TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу 01

Сонли қаторлар. Яқинлашишнинг зарурий шарти

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- Сонли қатор тушунчаси
- Яқинлашишнинг зарурий шарти
- Фойдаланилган адабиётлар

Сонли қатор тушунчаси

ТАЪРИФ: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a_n $, \ldots$ чексиз сонли кетма – кетлиги берилган бўлсин. Ушбу

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

ифода сонли қатор дейилади. (a_1 биринчи, a_n n-чи ҳадлари)

ТАЪРИФ: (1)-қаторнинг n та чекли ҳадларининг йиғиндиси

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг n – хусусий йиғиндиси дейилади.

n – хусусий йиғиндилар кетма-кетлигини тузамиз:

$S_1 = a_1$ $S_2 = a_1 + a_2$ ……………… $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Агар $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ мавжуд бўлса, унга (1) қаторнинг йиғиндиси деб айтилади ва қатор яқинлашади дейилади., (S чегараланган сон). Агар $\lim_{n\to\infty} S_n$ мавжуд бўлмаса, ёки ∞ га тенг бўлса (1) қатор узоқлашувчи деб айтилади.

М и с о л : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ қаторнинг йиғиндисини топинг.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

қатор йиғиндиси 1 га тенг, у яқинлашувчи экан.

Мисол: Ушбу $a + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ (2) қаторни текширинг.

Ечими: (2) – қатор геометрик прогрессия ҳадларидан тузилган қатордир a биринчи ҳади, q унинг махражи.

Геометрик прогрессиянинг олдинги n та ҳадининг йиғиндиси

$$q \neq 1, \qquad S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

1) Агар |q|<1 бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$

Демак, |q|<1 да қатор яқинлашувчи.

2) Агар |q|>1 бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \infty$ Демак, |q|>1 да

қатор узоқлашувчи.

3) Агар q=1 бўлса, $a + a + \ldots + a + \ldots$ катор хосил бўлади.

$S_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ бўлиб, қаторнинг узоқлашувчанлиги келиб

чиқади.

4) q= -1 бўлса, $a - a + a - a + \ldots$ қатор ҳосил бўлади.

Бу ҳолда n жуфт бўлганда $S_n = 0$, n тоқ бўлганда, $S_n = a$ бўлади.

Демак, S_n нинг лимити мавжуд бўлмайди қатор узоқлашувчидир.

Сонли қаторнинг хоссалари

ТЕОРЕМА: Агар $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (1) қатор яқинлашса ва йиғиндиси S га тенг бўлса, $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$ (2) қатор ҳам яқинлашади ва йиғиндиси ***c*S** га тенг бўлади, бунда ***c*** ўзгармас сон.

Исбот: Агар (1) қаторнинг *n*- хусусий йиғиндиси S_n бўлса, (2) қаторнинг *n* – хусусий йиғиндиси $\boldsymbol{c \cdot S_n}$ бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$$

ТЕОРЕМА: Агар $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (1)

$$в_1 + в_2 + \ldots + в_n + \ldots \quad (2)$$

қаторлар яқинлашса ва уларнинг йиғиндилари мос равишда S_1 ва S_2 бўлса, у ҳолда

$$a_1 \pm в_1 + a_2 \pm в_2 + \ldots + a_n \pm в_n + \ldots \quad (3)$$

қатор яқинлашувчи бўлади ва йиғиндиси $S_1 \pm S_2$ га тенг бўлади.

Исбот: S_n (3) –қаторнинг *n*- хусусий йиғиндиси бўлсин. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\overline{S_1} + \overline{S_2}) = S_1 \pm S_2$$

Бу ерда, $\overline{S_1}$ ва $\overline{S_2}$ мос равишда (1) ва (2) қаторларнинг *n*-хусусий йиғиндилари.

Яқинлашишнинг зарурий шарти

1-Теорема. Агар $a_1+ a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг ҳар қандай қолдиғи ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча қатор қолдиғи яқинлашувчи бўлса, унинг ўзи ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Агар (1) қатор учун S_{m+k} хусусий йиғинди олсак

$$S_{m+k} = \sum_{n=1}^{m+k} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n = S_n + S_k^*$$

муносабатни кўра оламиз ва S_k^* ни m-қолдиқнинг k- хусусий йиғиндиси деб қараймиз. Теорема шартидаги (1) қатор яқинлашувчилигидан

$$\lim_{k\to\infty} S_k^* = \lim_{k\to\infty}\left[S_{m+k} - S_m\right] = \lim_{k\to\infty} S_{m+k} - S_m = \lim_{k\to\infty} S_n - S_m = S - S_m$$

ҳосил қиламиз.

Бундан, $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_k$ қолдиқ қаторнинг якинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди қолдиқ қатор яқинлашувчи деб қарасак (бунинг йиғиндиси R_m бўлсин)

Бу ҳолда,

$$\lim_{k\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_{m+k} = \lim_{k\to\infty}\left[S + S_k^*\right] = S_m + \lim_{k\to\infty} S_k^* = S_m + R_m < \infty$$

Шунинг учун. Демак, (1) қатор яқинлашувчи бўлади.

Қуйидаги теоремаларни исботсиз келтиришни лозим топдик.

2-Теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи қатор бўлиб, йиғиндиси S бўлса,

$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ қатор ҳам яқинлашувчи қатор бўлиб, йиғиндиси, $\boldsymbol{kS}$ бўлади.

Бу теорема қуйидагича ҳам талқин қилинади.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи қатор бўлса $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ бўлади яъни ўзгармас кўпайтувчи чексиз йиғинди белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

3-Теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ яқинлашувчи қаторлар бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ қаторлар ҳам яқинлашувчи қаторлар бўлиб

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ тенглик ўринли бўлади

Бу теорема шарти бажарилса қўшилаётган қаторлар сони чеклита бўлганда ҳам унинг ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин.

4-Теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи қатор бўлса, ҳад номери чексиз ўсиб борганда қаторнинг умумий ҳади a_n нолга интилади, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Исботи. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ яқинлашувчи бўлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Яна $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ дея оламиз.

Агар $S_n - S_{n-1} = a_n$ тенгликни эътиборга олсак,

$$\ell im_{n\to\infty} a_n = \ell im_{n\to\infty}[S_n - S_{n-1}] = \ell im_{n\to\infty} S_n - \ell im_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Натижа. Агар (1) қатор учун $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ шарт бажарилмаса, у ҳолда бундай қатор узоқлашувчи қатор бўлади

Агар асосий мақсадимиз яқинлашувчи қаторларни ва уларнинг йиғиндисини аниқлашдадир деб ҳисобласак, бундан буён $n \to \infty$ да умумий ҳади нолга интиладиган $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ қаторлар билан иш кўришимиз аён бўлиб чиқади.

Агар қатор яқинлашиши ва узоқлашиши ҳақидаги таърифларга эътибор берсак, бундай масалага $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ни текшириш орқали жавоб олган бўламиз. Лекин таъкидлаш лозимки ҳар қандай қатор учун хам S_n хусусий йиғиндини текширишга қулай кўринишга келтириб бўлавермайди. Ҳатто S_n нинг ифодасини кутилган кўринишга келтириб олинганда хам $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ лимитни хисоблаш маълум қийинчиликларга эга бўлади.

Шундай қийинчиликлардан қутилиш мақсадида ҳам қаторлар назарияси кўрилган.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й. 315 б.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й. 336 б.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й. 148 б.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й., 400 б.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

+ 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov