УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

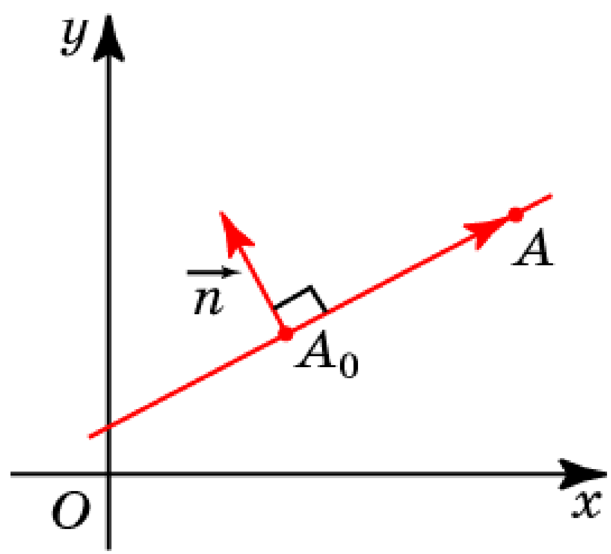
Автор:Сапарбаева Дилбар

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Теорема. Прямая на плоскости задается уравнением

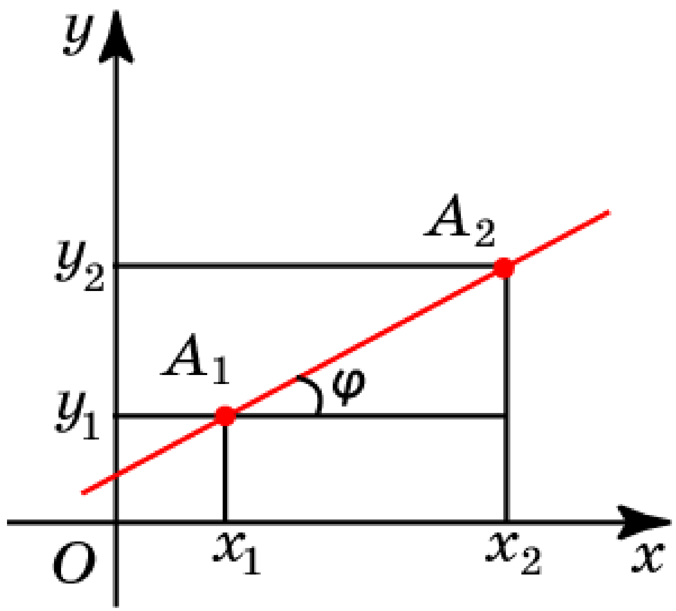
$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c - некоторые числа, причем a, b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой прямой и называемого вектором нормали.



УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ

Если число b в уравнении прямой не равно нулю, то, разделив на b, это уравнение можно привести к виду $y = kx + l$. Коэффициент k называется угловым коэффициентом этой прямой. Он равен тангенсу угла φ, который образует прямая с осью абсцисс.



ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Две прямые, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, параллельны, если векторы их нормалей одинаково или противоположно направлены, т.е. для их координат (a_1,b_1), (a_2,b_2) для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$. При этом, если $c_2=tc_1$, то уравнения определяют одну и ту же прямую. Если же $c_2 \neq tc_1$, то эти уравнения определяют параллельные прямые.

Если две прямые пересекаются, то угол между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1\,(a_1, b_1)$, $\vec{n}_2\,(a_2, b_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

ПРИМЕР 1

Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями: $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$.

Решение: Векторы нормалей к данным прямым имеют координаты (1, 2) и (2, -1) соответственно. Их скалярное произведение равно нулю и, следовательно, эти векторы перпендикулярны. Значит, угол между данными прямыми равен 90^{o}.

ПРИМЕР 2

Найдите уравнение прямой, проходящей через заданные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

Решение: Найдем вектор нормали к данной прямой. Он перпендикулярен вектору $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Следовательно, в качестве такого вектора можно взять вектор с координатами $(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$. Искомым уравнением прямой будет уравнение

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0,$$

которое можно также переписать в виде

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

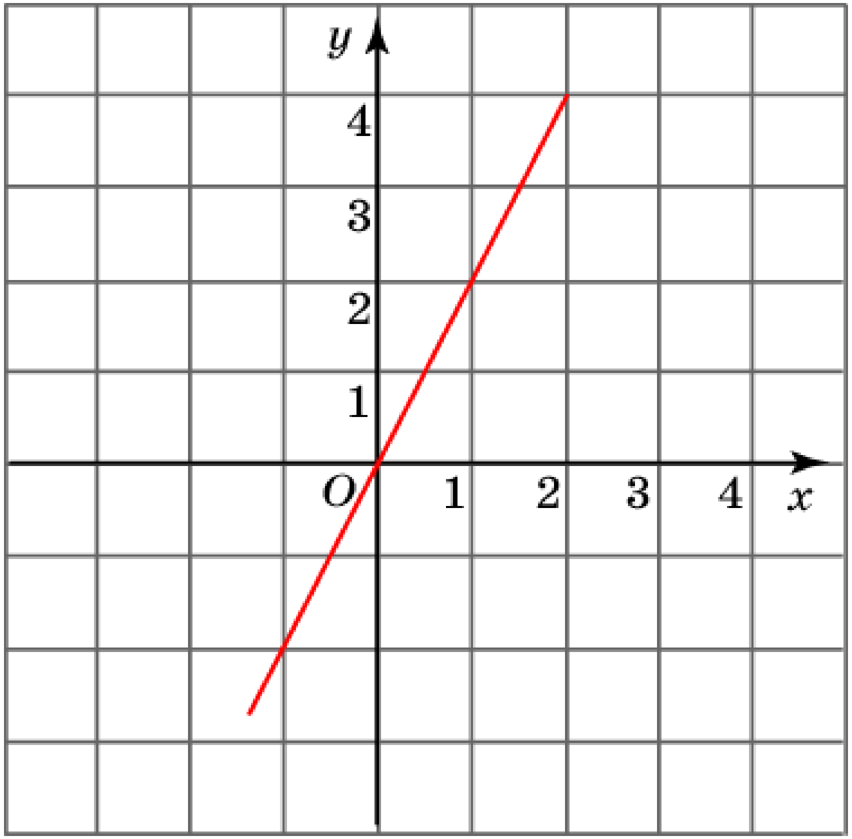
УПРАЖНЕНИЕ 1

Какие уравнения имеют координатные прямые: а) Ox; б) Oy?

Ответ: а) $y = 0$; б) $x = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 2

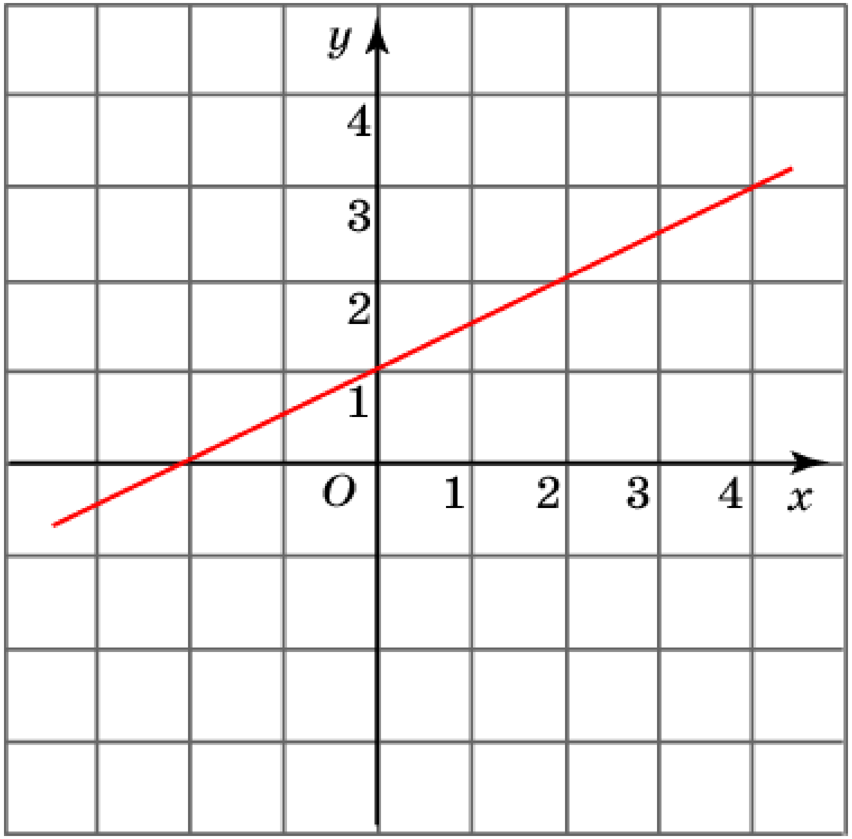
Изобразите прямую, заданную уравнением $y = 2x$.



Ответ:

УПРАЖНЕНИЕ 3

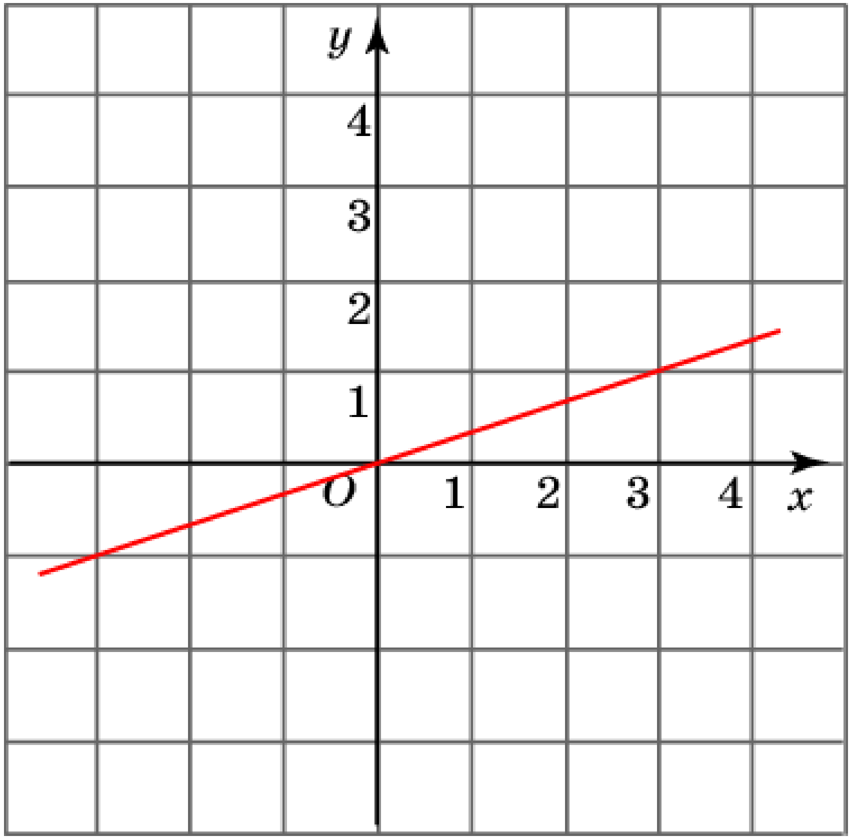
Изобразите прямую, заданную уравнением $x - 2y + 2 = 0$.



Ответ: (1, -2).

УПРАЖНЕНИЕ 4

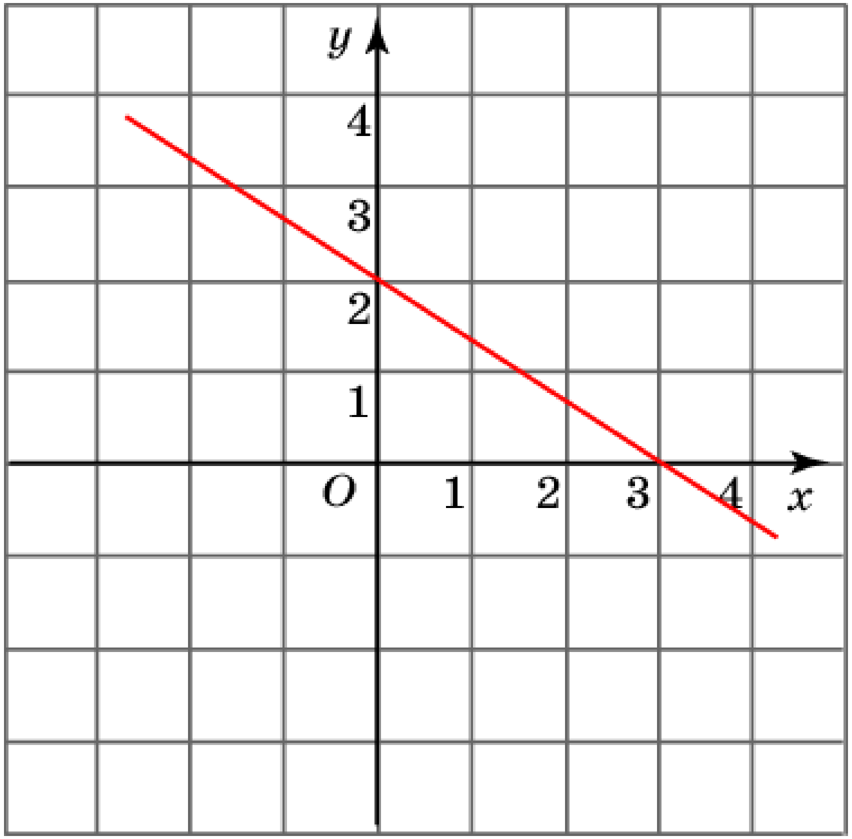
Напишите уравнение прямой, изображенной на рисунке.



Ответ: $x - 3y = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 5

Напишите уравнение прямой, изображенной на рисунке.



Ответ: $2x + 3y = 6$.

Упражнение 6

Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) k = 1; б) k = 2; в) k = 0,5 ; г) k = -1; д) k = -2; е) k = - 0,5 . Нарисуйте эти прямые.

Ответ: а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = 0{,}5\,x$; г) $y = -x$;

д) $y = -2x$; е) $y = -\,0{,}5x$.

УПРАЖНЕНИЕ 7

Найдите угловой коэффициент прямой: а) $2x - 3y + 4 = 0$; б) $x + 2y - 1 = 0$.

Ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) – 0,5.

УПРАЖНЕНИЕ 8

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 0)$, $B\ (0, 1)$.

Ответ: $x + y - 1 = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 9

Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(1, 2)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1)$.

Ответ: $x - y + 1 = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 10

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(3,\ -1)$, $N(4,\ 1)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

Ответ: $2x - y - 7 = 0$; $\vec{n}\ (2,\ -1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 11

Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1, -2)$ и параллельна: а) координатной прямой Ox; б) координатной прямой Oy; в) прямой $y = x$.

Ответ: а) $y = -2$; б) $x = 1$; в) $y = x – 3$.

УПРАЖНЕНИЕ 12

Точка $H(-2, 4)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Напишите уравнение этой прямой.

Ответ: $x - 2y + 10 = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 13

Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых параллельны между собой:

а) $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$;

б) $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$;

в) $-7x + y = 0$, $7x - y - 5 = 0$;

г) $2x + 4y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

Ответ: а), в).

УПРАЖНЕНИЕ 14

Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Изобразите эти прямые.

Ответ: 90^{o}.

УПРАЖНЕНИЕ 15

Найдите координаты точки пересечения прямых:

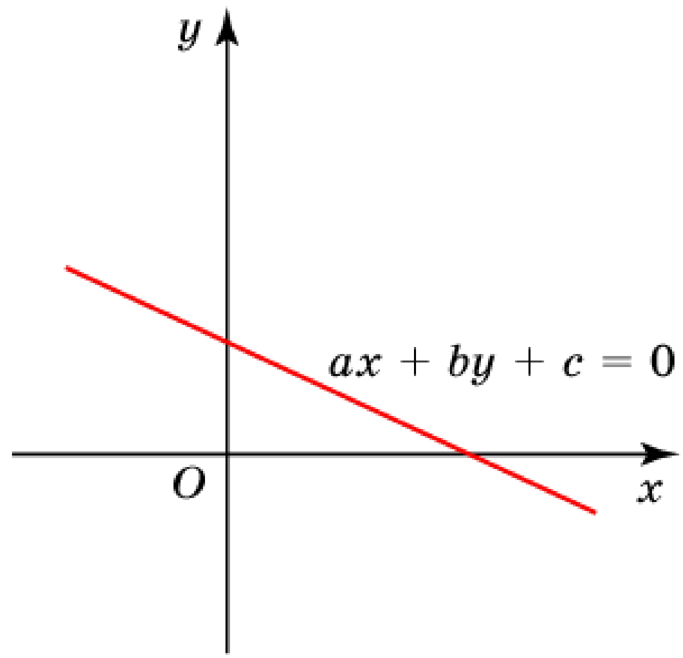
а) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$;

б) $3x - y + 2 = 0$, $5x - 2y + 1 = 0$.

Ответ: а) (-1, 2); б) (-3, -7).

УПРАЖНЕНИЕ 16*

Напишите уравнение прямой, симметричной прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат O.



Ответ: а) $ax - by + c = 0$; б) $-ax + by + c = 0$;
в) $ax + by - c = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 17*

Треугольник задан своими вершинами $A(1,\ 3)$, $B(3,\ 0)$, $C(4,\ 2)$. Найдите уравнения высот этого треугольника и координаты их точки пересечения.

Ответ: h_a: $x + 2y - 7 = 0$; h_b: $3x - y - 9 = 0$;

h_c: $2x - 3y - 2 = 0$; $H(3\frac{4}{7}, 1\frac{5}{7})$.