TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу **04**

Кошининг интеграл аломати. Ишоралар навбатланувчи қаторлар. Лейбниц теоремаси.

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

Режа:

- Кошининг интеграл аломати
- Ишоралар навбатланувчи қаторлар, Лейбниц теоремаси
- Гаусс аломати
- Фойдаланилган адабиётлар

Кошининг интеграл аломати

ТЕОРЕМА: Ушбу $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (1) қаторнинг ҳадлари мусбат, лекин ўсувчи бўлмасин, яъни

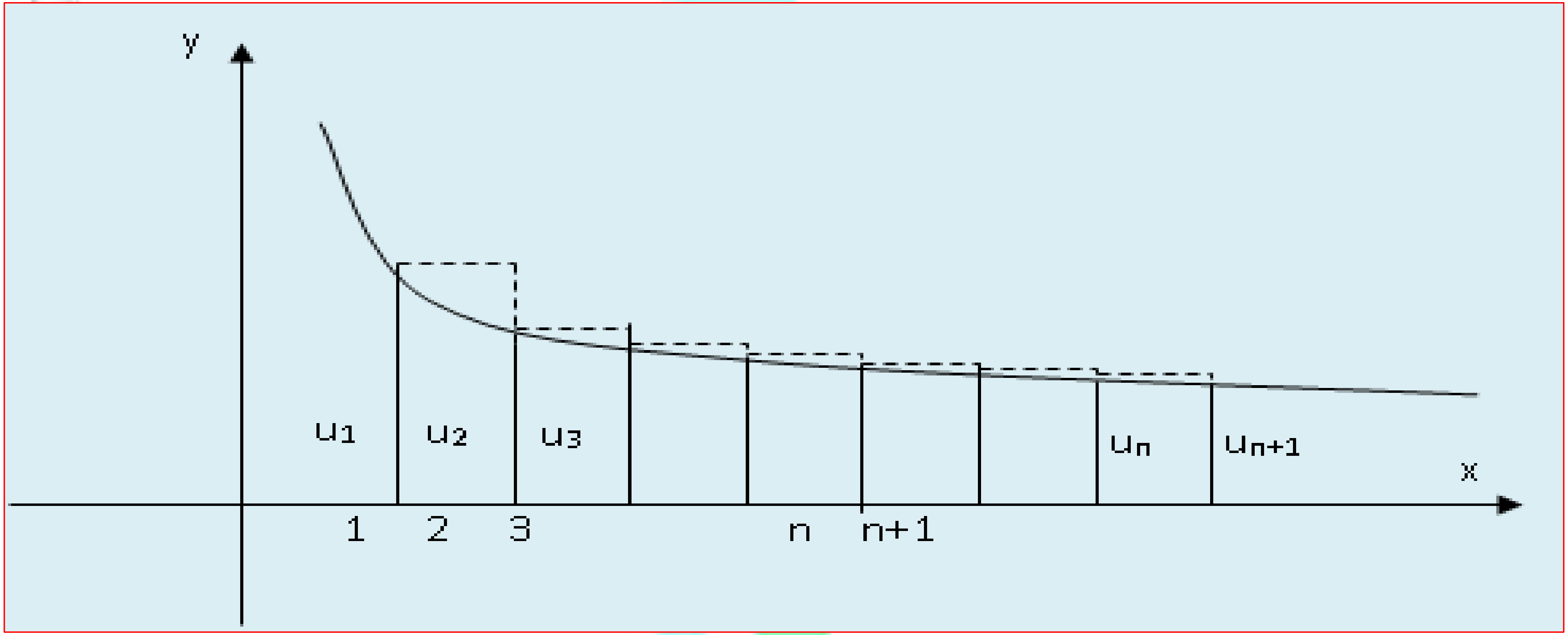
$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$ ва $f(x)$ шундай ўсмайдиган узлуксиз функция бўлиб,

$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ \ldots,\ f(n) = u_n, \ldots$ бўлсин. Бу ҳолда қуйидагилар ўринлидир :

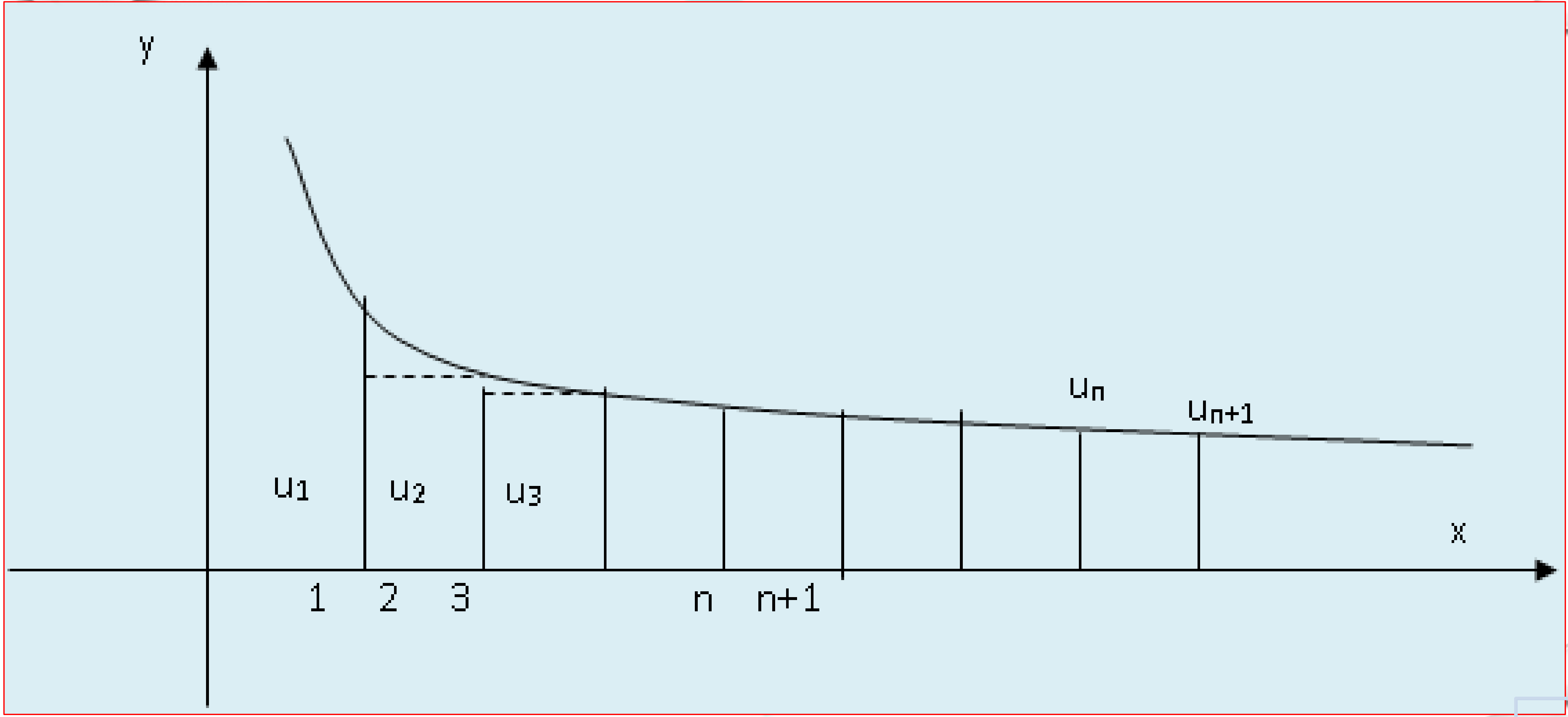
а) агар $\int_1^{\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашса, (1) қатор ҳам яқинлашади;

б) агар бу хосмас интеграл узоқлашса, (1) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот: Теореманинг шартларига асосан $y = f(x)$ мавжуд булсин.



1-расм



2-расм

1- расмга асосан $S_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ (2)

2- расмга кўра $S_{n+1} > \int_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1$ (3)

в) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ яқинлашса, у ҳолда

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n > \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ бўлади.

(3) тенгликдан $S_{n+1} < S_n < \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

Лекин, $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ яқинлашувчи, шунинг учун $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ тенгликдан

(1) қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

TIQXMMI
Toshkent Irrigatsiya va Qishloq Xo'jaligini

д) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ узоқлашсин, у ҳолда (2) тенгликдан

$S_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n > \lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x) = \infty$ келиб чиқади.

Бундан берилган (1) қаторнинг узоқлашувчилиги келиб чиқади.

Мисол: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$ интеграл аломатига кўра яқинлашишга текширинг.

Ечими: Интеграл белгисига асосан $f(x) = \frac{1}{2n+5}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x+5} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{в} \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2} \lim_{b\leftarrow\infty} \int_1^{в} \frac{d(2x+5)}{2x+5} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln|2x+5|\Big|_1^{в} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} (\ln(2b+5) - \ln 7) = \infty$$

Хосмас интеграл узоқлашувчи, демак $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$ қатор узоқлашувчи.

Ишоралари навбатланувчи қаторлар. Лейбниц теоремаси

ТАЪРИФ : $u_1, u_2 ,\ldots,u_n , \ldots$ мусбат ҳадли сонли кетма-кетлик ҳадларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots \qquad (1)$$

Қаторга ишоралари навбатланувчи қатор дейилади.

Ўзгарувчан ишорали қаторларнинг хусусий ҳоли ***ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлардир***.

ТЕОРЕМА: (Лейбниц). Агар (1) – ишорали навбатлашувчи қаторнинг ҳадлари

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots u_n > \cdots \quad (2) \text{ ва } \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad (3) \text{ бўлса,}$$

(1) катор яқинлашади,унинг йиғиндиси мусбат бўлади ва биринчи ҳаддан катта бўлмайди. Теорема исботсиз кабул килинади.

М и с о л : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қаторни текширинг.

Ечими. Қатор ҳадларини ёйиб ёзамиз:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

Ишоралари навбатланувчи катор экан . Лейбниц теоремасидаги шартларни текширамиз:

А) $1>\frac{1}{2}>\cdots>\frac{1}{n}\cdots$ (2) шарт бажарилди.

Б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (3) шарт бажарилди.

Демак, берилган катор якинлашувчи ва унинг йигиндиси бирдан ошмайди.

Қаторлар назариясидан тақрибий ҳисоблашларда кенг қўлланилади. Тақрибий ҳисоблашларда йўл қўйилган хатоликни баҳолаш катта амалий аҳамиятга эга. Ишоралари навбатлашувчи қаторларда хатолик, ҳисобга олинмаётган биринчи ҳад абсолют қийматидан катта бўлмайди, яъни $|r_n| < a_{n+1}$

Мисол. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$

ни 0,1 аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: Шартга асосан $|r_n| < 0{,}1$ бўлиши керак.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9. \quad Demak,$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$$

Бунда $S \approx 0{,}7$; $0{,}1$ гача аниқликда ҳисобланди.

Гаусс аломати

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳадларини $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда

агар $\lambda > 1$ бўлса, қатор яқинлашади,

$\lambda < 1$ бўлса узоқлашади,

$\lambda = 1$ У ҳолда μ ни текширамиз

$\mu > 1 -$ яқинлашади

$\mu \leq 1 -$ узоқлашади

бу ерда $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, $\mu = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$

МИСОЛЛАР:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^3(n+2)} = 1$$

$$\mu = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^4}{n^3(n+2)} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 - n^3(n+2)}{n^2(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{n^2(n+2)} = 2 > 1$$

Қатор яқинлашади.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й. 315 б.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й. 336 б.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й. 148 б.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й., 400 б.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

Нормўминов Баходир Ашурович

Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси

+ 998 71 237 0986

b.normuminov@tiiame.uz

@B.Normuminov