TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

Mavzu: To‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. To‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik alomatlari. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarning bissektrisa tenglamalari. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqgacha masofa. Analitik geometriyaning sodda masalalari.

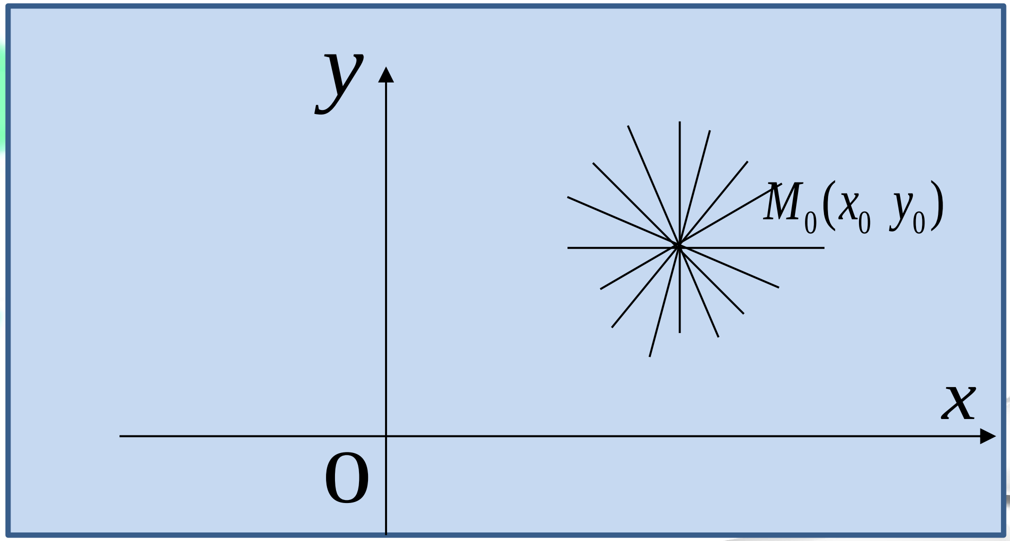
Reja:

1. To’g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi
2. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak
3. Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik hamda perpendikulyarlik sharti
4. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha masofa
5. Bissektrisalar tenglamalari

Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi

Tekislikda $M=M(x_0,\ y_0)$ nuqta berilgan bo'lib. Ma'lumki, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi $y=kx+b$ ko'rinishda. Aytaylik bu to'g'ri chiziq berilgan $M=M(x_0,\ y_0)$ nuqtadan o'tsin. Unda nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziqning tenglamasini qanoatlantiradi ya'ni $y_0=kx_0+b$ o'rinli tengliklardan. $\boxed{y-y_0=k(x-x_0)}$

Bu formula berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi



Misol: $M(2,4)$ nuqtadan o'tib, x-4y+8=0 to‘g‘ri chiziqga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Bu masalada berilgan nuqtadan o'tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini $y-y_0=k(x-x_0)$ formuladan topamiz, yani

$y-4=k(x-2)$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Perpendikulyarlik $k_1 \cdot k_2 = -1$ shartidan, $k_1 = k,\ k_2 = \frac{1}{4}.$ bundan k = - 4

Izlanayotgan tenglama y-4 =-4(x-2) yoki 4x+y+4=0 iborat bo‘ladi.

Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

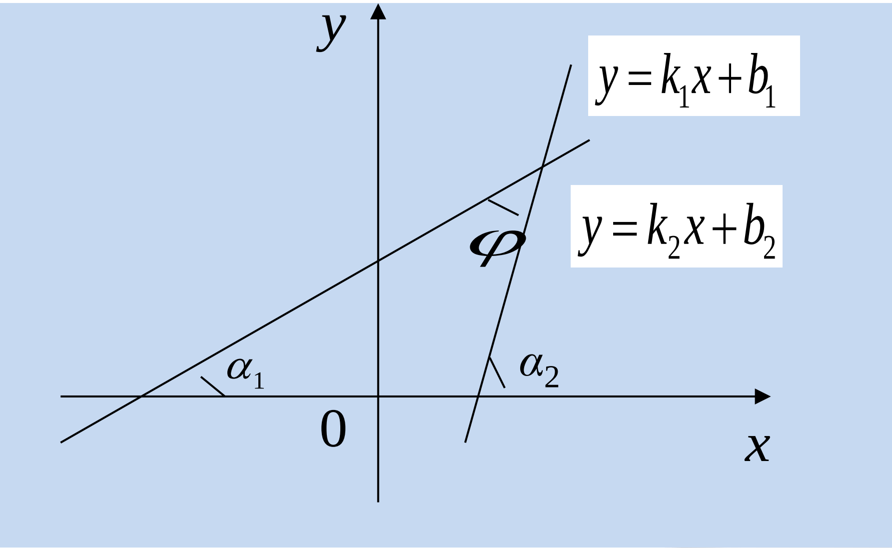
Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamalari

$y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ berilgan bo‘lsin. Bunda $k_1=tg\alpha_1$, $k_2=tg\alpha_2$

$$tg\varphi = tg(\alpha_1-\alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

Bo‘lishini e’tiborga olsak, unda

$$tg\varphi = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$$



TIQXMMI
Toshkent Irrigatsiya va Qishloq Xo'jaligini Mexanizatsiyalash Muhandislari Intituti

Мисол: $y = -2x + 3,$ $y = 3x + 6$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish:

Ushbu formuladan foydalanamiz $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$

Tenglamalarda $k_1 = -2, k_2 = 3,$ u holda $tg\varphi = \dfrac{3 - (-2)}{1 + 3 \cdot (-2)} = \dfrac{5}{-5} = -1.$

Bundan esa $\varphi = arctg(tg\varphi) = arctg(-1) = -\dfrac{\pi}{4}.$ ekanligi kelib chiqadi.

"-" belgisi birinchi to'g'ri chiziqdan ikkinchisiga qarab hisoblash soat yo'nalishi bo'yicha amalga oshirilganligini bildiradi.

Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik hamda perpendikulyarlik sharti

Ikki to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakning tangensi

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

Agar ikki to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak $\varphi=0$ bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo’ladi yoki ustma-ust tushadi, ya’ni

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = 0$$ bolib, unda $k_1=k_2$ bo’ladi.

Agar ikki to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi

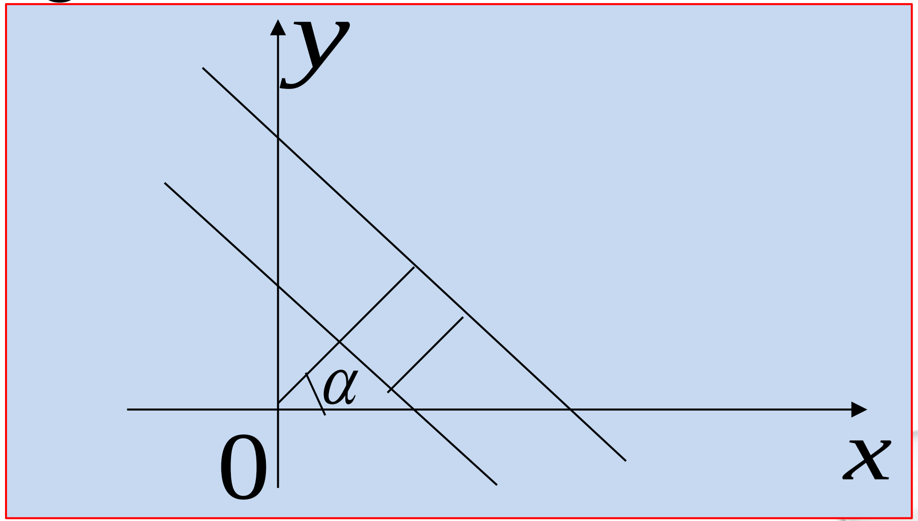
$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = tg\frac{\pi}{2} = \infty$$ bolib, unda 1+ $k_1=k_2$ y′ani $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha masofa

Tekislikda biror $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziq va bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmagan biror $M=M(x_0, y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin.

$$d=|M_0N|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (1)$$

$Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqni normal ko‘rinishdagi tenglamaga keltiramiz. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\rho=0$



Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofani topish formulasi

$d=x_0\cos x\alpha+y_0\sin\alpha-\rho$ (2)

TIQXMMI
Toshkent Irrigatsiya va Qishloq Xo'jaligini

Misol: $M(1;-4)$ nuqtadan $y=\frac{4}{3}x-4.$ to‘g‘ri chiziqgacha masofani toping.

Yechish:

$$d=|M_0N|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ formuladan foydalanamiz.

Yuqoridagi tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$3y=4x-12, \quad -4x+3y+12=0.$$

Bundan,

$$d=\frac{|-4\cdot 1+3\cdot(-4)+12|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}=0,8.$$ hosil bo‘ladi.

Ikkita parallel to‘g’ri chiziqlar orasidagi masofani topish

$$5x-2y+10=0 \quad \textbf{va} \quad 5x-2y+36=0$$

parallel to‘g’ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g’ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to‘g’ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topamiz: birinchi to‘g’ri chiziqda $x=4$ desak, $y=15$ bo‘lib, $A(4{,}15)$ 1-to‘g’ri chiziqdagi nuqta bo‘ladi. $A(4{,}15)$ nuqtadan ikkinchi $5x-2y+36=0$ to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofani (5) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d=\left|\frac{5\cdot 4-2\cdot 15+36}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}\right|=\frac{26}{\sqrt{29}} \quad , \quad d==\frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo‘ladi.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasi

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ tenglama orqali berilgan bo'lib u koordinatalar boshidan o'tmasin (3-rasm). To'g'ri chiziqqa OP perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini p, $0P$ perpendikulyar bilan $0x$ o'q orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. p to'g'ri chiziqning **normali** deb ataladi.

Chizmadagi $\triangle AOP$ dan

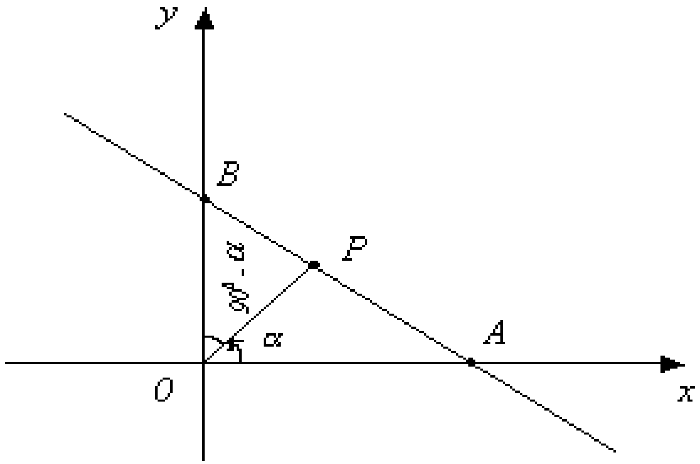
$\frac{OP}{OA}=\cos\alpha$; OA=$\frac{OP}{\cos\alpha}=\frac{p}{\cos\alpha}$;

$a=\frac{p}{\cos\alpha}$, chunki $OA=a, OP=p$.

$\triangle OBP$ dan $\frac{OP}{OB}=\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$;

OB=$\frac{p}{\sin\alpha}$; $b=\frac{p}{\sin\alpha}$

chunki $OB=b, OP=p$.



3-rasm

a va b ning ushbu qiymatlarini to'g'ri chiziqning tenglamasiga qo'ysak $\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}}=1$ yoki $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$;

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (6)$$

kelib chiqadi. (6)-**to'g'ri chiziqning normal tenglamasi** deb ataladi.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasini o'ziga xos xususiyatlaridan biri undagi $p>0$ va $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ bo'ladi.

To’gri chiziq tenglamasini normal ko’rinishiga keltirish

To’g’ri chiziq umumiy ko’rinishidagi tenglamasi Ax+By+C=0 (6) yordamida berilgan bo’lsin. Shu tenglamani (6) ko’rinishdagi normal tenglamaga keltirish mumkinligini ko’rsatamiz. Shu maqsadda (10) tenglamani shunday o’zgarmas son M ga ko’paytiramizki natijada

$$MAx+MBy+MC=0 \qquad (7)$$

to’g’ri chiziqning normal tenglamasi bo’lsin. Buni normal tenglama (6) bilan taqqoslab $M\cdot A=\cos\alpha,\ M\cdot B=\sin\alpha,\ M\cdot C=-p \quad (\beta)$ ekaniga iqror bo’lamiz. Oxirgi tenglamadan M, α, p noma‘lumlarni aniqlash qiyin emas. U yerdagi birinchi ikkita tenglamani kvadratga ko’tarib hadlab qo’shsak

$$M^2A^2+M^2B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1; \quad M^2(A^2+B^2)=1; \quad M^2=\frac{1}{A^2+B^2}$$

bo'lib bundan $$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (8)$$

kelib chiqadi. M ni **normallovchi ko'paytuvchi** deb ataladi. (8) da ishora ozod had C ning ishorasiga qarama-qarshi olinadi. M ning topilgan qiymatini (β) ga qo'yib $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ va p larni aniqlash mumkin:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \; \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Shunday qilib koordinatalar boshidan Ax+By+C=0 to'g'ri chiziqqacha masofa $$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (9)$$

formula yordamida topilar ekan.

1-misol. $6x+8y-5=0$ to'g'ri chiziq tenglamasi normal ko'rinishda yozilsin.

Yechish. $A=6$, $B=8$, $C=-5$. Normallovchi ko'paytuvchi:

$$M=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}\quad (C<0).$$

Berilgan tenglamani bunga ko'paytirsak

$\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-\frac{5}{10}=0$ yoki $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0$ normal tenglama hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq uchun $p=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

TIQXMMI
Toshkent Irrigatsiya va Qishloq Xo'jaligini

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.,
7.Соатов Ё., Олий математика. Т., “Ўзбекистон”. 1996 й, 3 жилд
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E‘TIBORLARINGIZ UCHUN RAXMAT

☎ + 998 71 237 09 86