasi va uning xossalari

Fazoda ℓ o'q va \overrightarrow{AB} vektor berilgan bo'lsin. A va B nuqtalardan bu o'qqa perpendikulyar tushirib perpendikulyarning asoslarini mos ravishda A_1 va B_1 orqali belgilaymiz. $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektor \overrightarrow{AB} vektorning ℓ o'qdagi **tashkil etuvchisi** yoki **komponenti** deb ataladi (9-rasm). ℓ_1 va ℓ_2 sonlar A_1 va B_1 nuqtalarining ℓ o'qdagi koordinatalari bo'lsin.

6-ta’rif. ℓ 2- ℓ 1 ayirma \overrightarrow{AB} vektorning ℓ o’qqa proeksiyasi deb ataladi.

\overrightarrow{AB} vektorning ℓ o’qqa proeksiyasi $pr_{\ell} \overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib \overrightarrow{AB} vektorning ℓ o’qqa proeksiyasi deb vektorning boshi A va oxiri B nuqtalarining ℓ o’qdagi proeksiyalari A_1 va B_1 nuqtalar orasidagi masafoga aytilar ekan. Bu masofa vektor bilan o’qning yo’nalishi mos tushganda «+» ishora bilan aks holda «-» ishora bilan olinadi. Proeksiyani ta’rifidan \overrightarrow{AB} vektor o’qqa perpendikulyar bo’lganda uning o’qqa proeksiyasi nolga teng bo’lishi kelib chiqadi. (10- rasm)

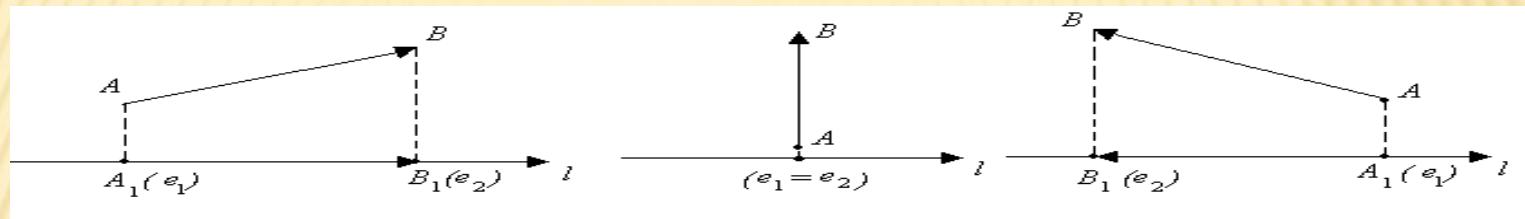
Proeksiyaning asosiy xossalariini keltiramiz:

1. \vec{a} vektorning ℓ o’qqa proeksiyasi \vec{a} vektor uzunligini bu vektor bilan o’q orasidagi φ burchak kosinusiga ko’paytmasiga teng, ya’ni $pr_{\ell} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$. Bu 10^a-chizmadan ko’rinib turibdi.
2. Ikki vektor yig’indisining o’qqa proeksiyasi qo’shiluvchi vektorlarning shu o’qqa proeksiyalari yig’indisiga teng, yani $pr_{\ell} (\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\ell} \vec{a} + pr_{\ell} \vec{b}$.

Bu 10^b-chizmadan ko’rinib turibdi.

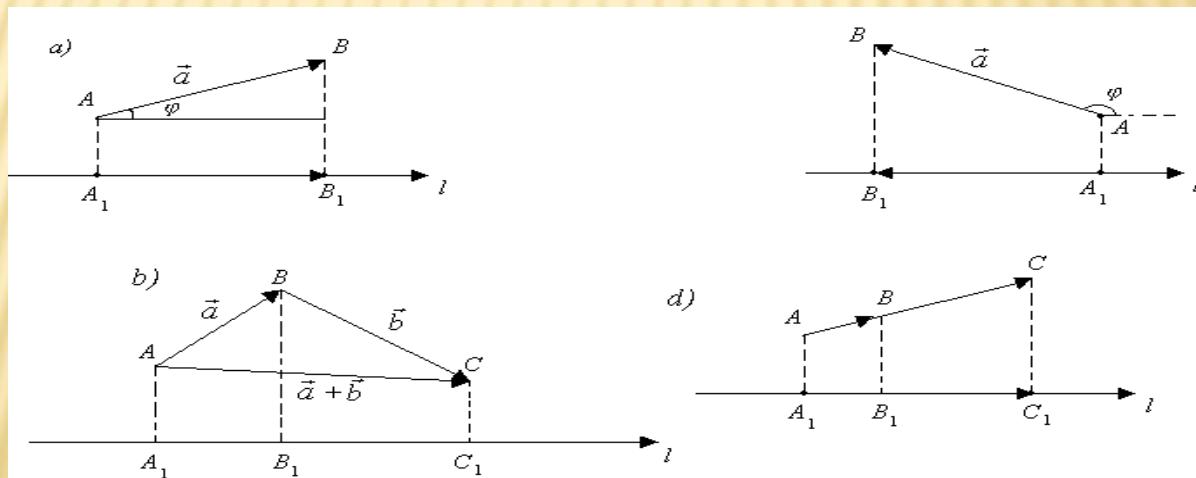
3. Vektor \vec{a} ni λ songa ko'paytirganda uning o'qqa proeksiyasi ham shu songa ko'payadi, ya'ni $pr_{\ell}(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot pr_{\ell} \vec{a}$ (10^d-rasm).

Boshqacha aytganda skalyar ko'paytuvchini proeksiya belgisidan chiqarish mumkin ekan.



$$\ell_2 - \ell_1 = pr_{\ell} \overrightarrow{AB} > 0, \quad \ell_2 - \ell_1 = pr_{\ell} \overrightarrow{AB} = 0, \quad \ell_2 - \ell_1 = pr_{\ell} \overrightarrow{AB} < 0.$$

10-rasm



11-rasm.

Endi \overrightarrow{AB} vektorning ℓ o'qdagi tashkil etuvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorni proeksiya orqali ifolalaymiz. $\overrightarrow{\ell^0}$ vektor ℓ o'qqa mos birlik vektor bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{A_1B_1} = pr_{\ell} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\ell^0} \quad (1)$$

bo'lishi ravshan.

Izoh. Vektorning boshqa vektor yo'naliishiga proeksiyasi ham xuddi vektorning o'qqa proeksiyasi kabi aniqlanadi.

Vektorni koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari bo'yicha yoyish

$Oxyz$ fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik. O'qlarning har birida boshi koordinatalar boshida bo'lib yo'naliishi o'qning musbat yo'naliishi bilan ustma-ust tushadigan birlik vektorlarni olamiz va ularni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar orqali belgilaymiz. Bu yerdagi $\vec{i} 0x$ o'qqa mos, $\vec{j} 0y$ o'qqa mos va $\vec{k} 0z$ o'qqa mos birlik vektorlar. Demak $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar o'zaro perpendikulyar va nokomplanar.

7-ta’rif. Uchta $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar sistemasi dekartning to’g’ri burchakli bazisi yoki ortlar deb ataladi.

\vec{a} fazodagi ixtiyoriy vektor bo’lsin. Shu vektorni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar orqali ifodalash mumkinmi? Agar mumkin bo’lsa u ifodani qanday topish mumkin? degan savollarga javob topishga harakat qilamiz.

\vec{a} vektorni o’z-o’ziga parallel ko’chirib uning boshini koordinatalar boshiga joylashtiramiz. $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning oxiri M nuqtadan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o’tkazamiz. Natijada diagonallaridan biri \overrightarrow{OM} vektordan iborat parallelepipedga ega bo’lamiz. 12-rasmdan vektorlarni qo’shish qoidasiga binoan $\vec{a} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}$ ga ega bo’lamiz. $\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM}_2$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM}_3$ bo’lgani uchun $\vec{a} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3$ (2) bo’ladi. \overrightarrow{OM}_1 , \overrightarrow{OM}_2 va \overrightarrow{OM}_3 vektorlar mos ravishda $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorni $0x$, $0y$ va $0z$ o’qlardagi tashkil etuvchilari bo’lganligi uchun ular 1) formulaga ko’ra

$$\overrightarrow{OM}_1 = p r_{0x} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OM}_2 = p r_{0y} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{OM}_3 = p r_{0z} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} \quad (3)$$

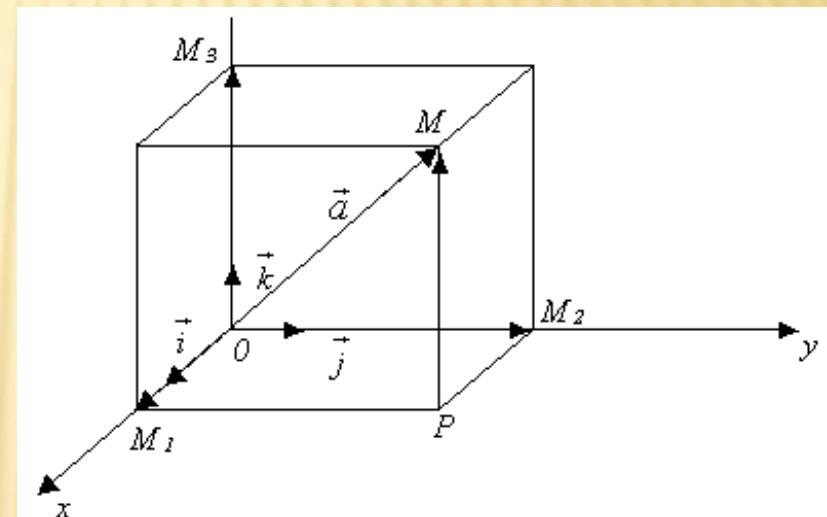
bo'ladi.

$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning $0x, 0y, 0z$ o'qlardagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y, a_z lar orqali belgilasak (2) va (3) formulalarga asoslanib

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (4)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib fazodagi istalgan \vec{a} vektorni yagona usul bilan dekart bazisi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orqali (4) ko'rinishda ifodalash mumkin ekan. (4) \vec{a} vektorni uning koordinatalar o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali yoyilmasidir. Bu yoyilmani har xil qo'llanmalarda har xil nomlar bilan yuritiladi.



12- rasm

Masalan uni vektorni ortlar, dekart bazisi, vektorni proeksiyalari va koordinatalari orqali yoyilmasi deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik vektoring oxiri M nuqta x, y, z koordinatalarga ega bo'lsin. U holda $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektoring koordinata o'qlaridagi proeksiyalari $a_x = x, a_y = y, a_z = z$ bo'lib (4) yoyilma
$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (5)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Vektoring koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini uning koordinatalari deb ham ataladi. O'qlardagi proeksiyalari a_x, a_y, a_z ga teng \vec{a} vektorni $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ ko'rinishda yozamiz.

a_x - \vec{a} vektoring abssissasi, a_y - ordinatasi, a_z - applikatasi deb ataladi.

Shunday qilib boshi koordinatalar boshida bo'lgan $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektor bilan uni oxiri M nuqta bir xil koordinatalarga ega bo'lar ekan.

\overrightarrow{OM} vektor M nuqtaning **radius-vektori** deyiladi.

Izoh: Bundan buyon vektor berilgan yoki vektor topilsin deyilganda vektoring koordinatalari berilganligini yoki vektorni koordinatalarini topish lozimligini tushuniladi.

Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar

Agar vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari (vektorning koordinatalari) malum bo'lsa, u holda bu vektorlar ustidagi qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirishi amallarini ularning proeksiyalari ustidagi arifmetik amallar bilan almashtirish mumkin.

Vektorlar $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ yoyilmalari yordamida berilgan bo'lzin. U holda $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$, $\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$, ya'ni vektorlarni qo'shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi), vektorni songa ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

4-misol. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ vektorlar berilgan. Ularning yig'indisi va ayirmasi topilsin.

Yechish. Vektorlarning mos koordinatalarini qo'shib

$$\vec{a} + \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (-2+4)\vec{k} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

vektorga va mos koordinatalarini ayirib $\vec{a} - \vec{b} = (2-3)\vec{i} + (3-(-1))\vec{j} + (-2-4)\vec{k} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ vektorga ega bo'lamiz.

5- misol. $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ vektor 4 ga ko'paytirilsin.

Yechish. Vektorning har bir koordinatalarini 4 ga ko'paytirib $4\vec{a} = 8\vec{i} + 20\vec{j} - 12\vec{k}$ vektorni hosil qilamiz.

10. Vektoring uzunligi

Fazoda vektor $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ yoyilmasi yordamida berilgan bo'lib uning uzunligi $|\vec{a}|$ ni topish talab etilsin. Qaralayotgan holda (12-rasm) $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$

vektor qirralari shu vektorning koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari \overrightarrow{OM}_1 , \overrightarrow{OM}_2 va \overrightarrow{OM}_3 dan iborat parallelepipedning diagonallaridan biri ekanligi aytilgan edi. To'g'ri burchakli parallelepiped diognalining kvadrati uning qirralari kvadratlarining yig'indisiga teng bo'lishi ma'lum. Shunga ko'ra

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = |OM_1|^2 + |OM_2|^2 + |OM_3|^2, \quad \text{yoki} \quad |\overrightarrow{OM}_1| = |a_x|, \quad |\overrightarrow{OM}_2| = |a_y| \quad \text{va}$$

$$|\overrightarrow{OM}_3| = |a_z| \text{ bo'lgani uchun } |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \text{ bundan vektorni uzunligini topish formulasi } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (6) \quad \text{ni hosil qilamiz.}$$

6-misol. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorni uzunligi topilsin?

Yechish. Misolda $a_x=6$, $a_y=3$, $a_z=-2$ bo'lgani uchun (6) formulaga binoan $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$ bo'ladi.