Комплексные числа. Действия над комплексными числами.

Цели занятия:

Образовательные:

- формировать навыки выполнения алгебраических действий над комплексными числами;
- актуализировать, обобщить и систематизировать знания, умения и навыки студентов о комплексных числах.

Развивающие:

- развивать мыслительную деятельность студентов на занятии посредством разнообразия форм заданий;
- способствовать формированию навыков самостоятельной работы и работы в мини-группах;
- развивать интерес к дисциплине через включение в план занятия исторического материала и практических заданий.

Воспитательные:

- воспитывать у студентов чувство личной ответственности за достижение положительных результатов при самостоятельной работе и в группе.

После изучения темы «Комплексные числа учащиеся должны:

Знать:

▪алгебраическую, геометрическую и тригонометрическую формы комплексного числа.

Уметь:

•производить над комплексными числами операции сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексного числа;

•переводить комплексные числа из алгебраической формы в геометрическую и тригонометрическую;

•пользоваться геометрической интерпретацией комплексных чисел;

•в простейших случаях находить комплексные корни уравнений с действительными коэффициентами.

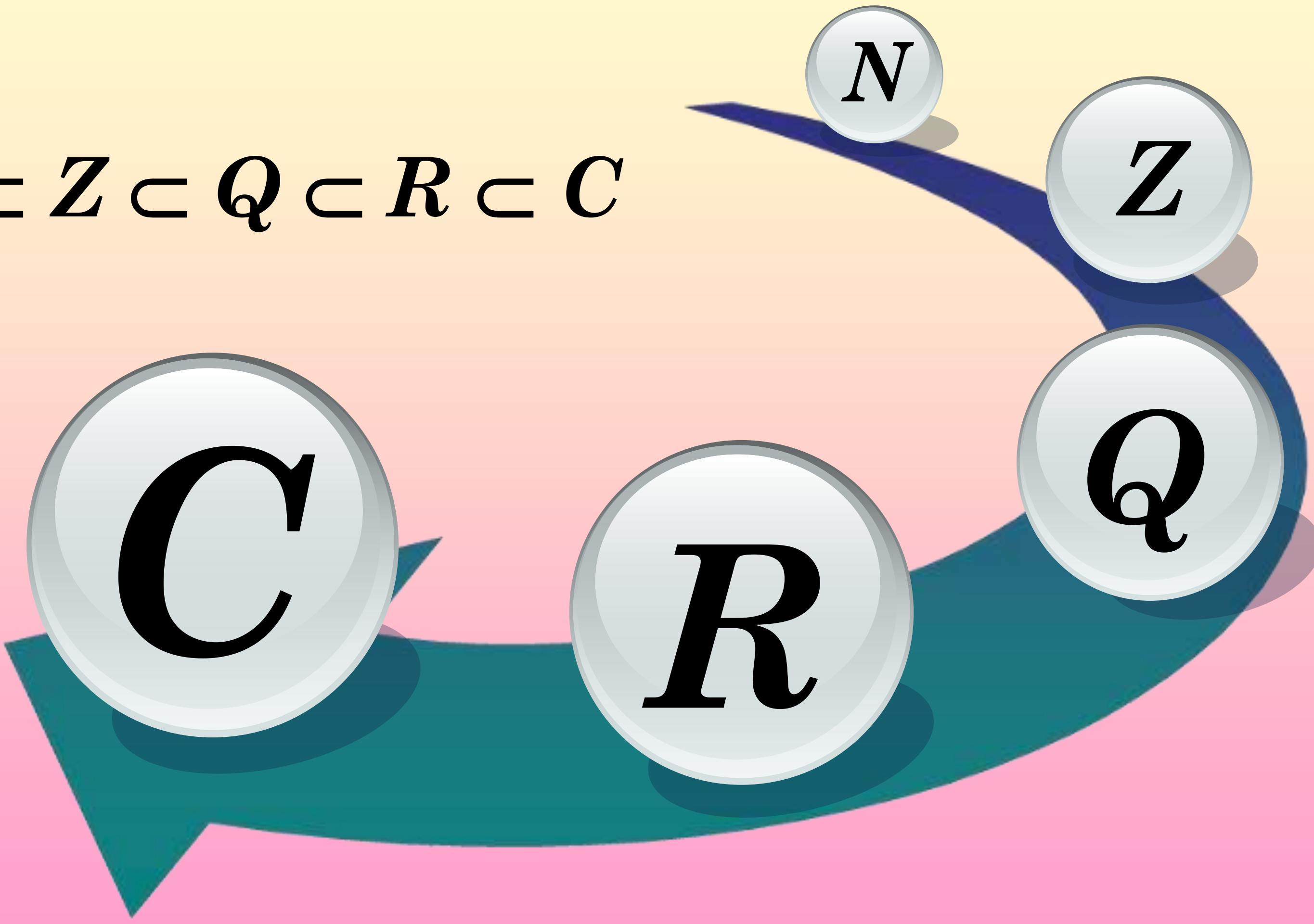
Установите соответствие

1) Натуральные числа
2) Целые числа
3) Рациональные числа
4) Действительные числа
5) Иррациональные числа

1) Z
2) R
3) N
4) Q
5) I

Множества чисел

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$



Назовите лишнее число в каждой строке. Ответ обоснуйте

1) 1,2(3); 2,455…; 3,1415…; 7,282828…

2) 45; 34; -111; 3,7; 280; -18

3) $\frac{1}{3}; \frac{4}{9}; \sqrt{\frac{3}{7}}; \sqrt{\frac{9}{16}}$

Расположите числа в порядке возрастания

7 $6{,}5$ $\sqrt{40}$ $5{,}5$ $\sqrt{45}$ $\sqrt{30}$ $5{,}69$

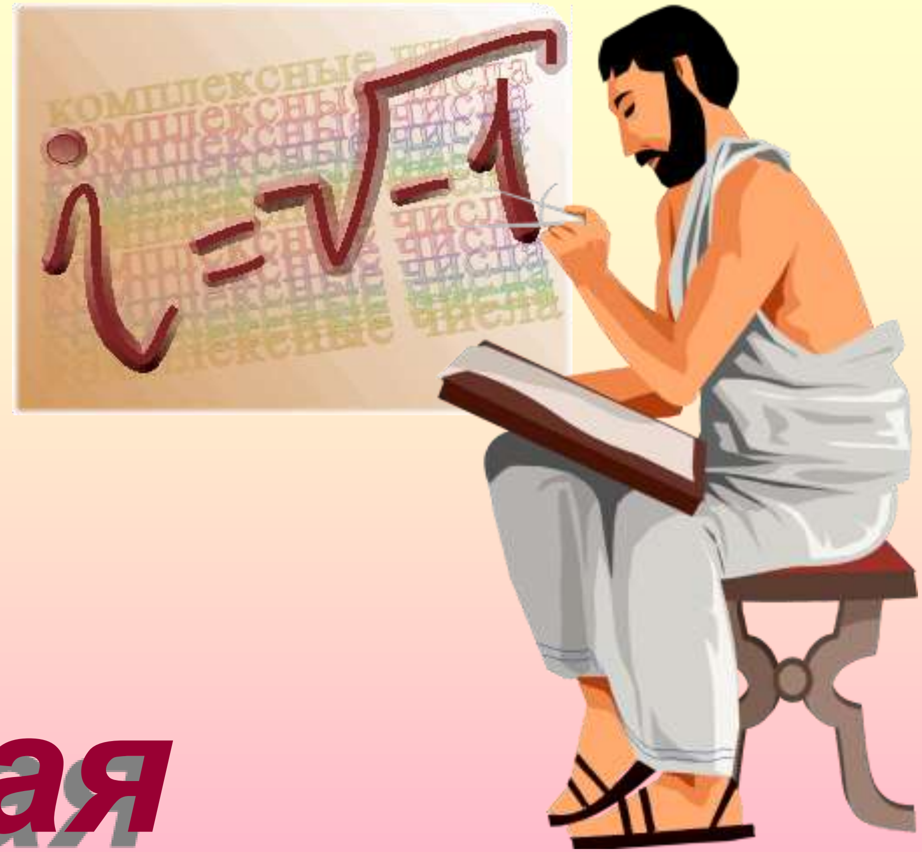
1 2 3 4 5 6 7

Верно ли решены примеры?

1. $-8+(-3)=11$
2. $48:(-6)=-8$
3. $-3\cdot(-7)=-21$
4. $3+(-7)=4$
5. $-6-10=-16$
6. $17+(-21)=-2$
7. $-9\cdot3=27$
8. $-6:(-3)=-2$

1. $-8+(-3)=-11$
2. верно
3. $-3\cdot(-7)=21$
4. $3+(-7)=-4$
5. верно
6. $17+(-21)=-4$
7. $-9\cdot3=-27$
8. $-6:(-3)=2$

Содержание:



1. Мнимая единица

Допустим, что существует такое число, квадрат которого равен **(– 1)**.

Обозначим это число буквой ***i*****.**

Тогда можно записать: $\boldsymbol{i^2 = -1}$**.**

Число ***i*** – называется ***мнимой единицей***.

Из равенства $\boldsymbol{i^2 = -1}$ находим $\boxed{i = \sqrt{-1}}$. Введение мнимой единицы позволяет нам теперь извлекать квадратные корни из отрицательных чисел.

Например:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$$

Вычислите:

$$\sqrt{-900}$$

$$\sqrt{-81}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}}$$

Пример. Решите уравнение:

$x^2 – 6x + 13 = 0$

Решение. Найдем дискриминант по формуле
$D = b^2 – 4ac$.
Так как $a = 1$, $b = – 6$, $c = 13$, то
$D = (– 6)2 – 4×1×13 = 36 – 52 = – 16;$

Корни уравнения находим по формулам

$$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$$

$$x_1 = \frac{6 - 4i}{2} \qquad x_2 = \frac{6 + 4i}{2}$$

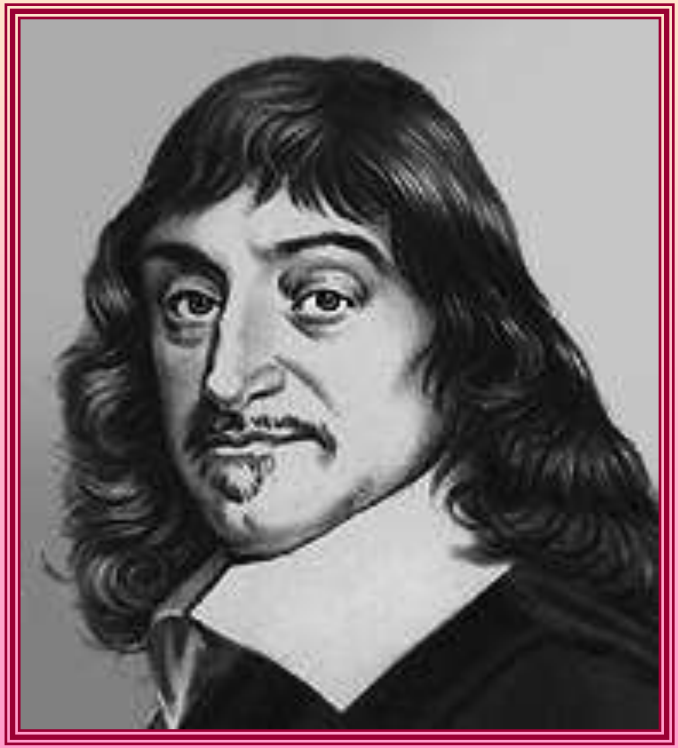
Решите уравнение:

$$1.\ 9x^2+12x+29=0$$

$$2.\ x^2-4x+13=0$$

$$3.\ x^2+3x+4=0$$

в 1637 году



Название

“мнимые числа”

ввёл французский математик и философ

Р. Декарт

Степени мнимой единицы

$$i^1 = \boxed{i} \qquad i^2 = \boxed{-1;}$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = \boxed{-i}$$

$$i^4 = i^3 i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = \boxed{1;}$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = \boxed{i}$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = \boxed{-1}$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = \boxed{-i}$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = \boxed{1}$$

Значения степеней повторяются с периодом, равным 4.

1. *Если показатель степени делится на 4 без остатка, то значение равно **1**.*
2. *Если показатель степени делится на 4 с остатком **1**, то значение равно **i**.*
3. *Если показатель степени делится на 4 с остатком **2**, то значение равно **-1**.*
4. *Если показатель степени делится на 4 с остатком **3**, то значение равно **-i**.*

Найдем: $i^{28};\ i^{33};\ i^{135}.$

Решение.

$$i, -1, -i, 1,$$

$$i, -1, -i, 1 \text{ и т. д.}$$

Имеем, **28 = 4×7** (нет остатка);

33 = 4×8 + 1;

135 = 4×33 + 3.

Соответственно получим

$$\boxed{i^{28} = 1; i^{33} = i; i^{135} = -i.}$$

Вычислите:

$$i^{66}$$

$$-1$$

$$i^{143}$$

$$-i$$

$$i^{216}$$

$$1$$

$$i^{43}+i^{48}+i^{44}$$

$$2-i$$

$$(i^{13}+i^{14}+i^{15})\cdot i^{32}$$

$$-1$$

Комплексные числа

Определение 1. Числа вида $a + bi$,

где a и b – действительные числа,

i – мнимая единица,

называются *комплексными*.

a - *действительная часть* комплексного числа,

bi – *мнимая часть* комплексного числа,

b – *коэффициентом при мнимой части*.

Обозначение - Z

Свойство:

Два комплексных числа называются равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице.

$$a + bi = c + di, \text{ если}$$

$$a = c \text{ и } b = d.$$

Найти x и y из равенства:

$$3y + 5xi = 15 - 7i$$

Решение:

$3y = 15$; $5x = -7$

$y = 5$; $x = -7/5$

Решите уравнение:

а) $7x + 5i = 1 - 10iy$ $x = 1/7$ $y = -1/2$

б) $5x + 3iy = 25 - 12i$ $x = 5$ $y = -4$

в) $7x - 2i = 9 + 5iy$ $x = 9/7$ $y = -2/5$

Действия над комплексными числами.

Сложение

$$(a+b\boldsymbol{i})+(c+d\boldsymbol{i})=(a+c)+(b+d)\boldsymbol{i}$$

Вычитание

$$(a+b\boldsymbol{i})-(c+d\boldsymbol{i})=(a-c)+(b-d)\boldsymbol{i}$$

Выполните действия:

$z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 5 – 7i.$

Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 – z_2$;

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 – 7i) =$

$= (2 + 5) + (3i – 7i) = 7 – 4i;$

б) $z_1 – z_2 = (2 + 3i) – (5 – 7i) =$

$= (2 – 5) + (3i + 7i) = – 3 + 10i;$

Выполните действие

1. $(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3i + 1i) = 7 + 4i;$

2. $(-2 + 3i) - (1 - 8i) = (-2 - 1) + (3i + 8i) =$

$-3 + 11i;$

3. $(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3i - 3i) =$

$-1 + 0i = -1.$

Умножение

$$(a+b\mathbf{i})(c+d\mathbf{i}) =$$

$$= ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd\mathbf{i}^2$$

Учитывая

$\mathbf{i}^2 = -1$

Выполните действия:

$$(2 + 3i)(5 - 7i) =$$

$$= (10-14i + 15i-21i^2) = 10+i+21 =$$

$$= 31+i$$

Учитывая

$i^2 = -1$

$$(5 + 3i)(5 - 3i) =$$

$$(2 - 7i)^2 =$$

Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

$$z_1 = a + b\mathbf{i} \text{ и } z_2 = a - b\mathbf{i}$$

Например:

$$z_1 = 2 + 3\mathbf{i} \text{ и } z_2 = 2 - 3\mathbf{i}$$

Деление комплексных чисел.

- Чтобы выполнить деление, необходимо умножить делимое и делитель на число сопряжённое делителю.

Деление

$$\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{(2+3i)\cdot(5+7i)}{(5-7i)\cdot(5+7i)}$$

$$=\frac{-11+29i}{74}=\boxed{-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i}$$

В настоящее время

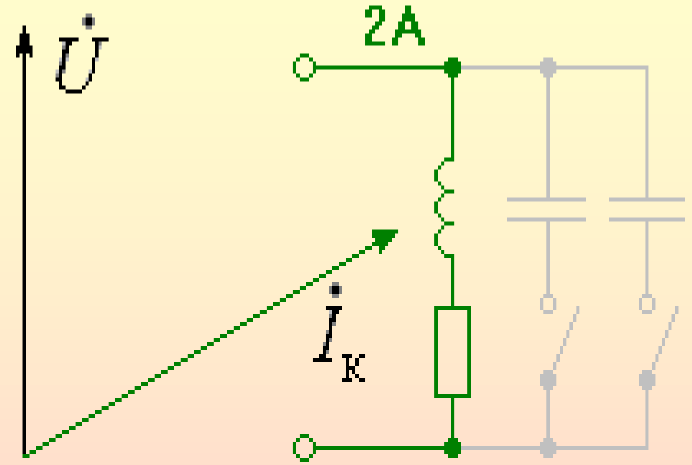
комплексные числа

используются

в математике

гораздо шире, чем

действительные



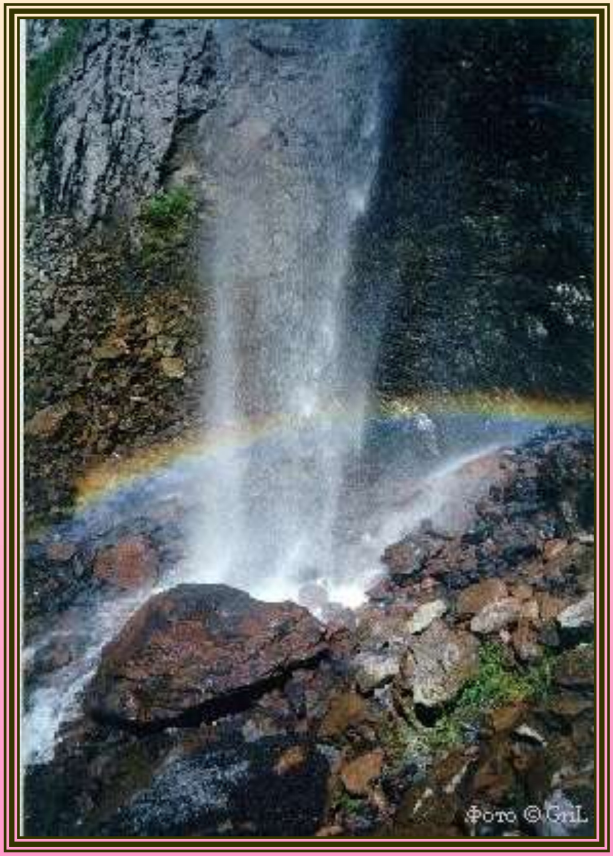
Комплексные числа имеют прикладное значение во многих областях науки, являются основным аппаратом для расчетов в электротехнике и связи.

Применяются
при
конструировании

ракет и самолетов

При вычерчивании **географических карт**

В исследовании



течения воды,

а также

во многих

других науках.

Пример .

Найти ***x*** *и* ***y*** *из равенства:*

$$\mathbf{3}\boldsymbol{y} + \mathbf{5}\boldsymbol{xi} = \mathbf{15} - \mathbf{7}i;$$

Решение.

Согласно условию равенства комплексных чисел имеем

$3y = 15$, $5x = -7$.

Отсюда $$\boxed{x = -\frac{7}{5}, y = 5.}$$

Выполните действия:

$$1).(3-2i)\cdot(7-i)$$

$$2.(2+3i)^2$$

$$3.(2+5i)(2-5i)$$

$$4.\frac{3+5i}{2+6i}$$

Выполните действия:

$$5.\ \frac{3+2i}{1-5i}$$

$$6.\ (2-7i)^2$$

$$7.\ (1-3i)(1+3i)$$

Выполните действия:

$$\frac{(2+3i)+(4-i)}{1-i}+4i^{27}$$

$$\frac{6+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}-4i=\frac{4+8i}{2}-4i=$$

$$=\mathbf{2}$$

Домашняя работа

1) $(i^{63}+i^{17}+i^{13}+i^{82})(i^{72}-i^{34})$;

2) Найти x и y из равенства:

$$(2x + 3y) + (x - y)i = 7 + 6i.$$

3) $$\frac{6+2i}{3-7i} - \frac{2+3i}{2+5i} + (1-i)^3 - i^{123}$$