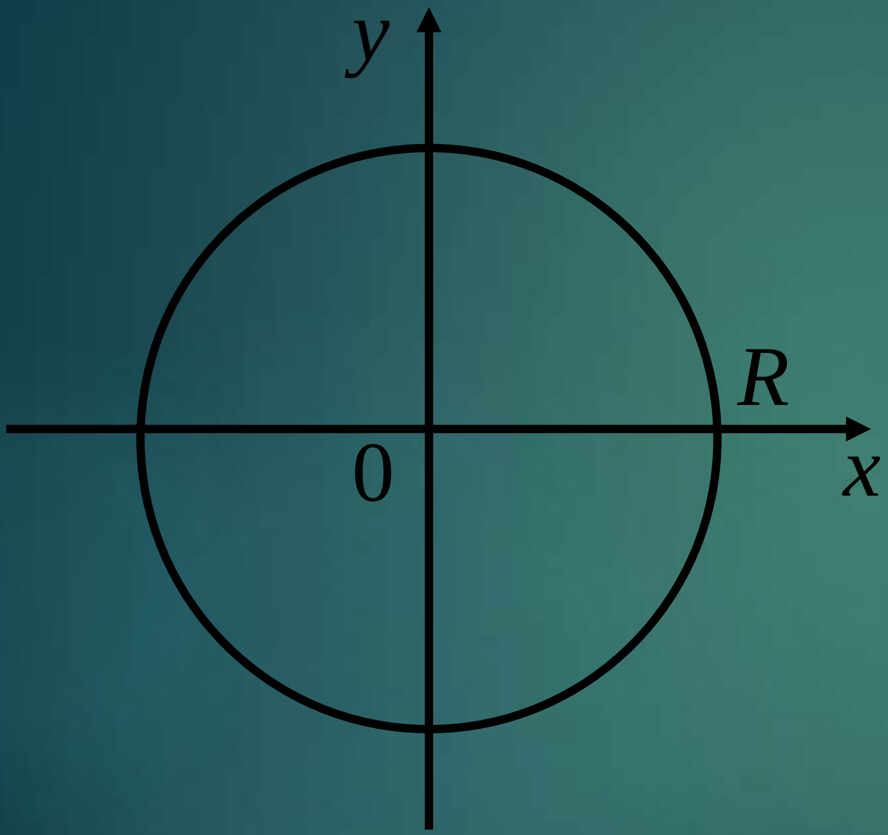
Кривые второго порядка

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.

п.1. Окружность.

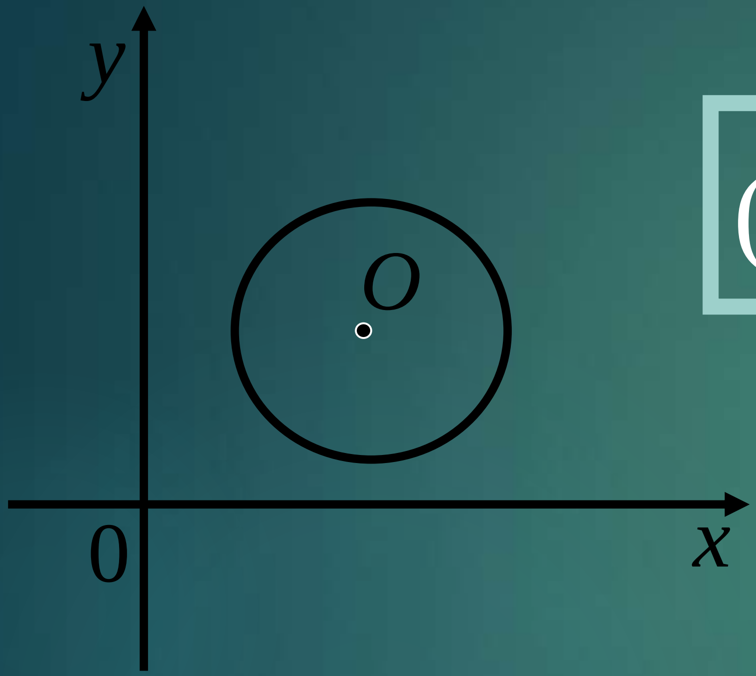
Окружность есть геометрическое множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки.

Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат



$$x^2 + y^2 = R^2$$

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O(x_0; y_0)$



$$\boxed{(x-x_0)^2 + ?\,(y-y_0)^2 = R^2}$$

п.2. Эллипс.

Эллипс есть геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,} \qquad a \geq b > 0.$$

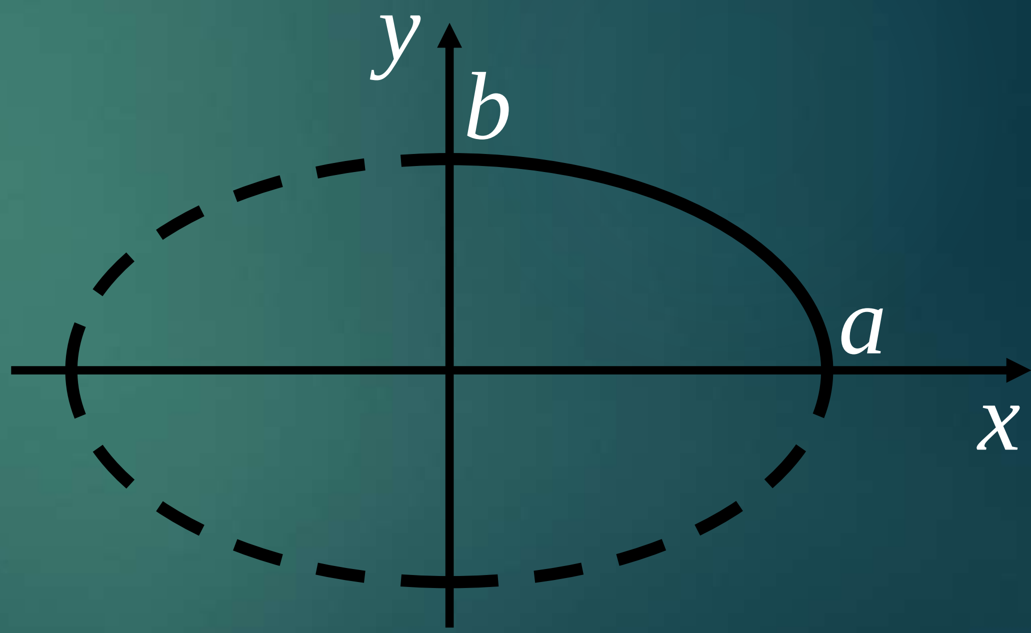
Свойства эллипса

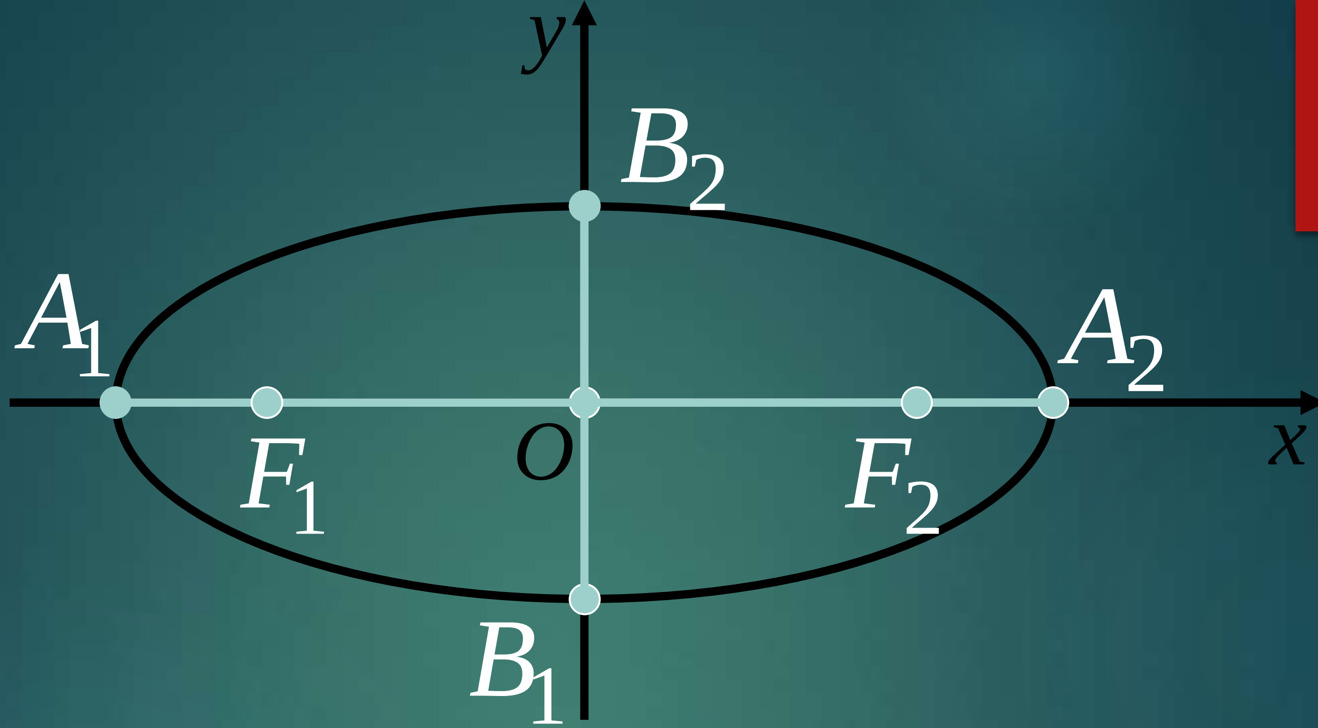
1.Симметрия относительно осей координат и начала координат.

2. $|x| \leq a, |y| \leq b.$

3. I-я четверть:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$





Большая ось: $2a$.

Большая полуось: a

Фокусы: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$,

Вершины: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$,

Малая ось: $2b$.

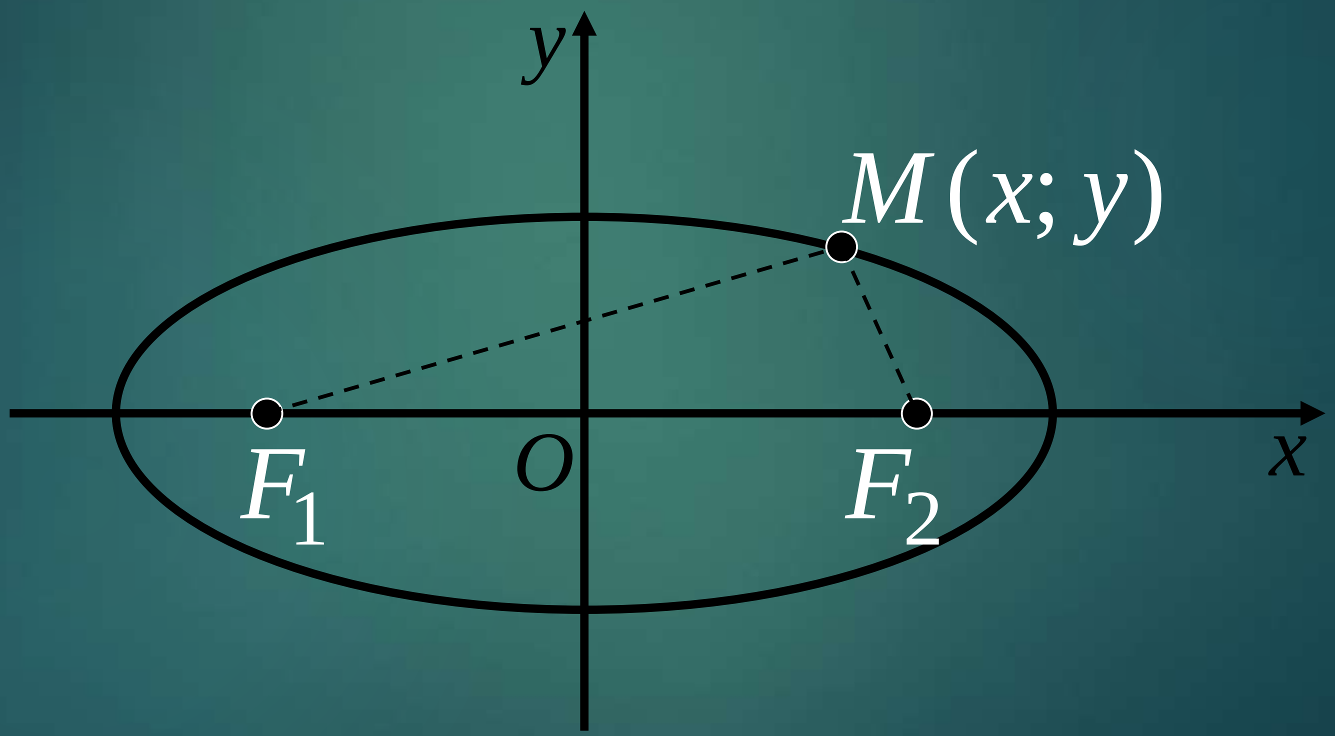
Малая полуось: b

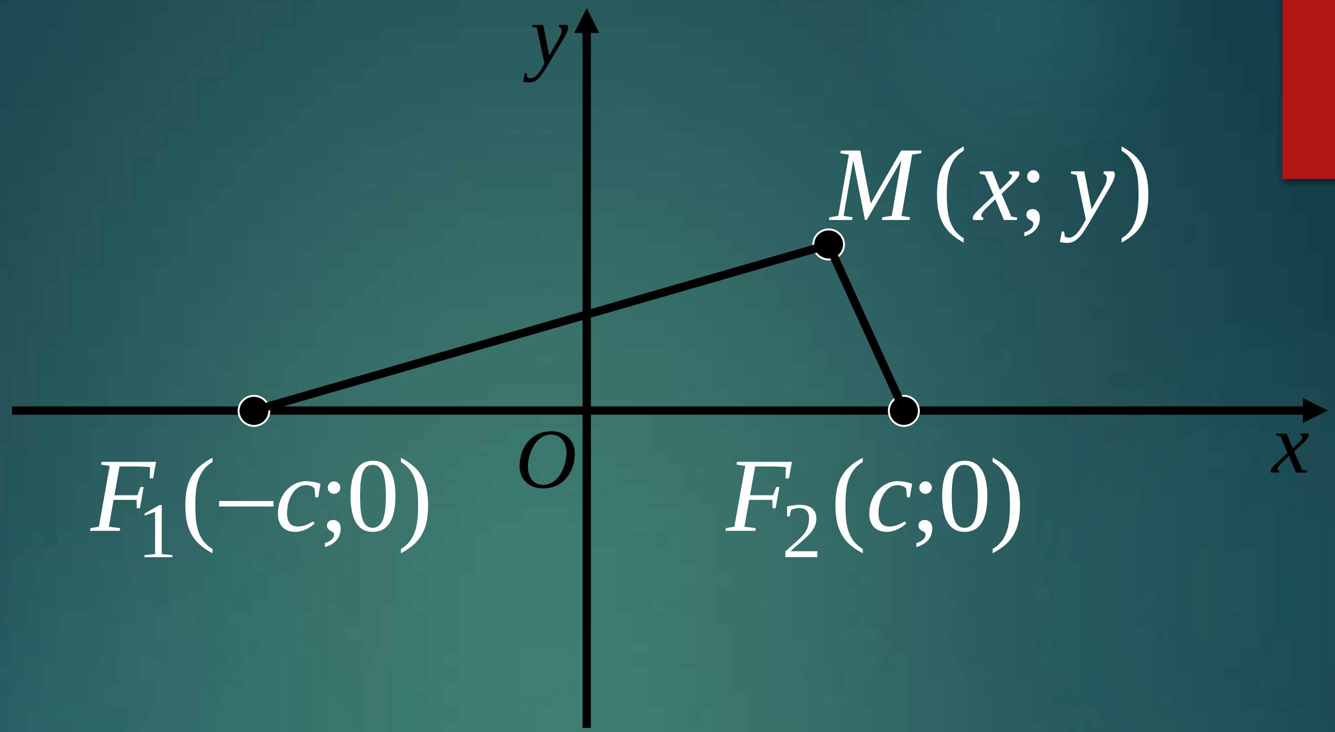
$B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

$c^2 = a^2 - b^2$, $0 \le c < a$

Центр эллипса: $O(0;0)$.

Теорема 1. Точка M плоскости принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда сумма расстояний от фокусов F_1 и F_2 до точки M равна $2a$.





$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\qquad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть точка $M(x;y)$ лежит на эллипсе.

Покажем, что $MF_1 + MF_2 = 2a$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2=$$

$$=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$MF_1=\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=$$

$$c^2=a^2-b^2 \qquad\qquad y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$=\sqrt{x^2+2cx+a^2-\cancel{b^2}+\cancel{b^2}-\frac{b^2x^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+2cx+a^2}=$$

$$= \sqrt{x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x\frac{c}{a} + a\right)^2} = \left|x\frac{c}{a} + a\right| = a + x\frac{c}{a}$$

$$MF_1 = a + x\frac{c}{a}$$

$$MF_2 = a - x\frac{c}{a}$$

Самостоятельно

$$MF_1 + MF_2 = a + x\frac{c}{a} + a - x\frac{c}{a} = 2a$$

Достаточность.

Пусть $$MF_1 + MF_2 = 2a$$

Покажем, что точка $M(x; y)$ лежит на эллипсе.

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} + \underline{2cx} + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - \underline{2cx} + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(a^2 - cx\right)^2$$

$$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\underline{a^2x^2} - \cancel{2a^2cx} + \underline{\underline{a^2c^2}} + a^2y^2 = \underline{\underline{a^4}} - \cancel{2a^2cx} + \underline{c^2x^2}$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2 y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - c^2 = b^2$$

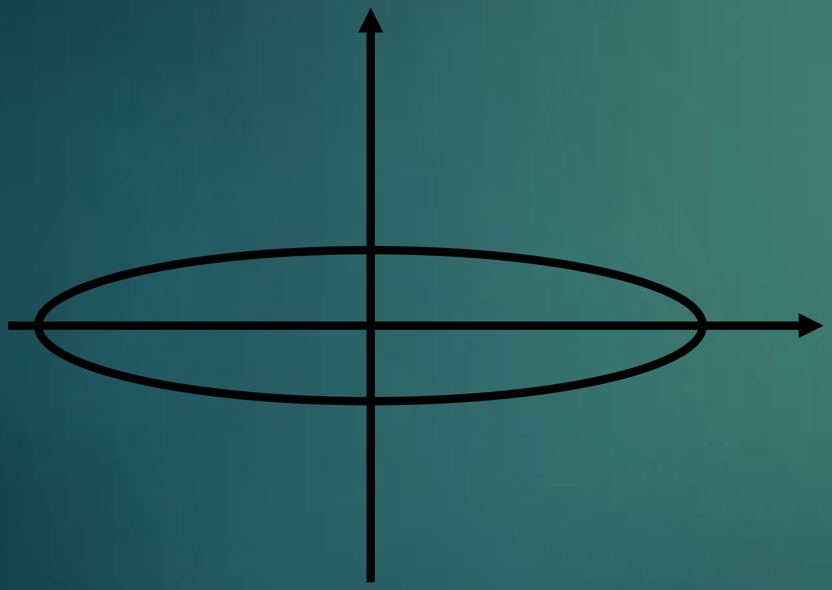
$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{b^2 x^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

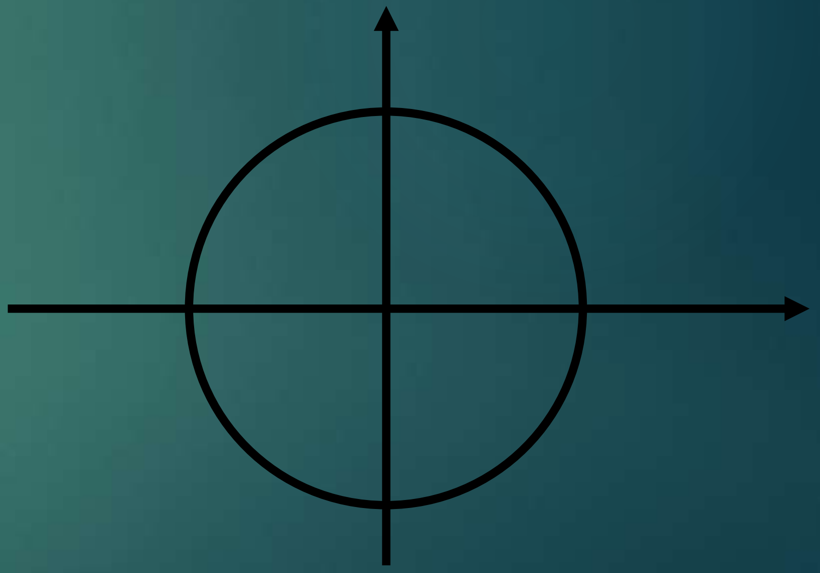
Теорема доказана.

$\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1}$ – *эксцентриситет* эллипса

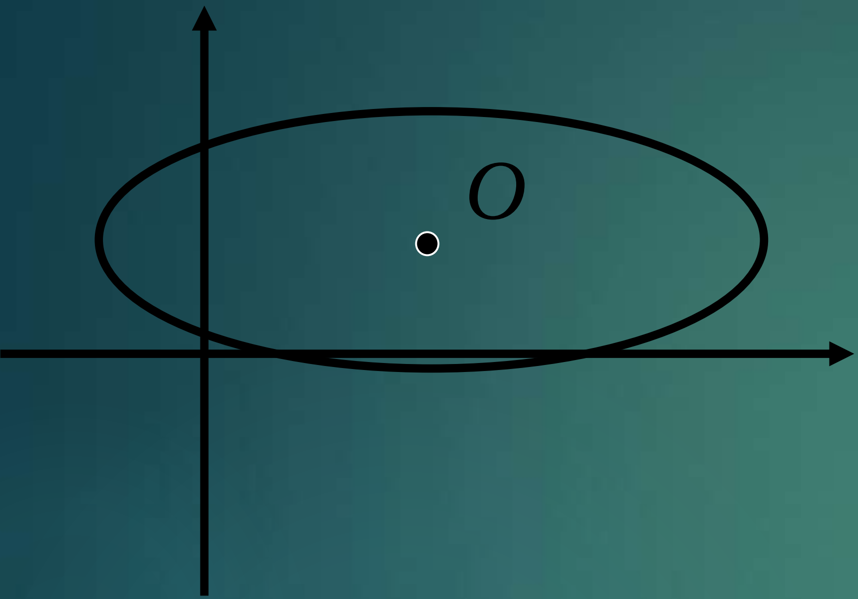
$\varepsilon \to 1$



$\varepsilon \to 0 \Rightarrow b \to a$

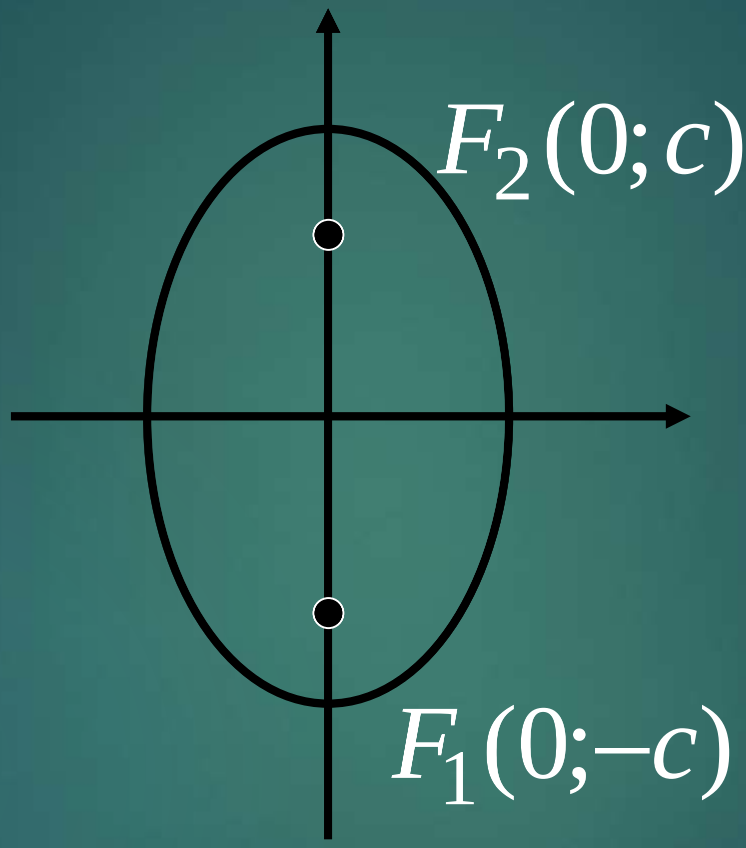


Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0;y_0)$



$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

$$a < b$$

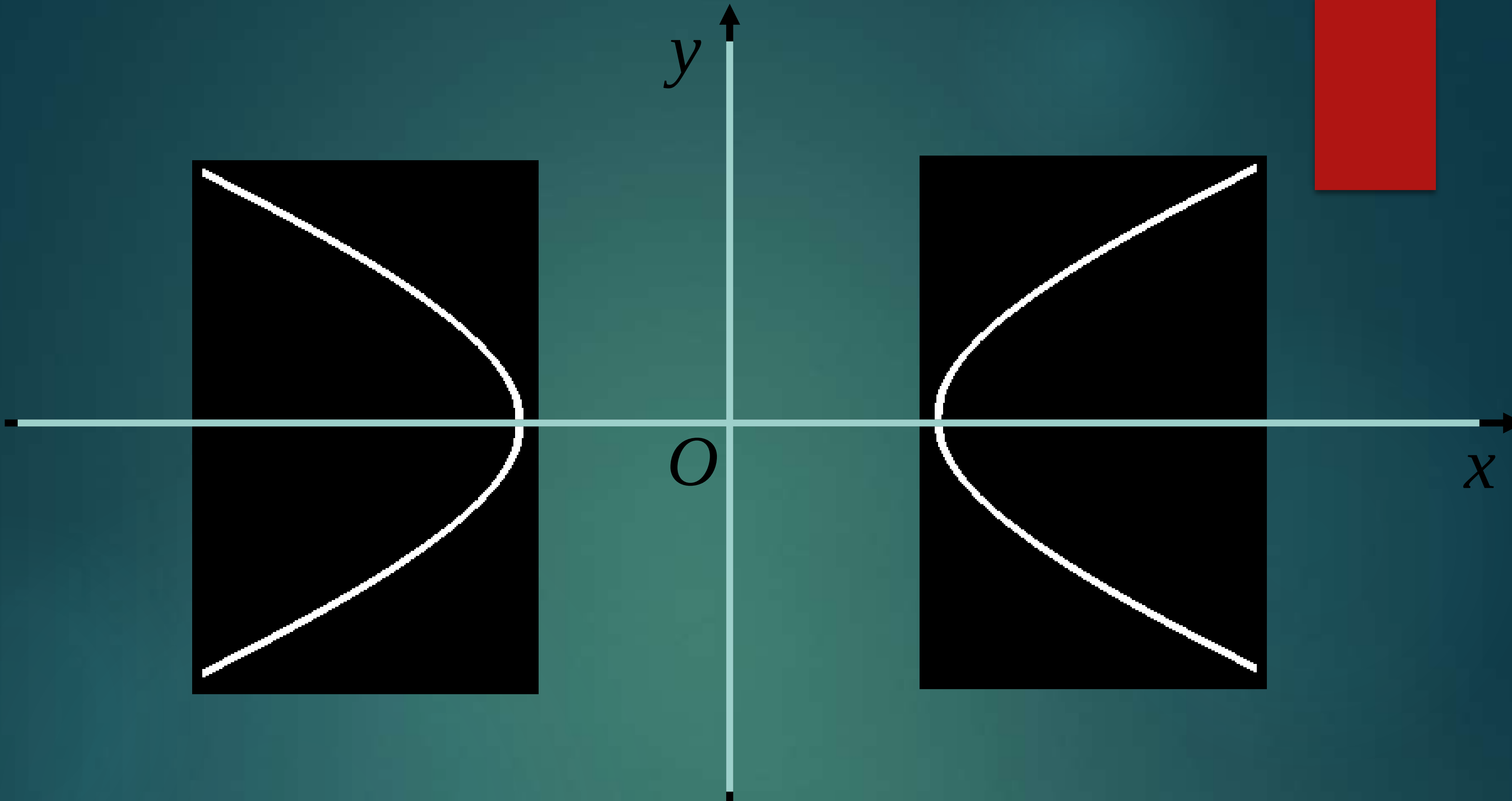


$$c^2 = b^2 - a^2$$

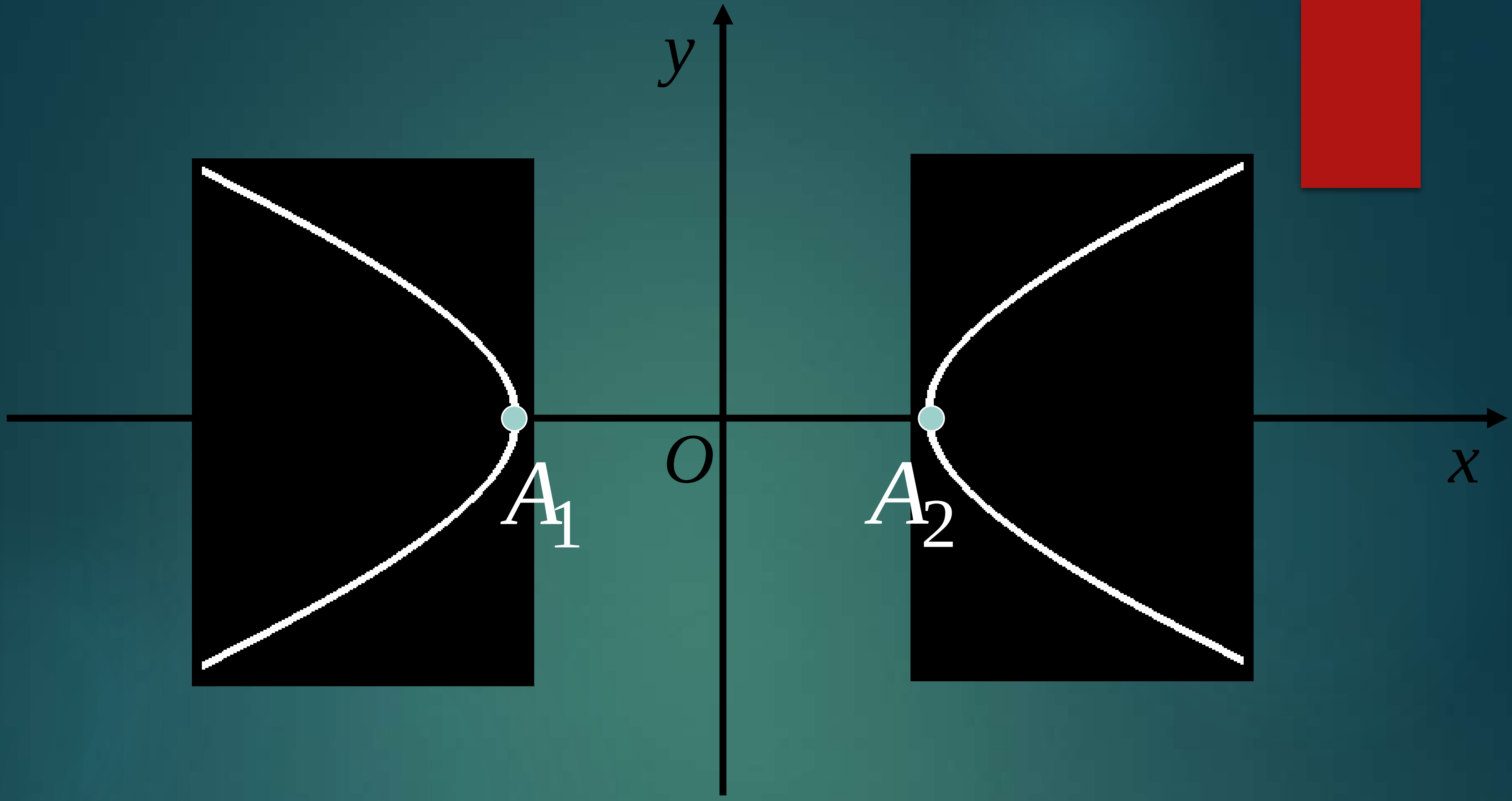
п.3. Гипербола.

Гипербола есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

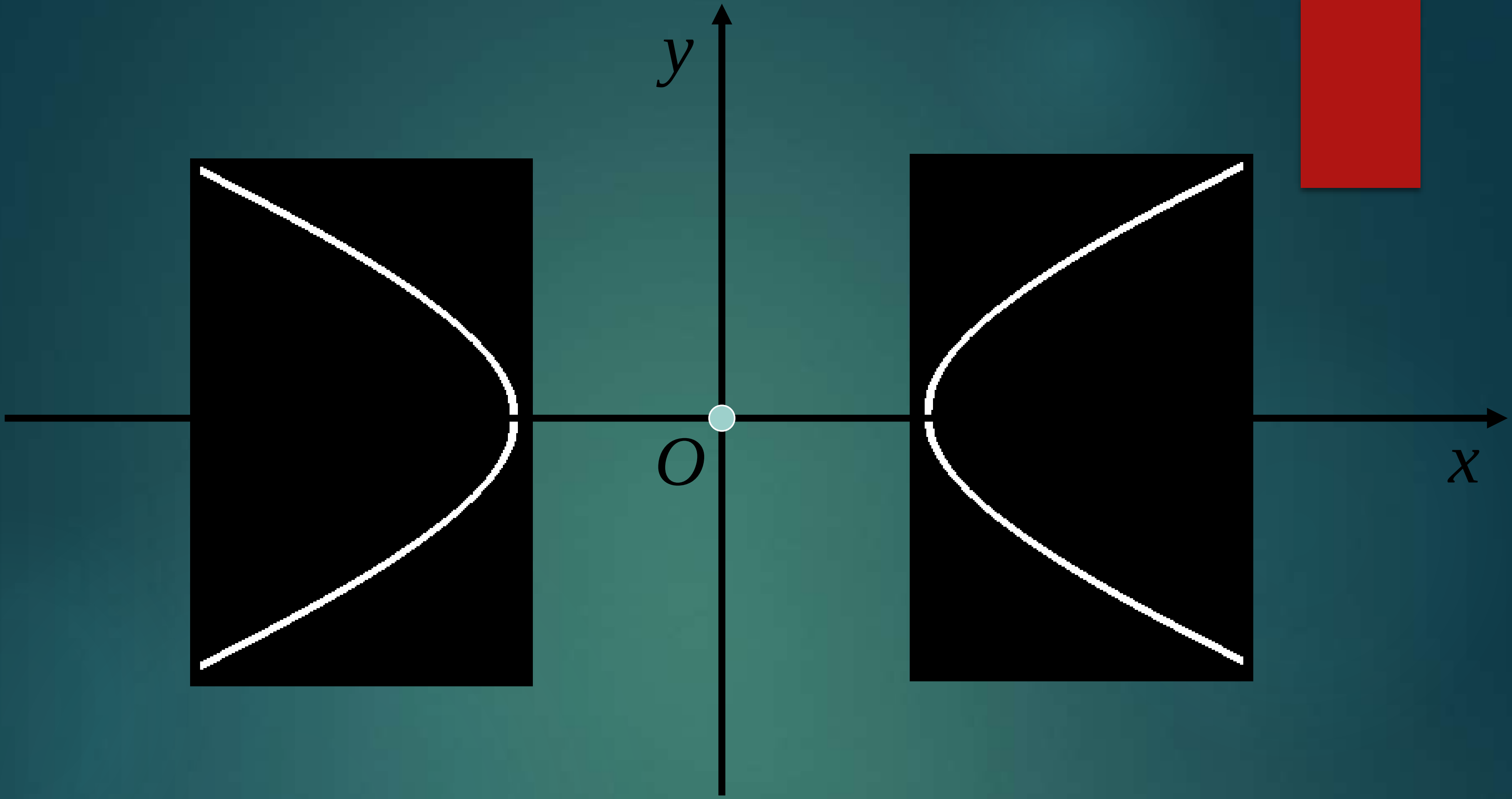
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \qquad a, b > 0.$$



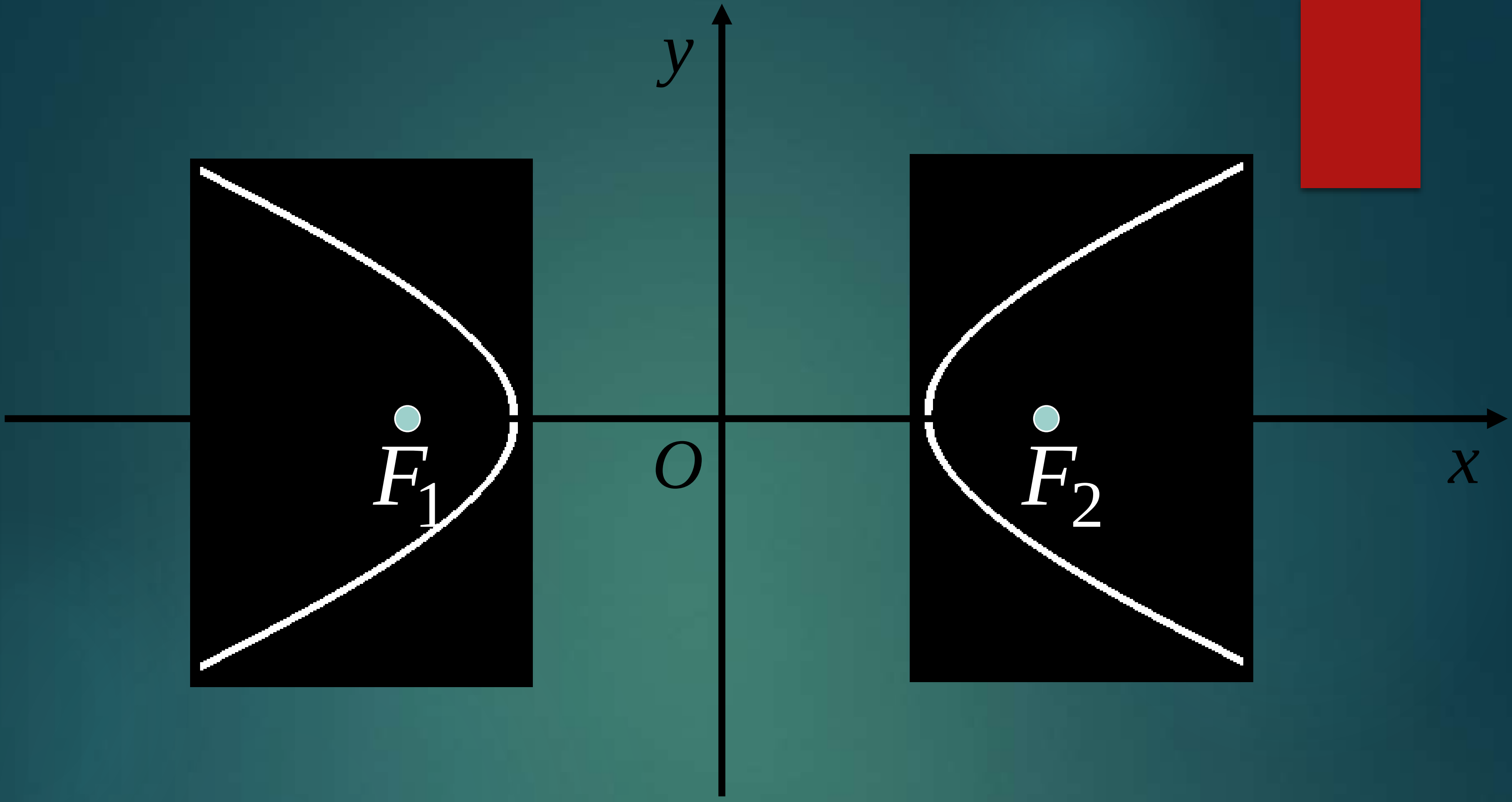
Оси гиперболы: действительная, мнимая.



Вершины гиперболы: $A_1(-a;0)$ $A_2(a;0)$

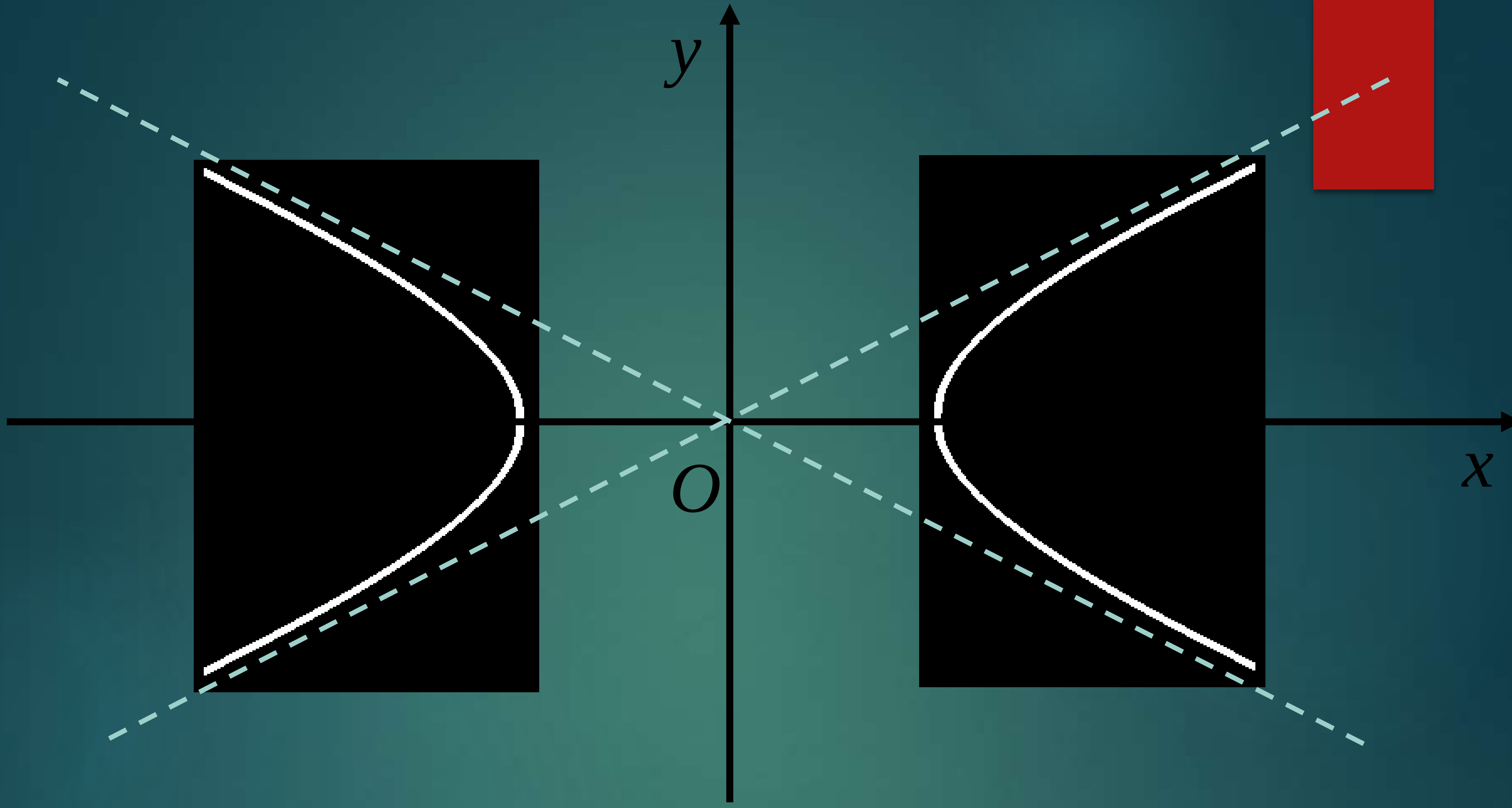


Центр гиперболы: $O(0;0)$

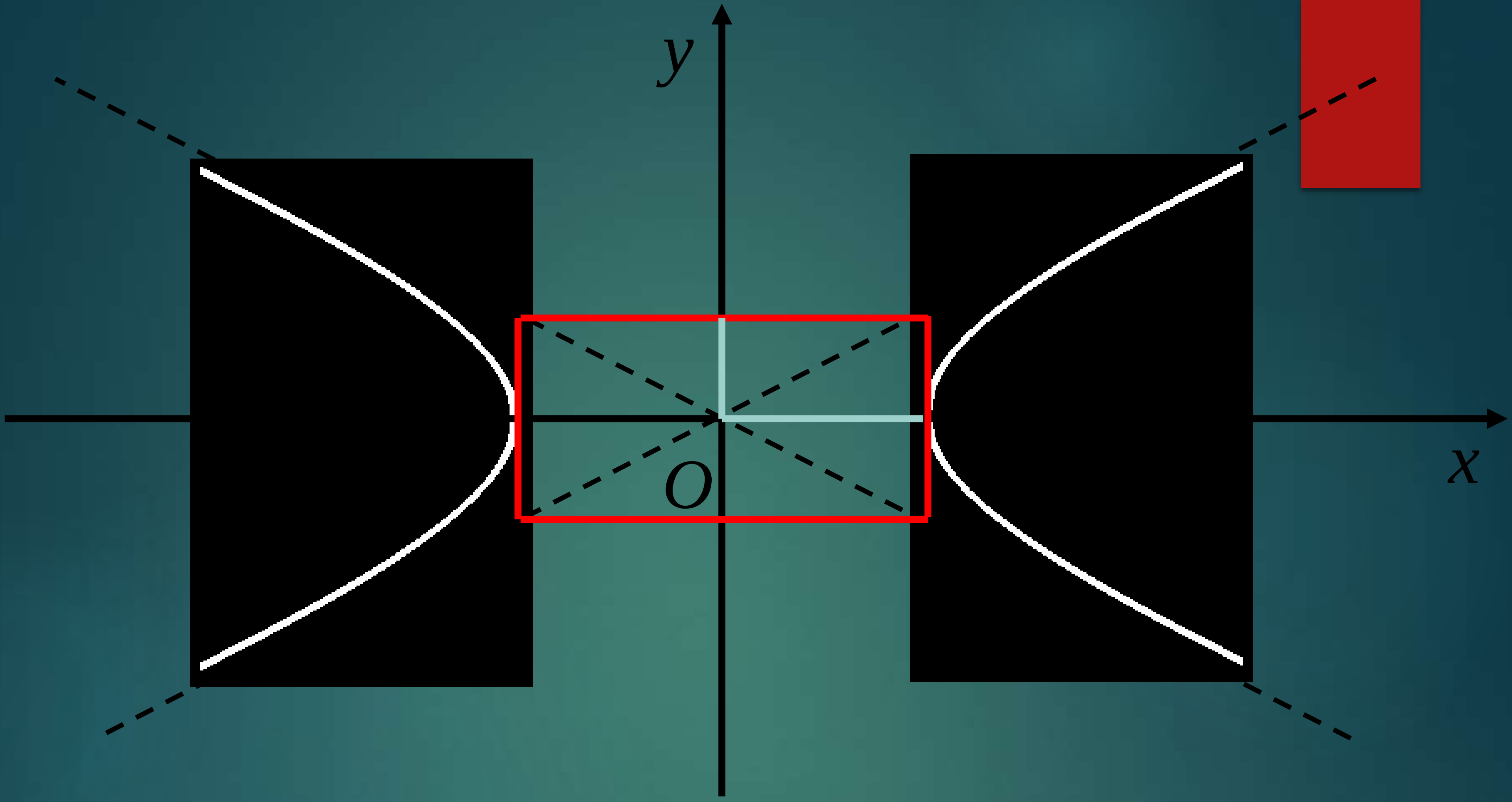


Фокусы гиперболы: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0),$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

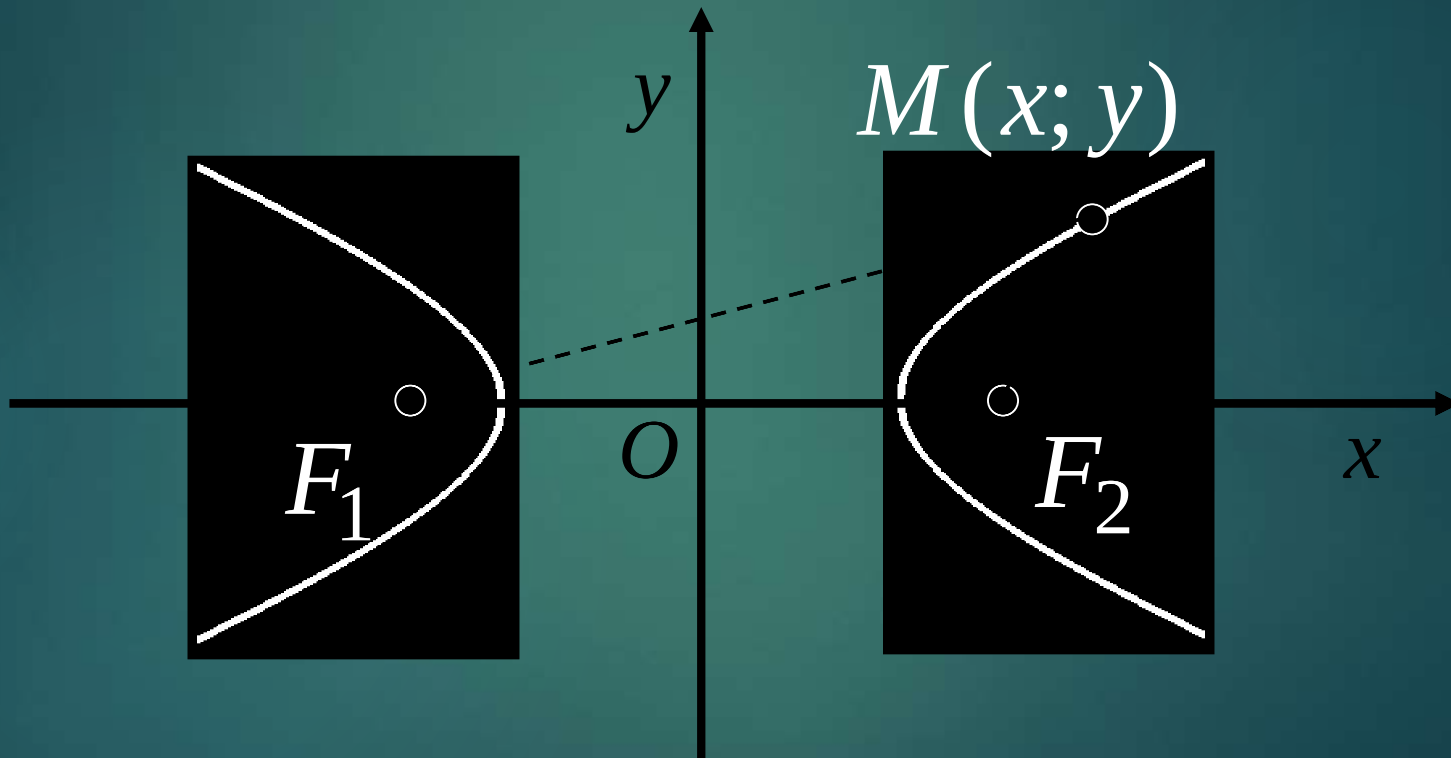


Асимптоты гиперболы: $y = \pm \dfrac{b}{a} x.$



Полуоси гиперболы: $a,\ b.$

Теорема 2. Точка M плоскости принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда абсолютная величина разности расстояний от фокусов F_1 и F_2 до точки M равна $2a$.



Доказательство самостоятельно.

Свойства гиперболы

1. Симметрия относительно осей координат и начала координат.

2. Не пересекает ось Oy.

3. $|x| \geq a.$

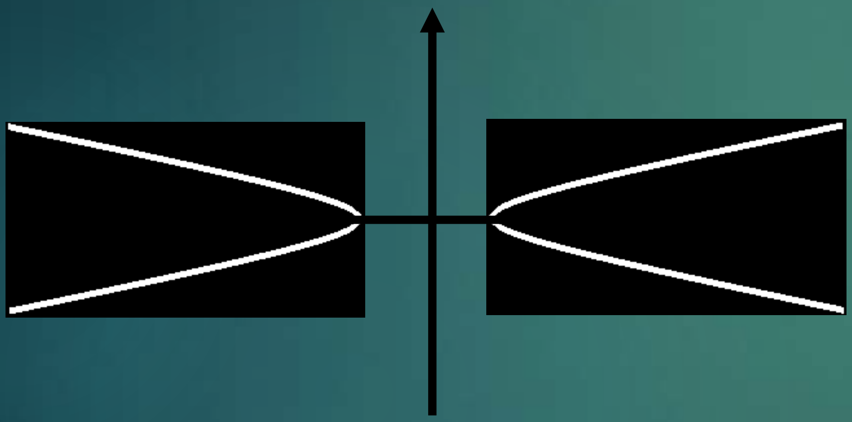
4. $a < c.$

5. $a = b$ – равнобочная гипербола.

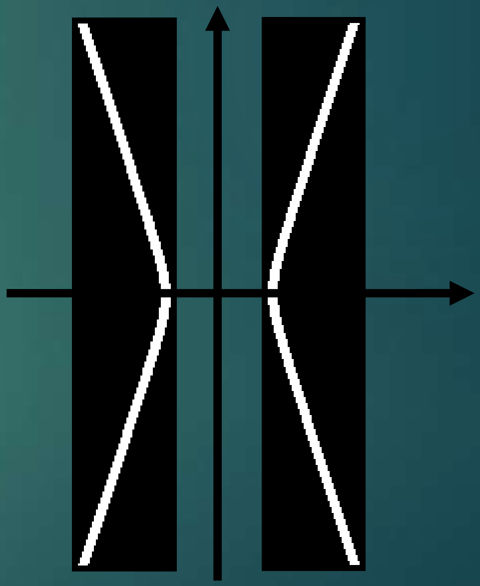
6. График гиперболы насколько угодно близко приближается к асимптотам.

$\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1}$ – *эксцентриситет* гиперболы

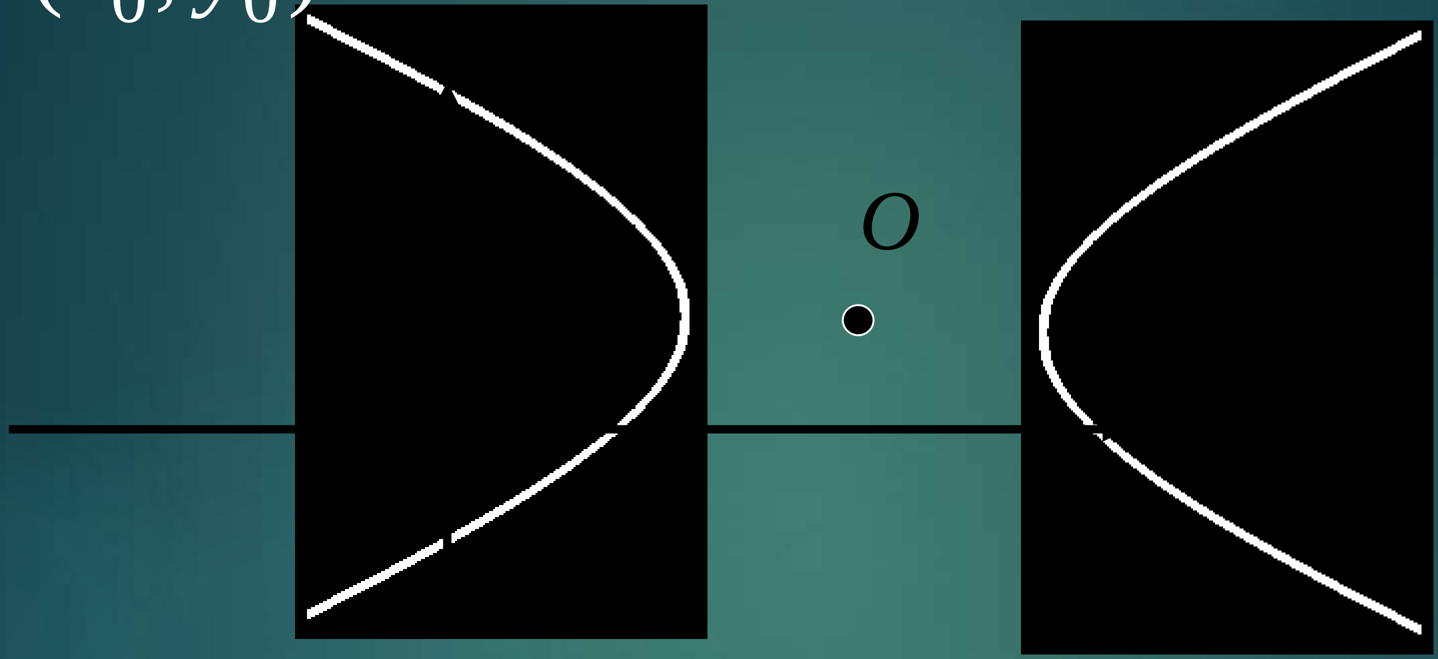
$\varepsilon \to 1$



$\varepsilon \to \infty$

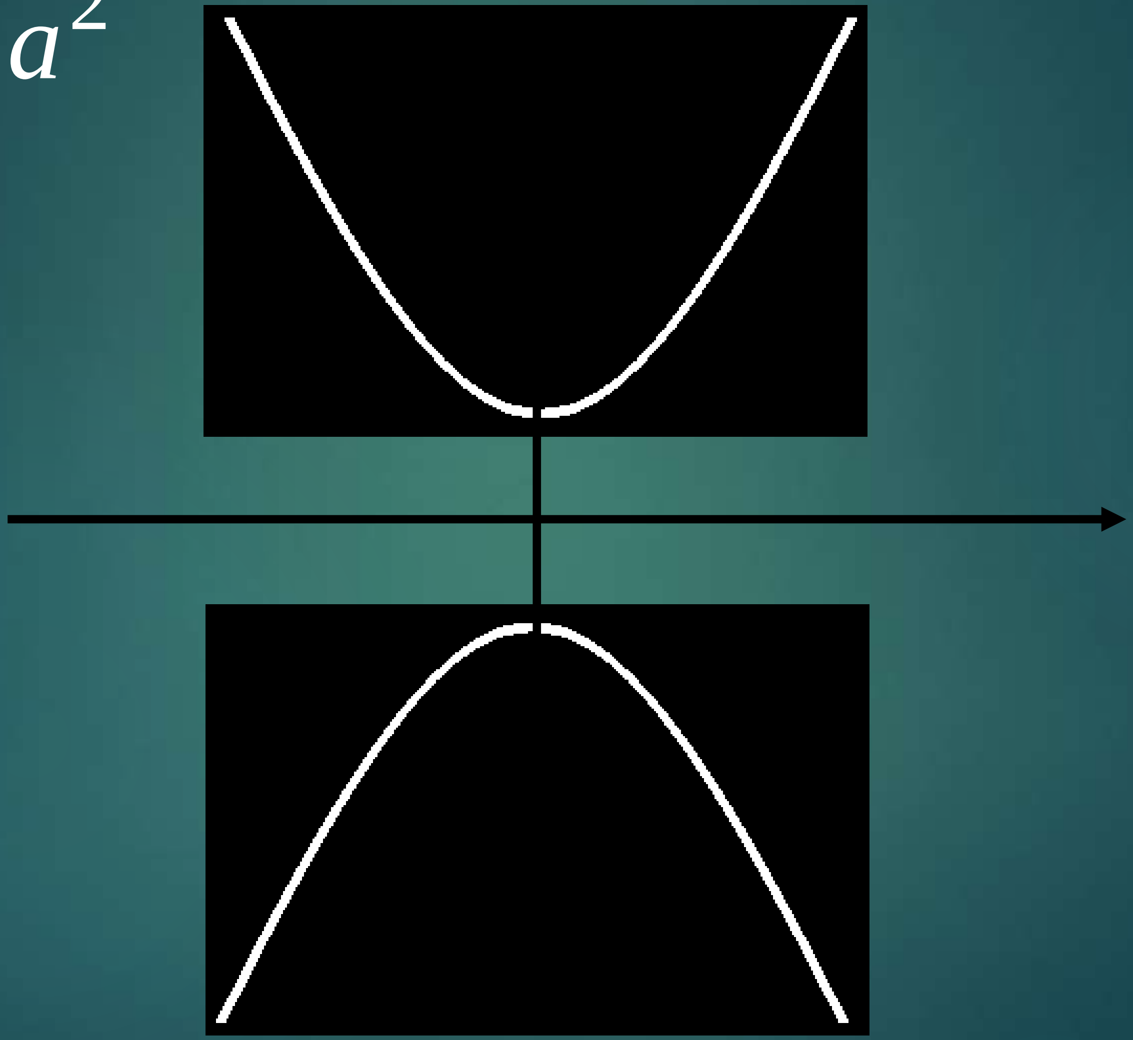


Уравнение гиперболы с центром в точке $O(x_0; y_0)$.



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

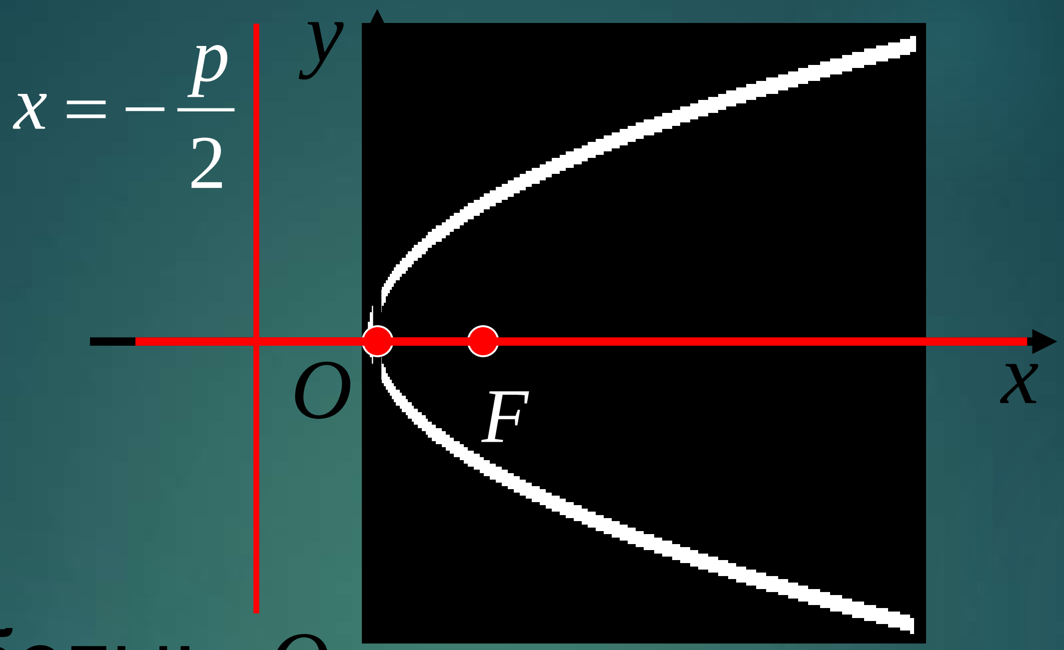
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$ – сопряженная гипербола



п.4. Парабола.

Парабола есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\boxed{y^2 = 2px,} \qquad p > 0.$$



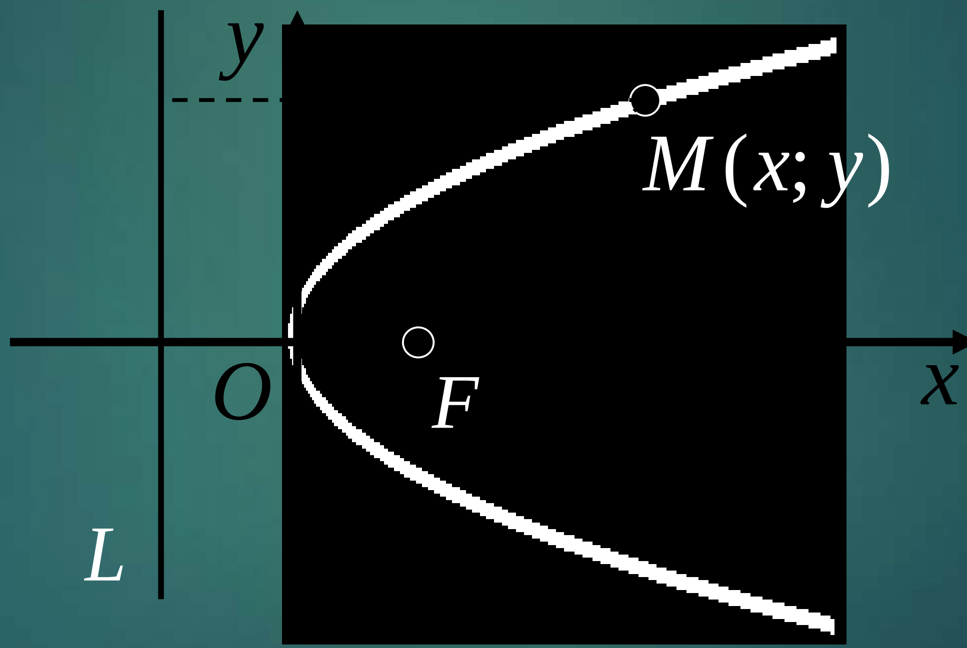
Ось параболы: Ox.

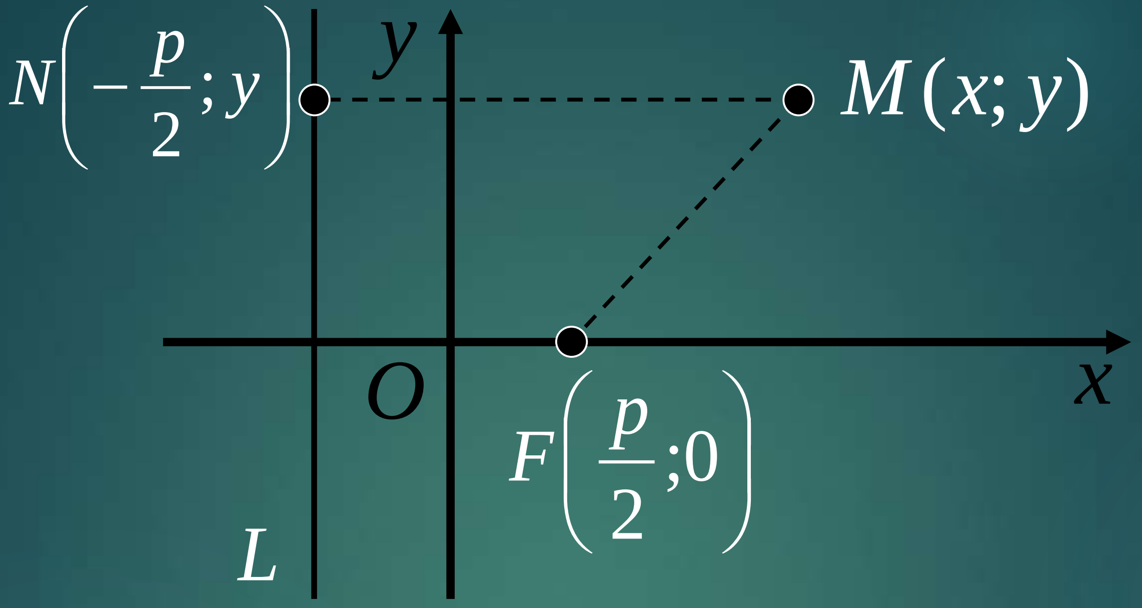
Вершина параболы: $O(0;0)$.

Фокус: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. Директриса: $L:\ x = -\frac{p}{2}$.

Расстояние от фокуса до директрисы: p.

<u>Теорема 3.</u> Точка M плоскости принадлежит параболе тогда и только тогда, когда эта точка равноудалена от фокуса F и директрисы L.





$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad MN = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Доказательство самостоятельно.

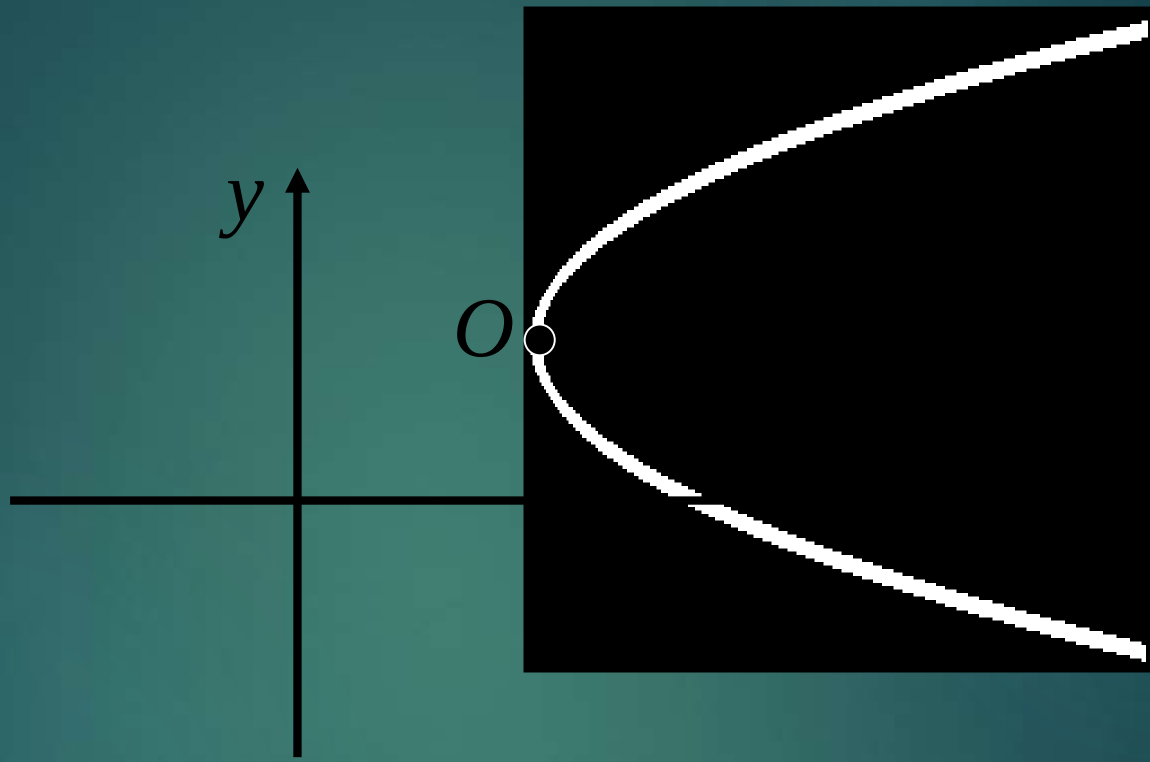
Свойства параболы

1. Симметрия относительно оси Ox.

2. $x \geq 0.$

3. Проходит через начало координат.

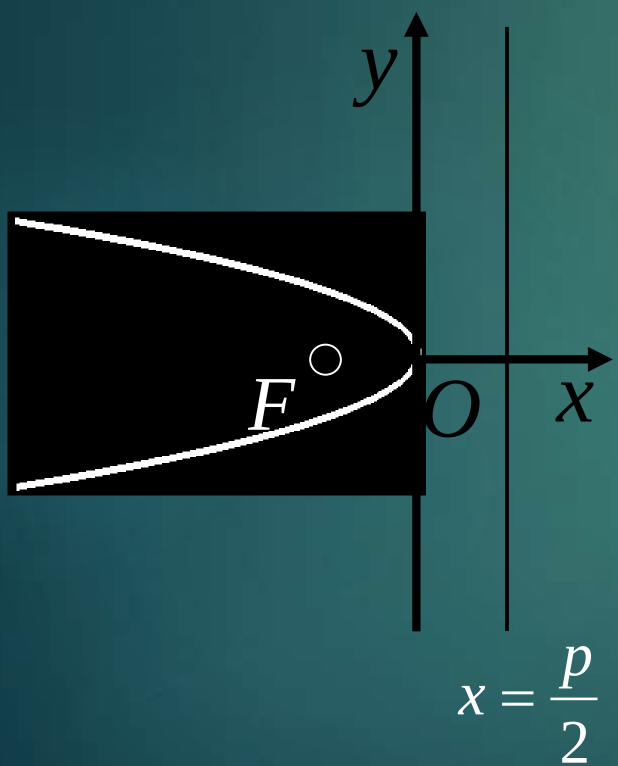
Уравнение параболы с центром в точке $O(x_0;y_0)$.



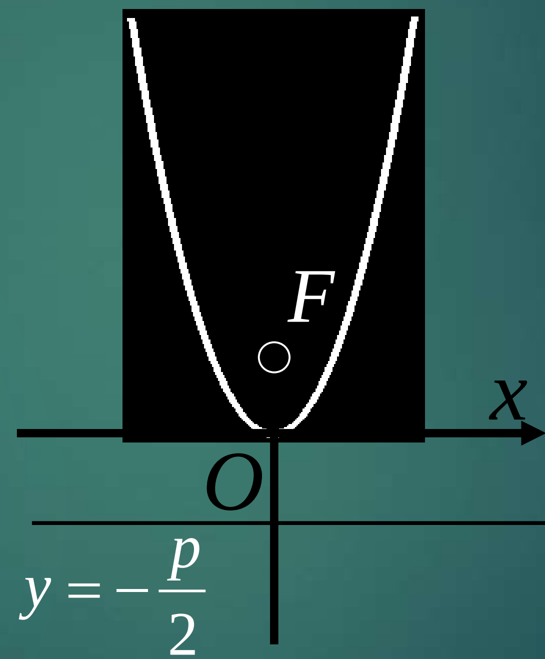
$$\boxed{(y-y_0)^2=2p(x-x_0)}$$

Расположение параболы относительно осей координат

$$y^2 = -2px$$



$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$