Матрицы и действия над ними

РАЗДЕЛ 1.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

Линейная алгебра является необходимым инструм ентарием для компактного и эффективного описания и анализа экономико-математических моделей и мет одов.

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеет важное значение для экономистов, так как значительная часть математичес ких моделей экономических объектов может быть записана в компактной матрич ной форме.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк одинак овой длины (или **n** столбцов одинаковой длины).

Матрица записывается следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы обозначаются прописными латинс кими буквами.

или $A_{mn}=(a_{ij})$ где a_{ij} – элемент матрицы, ***i*** **– ой строки и *j* – г о**

столбца,

где

i* = *1,2…m

j* = *1,2…n

- Матрицу А называют матрицей размера $m \times n$ и пишут

$$A_{m\times n}$$

- Числа a_{ij} , составляющие матрицу, называется ее ***элементами***. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют ***главную диагональ***.

- Матрицы равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.,

А=В, если, где

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

Виды матриц

Если количество строк равно количеству столбцов, т. е. m=n, *то матрица называется* [***квадратной***]. *Квадратную матрицу размера* n × n *называют* ***матрицей n-го порядка***.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} -7 & 45 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Если m ≠ n, *то матрица называется* ***прямоугольной***.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется <u>диагональной</u>, если все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы глав ной диагонали равны единице, называется <u>единичной матрицей</u> и обозначается символом E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется <u>треугольной</u>, если все эл ементы, расположенные по одну сторону от главной диаго нали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется <u>нулевой</u>. Обозначается буквой О. Имеет вид:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В матричном исчислении матрицы О и Е играют роль чис ел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется <u>вектором</u> (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Матрица размера 1 × 1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1\times1}$ ***есть 5.***

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строк и столбцом с тем же номером, называется матрицей транспонированной к данной. Обозначается A^T .

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{mn} = (a_{ij})$ ***и*** $B_{m\times n} = (b_{ij})$ ***называется матрица*** $C_{m\times n} = (c_{ij})$ ***такая, что***

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$$

Записывают С=А+В.

Вычитание

Все свойства сложения соответствуют вычитанию.

Пример сложения и вычитания матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = C \qquad A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = C$$

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

Сумма матриц:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & 17 & 7 \end{pmatrix} = C$$

Разность матриц:

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ -10 & -1 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на число k называется матрица*** $B_{m\times n}=(b_{ij})$ ***такая, что*** $b_{ij}=k\cdot a_{ij}\ (i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$

Записывают B=k·A.

Пример: $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}, k=2, A\cdot k=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}$

Матрица – A= (-1) · A называется противоположной матрице A.

Операции сложения, вычитания и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$ (*коммутативность*)

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ – *ассоциативность*

3) $A + 0 = A$

4) $A - A = 0$

5) $1 \cdot A = A$

6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ – *дистрибутивность*

7) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$

8) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$

где A, B, C – матрицы, α и β – числа.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- **перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;**
- **умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;**
- **прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.**

Две матрицы называются A и B эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается A ~ B.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице , у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные эл ементы равны нулю. Такую матрицу называют канонической, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР: ПРИВЕСТИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МАТРИЦУ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: выполняя элементарные преобразования, получаем:

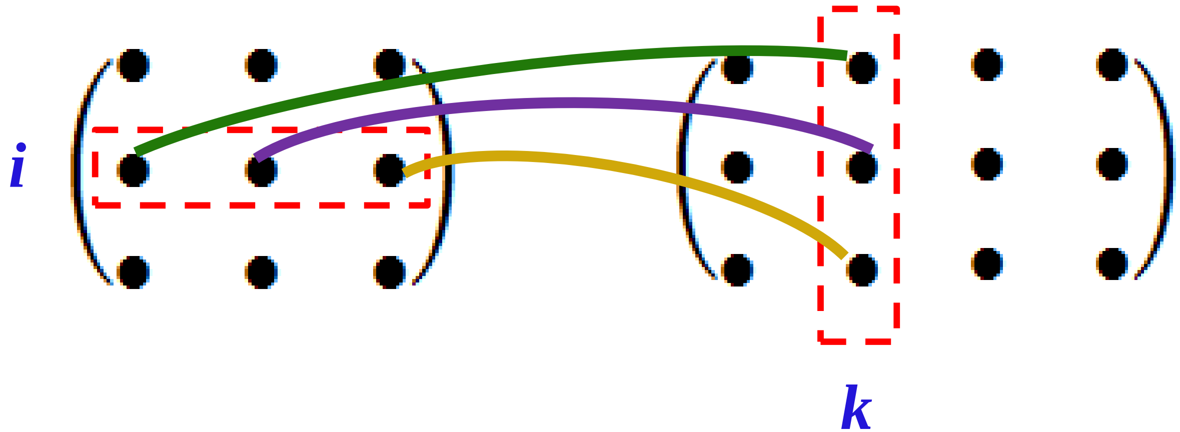
Произведение матриц

Произведением матрицы $A_{mn}=(a_{ij})$ ***на матрицу*** $B_{n\times p}=(b_{jk})$ ***называется матрица*** $C_{m\times p}=(c_{ik})$ ***такая, что***

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+\ a_{i2}\cdot b_{2k}+\ \dots+\ a_{in}\cdot b_{nk},\text{где } i=\overline{1,m}\,,k=\overline{1,p}$$

т.е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения С равен сумме произведений элементов i-строки матрицы А на соответствующие элементы k-го столбца матрицы В.

Получение элемента c_{ik} ***схематично изображается так:***



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и B A всегда существуют. Легко показать, что A • E = E A=A, где A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же размера.

Пример:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы А не совпадает с числом строк матрицы В. При этом определено произведение В × А, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы А и В называются перестановочными, если АВ = ВА. Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

Если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$

2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Тема 2. Определители

Квадратной матрице А порядка* n *можно сопоставить числ о* det A *(или* |A|, *или* Δ *), называемое ее определителем, следу ющим образом:

1.n = 1. $A = (a_1);\ \det A = a_1$

2.n = 2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3. n = 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};\ \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

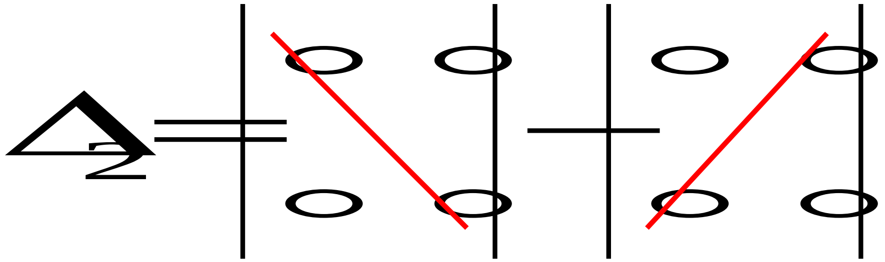
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Определитель матрицы А также называют детерминантом.

Вычисление определителя 2-го порядка, иллюстрируется схемой:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



Примеры:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5-(-2)\cdot 1 = 15+2 = 17$$

$$2)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$$

$$3)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

$$4)\ \begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15-6 = 9$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правило м треугольника (или Саррюса), которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

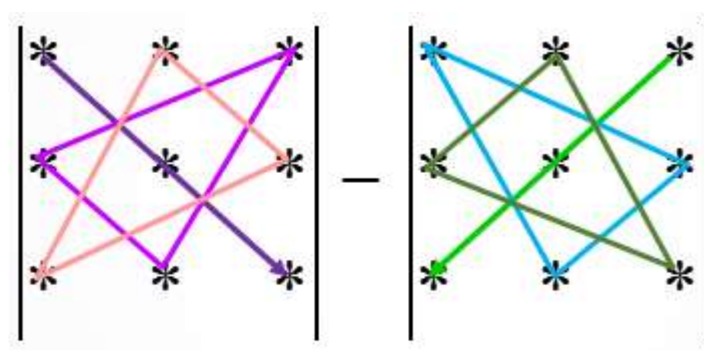
(основания равн обедренных треу гольников парал лельны главной диагонали)

(основания треуг ольников паралл ельны побочной диагонали)

Пример. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Δ=5•1•(-3) + (-2)•(-4)•6 + 3•0•1 – 6•1•1 – 3•(-2)•(-3) – 0•(-4)•5 = –15+48–6–18 = 48–39=9.



Пример. ***Вычислить определитель с помощью правила диагоналей***

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$\Delta=5\cdot1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot6 + 3\cdot0\cdot1 - (6\cdot1\cdot1+ 0\cdot(-4)\cdot5+ 3\cdot(-2)\cdot(-3)) =$$

$$-15+48 - (6+18) = 33-24=9.$$

Тема 2.2 Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его транспонировать:

$$\det A = \det A^T$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

2. При перестановке двух строк или столбцов определитель изменит свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12-(-10)=22$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10-12=-22$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками или стол бцами равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$ [illegible]

4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

5. Если все элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

6. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя предс тавляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соотв етствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором- из вторых слагаемых.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7. Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца) , умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 0 = 10$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-1)\times 10$$

8. Треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

ПРИВЕСТИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ И ВЫЧИСЛИТЬ ЕГО:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-2) \quad \times(-5) \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} + = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 60$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ ИЛИ СТОЛБЦА.

- ***Минором*** M_{ij} ***элемента*** a_{ij} ***det D называется такой новый определитель, который получается из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца содержащих данный элемент.***

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- **Алгебраическим дополнением *A_{ij}*** элемента a_{ij} det D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Теорема:

- Сумма произведений элементов любой строки (ил и столбца) определителя на их алгебраические до полнения равна этому определителю.

разложение по i-ой строке:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

разложение по j-му столбцу:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

РАЗЛОЖИТЬ ДАННЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО ЭЛЕМЕНТАМ: 1) 3-ЕЙ СТРОКИ; 2) 1-ГО С ТОЛБЦА.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

1) РАЗЛОЖИМ ДАННЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО ЭЛЕМЕНТАМ 3-ЕЙ СТРОКИ:

$$=3\cdot(-1)^{4}\begin{vmatrix}2&3&4\\1&5&2\\1&-3&2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{5}\begin{vmatrix}1&3&4\\0&5&2\\1&-3&2\end{vmatrix}$$

$$-1\cdot(-1)^{6}\begin{vmatrix}1&2&4\\0&1&2\\1&1&2\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{7}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&5\\1&1&-3\end{vmatrix}$$

[illegible]

2) РАЗЛОЖИМ ДАННЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО ЭЛЕМЕНТАМ 1-ГО СТОЛБЦА:

$$A.\ (-1)^{2}\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \qquad B.\ (-1)^{3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C.\ (-1)^{4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \qquad D.\ (-1)^{5}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

[illegible]

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИ Я ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ.

- 1. разложение определителя по элементам строки и ли столбца;
- 2. метод эффективного понижения порядка;
- 3. приведение определителя к треугольному виду.

Метод эффективного понижения порядка:

Вычисление определителя n-го порядка сводится к выч ислению одного определителя (n-1)-го порядка, сделав в каком-либо ряду все элементы, кроме одного, равными нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-3) & \times(-1) \\ & \\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$
= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= -4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 4 5
$$

ВЫЧИСЛИТЬ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРИВЕДЕНИЕМ ЕГО К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \times(-3) \quad \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 4\\ 0 & -1 & -6 & -2\end{vmatrix}=-2\cdot 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \times 2\\ +\\ \\ \end{array}\qquad =4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 15 & 4\\ 0 & 0 & 11 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$=4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\,4-5$$

ТЕМА 3. ОБРАТНАЯ МАТР ИЦА

- Квадратная матрица порядка *n* называется **невырожденной**, если её определитель не равен нулю.

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- В противном случае (detA=0) матрица A называется **вырожденной**.

- Если А- квадратная матрица, то **обратной** по отношению к матрице А называется матрица, которая будучи умноженно й на А (как справа, так и слева) даёт единичную матри цу.

- ***Если обратная матрица существует, то матрица А называется обратимой.***

- ***Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называе тся обращением матрицы.***

Теорема.

Для того, чтобы квадратная матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица А была невырожденной (det A≠ 0).

НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ:

$$A^{-1} = \frac{\left(A^*\right)^T}{\det A}$$

где

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

присоединенная матрица

у:

- 1. находят *det* A и убеждаются, что *det* A $\neq 0$;
- 2. находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу A*;
- 3. транспонируют новую матрицу $\left(A^*\right)^T$;
- 4. умножают полученную матрицу на $\dfrac{1}{\det A}$

Пример 1.

Найти матрицу, обратную к матрице А:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1) НАХОДИМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

2) НАХОДИМ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ А:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

ЗАПИСЫВАЕМ НОВУЮ МАТРИЦУ: $A^* = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3) транспонируем эту матрицу:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4) УМНОЖИМ ПОЛУЧЕННУЮ МАТРИЦУ НА $\frac{1}{\det A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot (A^*)^T = \frac{1}{14}\cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

ПРОВЕРКА: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ.

$$A\cdot X=B$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

$$E\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

$$X=A^{-1}\cdot B$$

$$X\cdot A=B$$

$$X\cdot \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{E}=B\cdot A^{-1}$$

$$X\cdot E=B\cdot A^{-1}$$

$$X=B\cdot A^{-1}$$

Пример 2.

Найти матрицу X:

$$A\cdot X\cdot C=B$$

$$A\cdot X\cdot C=B$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot X\cdot \underbrace{C\cdot C^{-1}}_{E}=A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$$

$$E\cdot X\cdot E=A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$$

Пример 3. Найти матрицу X:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

2) $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

3) $$\left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

4) $$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(A^{*}\right)^{T}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Ответ: $$X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Показать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Пусть $ABX = C$

$$(AB)X = C$$

$$\underbrace{(AB)^{-1}\cdot(AB)}_{E}\cdot X = (AB)^{-1}C$$

$$X = (AB)^{-1}C$$

$$X\cdot C^{-1} = (AB)^{-1}\underbrace{C\cdot C^{-1}}_{E}$$

$$XC^{-1} = (AB)^{-1}$$

$$A(BX) = C$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot(BX) = A^{-1}\cdot C$$

$$BX = A^{-1}\cdot C$$

$$\underbrace{B^{-1}\cdot B}_{E}\cdot X = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot C$$

$$X = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot C$$

$$X\cdot C^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot\underbrace{C\cdot C^{-1}}_{E}$$

$$XC^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Получили, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$