



ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

“ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ” МИЛЛИЙ ТАДҚИҚОТ УНИВЕРСИТЕТИ

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
"TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEKANIZATSIYALASH
MUHANDISLARI INSTITUTI" MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI
"QISHLOQ VA SUV XO'JALIGINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI"
XXI - yosh olimlar, magistrantlar va iqtidorli
talabalarning ilmiy - amaliy anjumani

Toshkent 2022 12-13 may

www.tiame.uz @ilovetiame @tiame.uz @tiameofficial @tiameofficial 99-929-78-45

“ҚИШЛОҚ ВА СУВ ХЎЖАЛИГИНИНГ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ”

мавзусидаги анъанавий **XXI** - ёш
олимлар, магистрантлар ва
иқтидорли талабаларнинг илмий
- амалий анжумани

21

XXI - traditional Republic
scientific - practical conference of
young scientists, master students
and talented students under the
topic

**“THE MODERN PROBLEMS OF
AGRICULTURE AND WATER
RESOURCES”**

МАҚОЛАЛАР ТЎПЛАМИ

Тошкент-2022 йил, 12-13 май

IX – ШЎБА

Қишлоқ ва сув хўжалиги масалаларида математик моделлаштириш усуллари ва ахборот технологияларини қўллаш.

Раис: доц. Абдуллаев З.

Ҳамраис: проф. Шадманова Г.

Котиба: доц. Зиядуллаев Д.

№	Муаллифлар	Мақола номи	Бет
1.	Odiljonov U.O. 2-bosqich 211-guruh A. GTQ fakulteti, Mexanika va matematik modellashirish talaba “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Amaliy masalalarni matematik modellashirish va ularni differensial tenglamalar yordamida yechish	1792
2.	Xidoyatova M.A. ass., Sharipov H. “GTQ” fakulteti “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Birinchi tartibli differensial tenglamaga keltiriladigan masalalar modelini yaratish	1794
3.	Шахобиддинова З.Б. Жамардов С.Х.1-курса 103-группа	Степенные ряды при решении дифференциальных уравнений	1797
4.	N.Safarbayeva Ilmiy rahbar: “Oliy matematika” kafedrasi kata o’qituvchisi SXM fakulteti talabali: N.Ashurov, A.Rahimov 1-kurs 112-guruh “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Differensial tenglamalarning amaliy masalalarga tadbiqu	1801
5.	Abdullaev A.A. “Oliy matematika” kafedrasi assistenti Ashurov J.B.1-bosqich 103-guruh SXTEB fakulteti talabasi “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Funksiya grafigini yasashning qulay usullari	1805
6.	Xidoyatova M.ass., Ergashev S “GTQ” fakulteti talaba “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Hosilaning fizika va kimyodagi tadbirlari	1809
7.	M.Xidoyatova., Samatova G. YRB talaba “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Iqtisodiy masalalarni matritsalar yordamida yechimini topish.	1812
8.	N.Esonov, N.Sarsenboyev. talabalar “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Iqtisodiy masalalarni yechishda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining tadbirlari	1814
9.	Masaliev M.E. 2-bosqich 211-guruh “GTQ”yo’nalishi Mexanika va matematik modellashirish talabasi “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Maple 18 dasturi yordamida Analitik mexanika fanining masalarini yechish va koordinata o’qida grafigini chizish	1817
10.	Xolmurodova M. D.2-bosqich M-144 Magistrant “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti, tabiiy fanlar PhD doktori Juliev M.K Turin politexnika universiteti	Markaziy osiyo davlatlarida tuproq eroziyasini baholashda rusle modelining afzalliklari	1821
11.	Rasulov S.J. 2-bosqich 211-guruh “GTQ”yo’nalishi Mexanika va matematik modellashirish talabasi “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti	Matematik modellashirish yordamida fizik jarayonlarga oid Amaliy masalalarni yechish	1823
12.	F.M. Murtazayeva, O.Sh.Egamberdiyev “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti magistrantlari	Seysmik signallarni raqamli ma’lumotlar ba’zasida nazorat qilish.	1826

13.	М. Yeshanova – 1-bosqich 113-guruh talaba, “ТИҚХММИ” Milliy tadqiqot universiteti	Sodda iqtisod-muhandislik masalariga matritsalarining tatbiqi	1831
14.	Йулдашев Н. доц. (каф. Выс. мат.), Исомиддинов С., 1- курса студент гр.109, ЭАСХ, “ТИИИМСХ” Национальный исследовательский университет	Комплексные числа и их применение в решение задач электротехники	1834
15.	Шодмонова Г, “АТ кафедраси профессори”, Исқандаров Х., СХТЭБ мугухассислиги магистранти, “ТИҚХММИ” Миллий тадқиқот университети	Қишлоқ хўжалик корхоналарида ресурслардан оқилона фойдаланишни математик моделлар орқали таҳлил қилиш	1839
16.	Вахобов В. Доц. Гулмухаммедов. Б. ЕРБ талабаси 1- курса 102-группа “ТИҚХММИ” Миллий тадқиқот университети	Қишлоқ хўжалик экинлари таннархини режаллаштиришда математик статистиканинг ўрни	1842
17.	Мусаева Ф. ўқитувчи-стажор, Матякубов Л. 1-босқич 104-гурух ТЖИЧАБ талаба “ТИҚХММИ” Миллий тадқиқот университети	Оддий дифференциал тенгламалар учун қоши масаласини тақрибий ечишнинг даражали каторлар методи	1845
18.	Хидоятова М.А. асс. Аветисян М.В. “ТИҚХММИ” Миллий тадқиқот университети	Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений	1848
19.	Қ.Р. Жувонов- Асс, А.Б.Нуриллаев-Талаба. 1-босқич 106-гурух “ТИҚХММИ” Миллий тадқиқот университети	Тақрибий ҳисоблашларда дифференциалдан фойдаланиш	1852

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хидоятова М.А. асс. Аветисян М.В. 107 группа УЗР

Аннотация:

В работе рассматривается применения приближенный метода интегрирование дифференциальных уравнение при помощи степенных рядов. В случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно или способ его решения слишком сложен, решение такого уравнения следует искать в виде ряда Тейлора $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$. Коэффициенты ряда c_n находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в обеих частях полученного равенства. Если удаётся найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд служит решением во всей своей области сходимости. Этим способом можно интегрировать линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

Рядом Тейлора функции $f(x)$ относительно точки x_0 называется степенной ряд вида

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Коэффициенты этого ряда $c_0 = f(x_0)$, $c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$, $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$, ..., $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, ... называются *коэффициентами Тейлора* функции $f(x)$.

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$ функцию $f(x) = \ln x$.

Решение.

1) Записываем ряд Тейлора, $x_0 = 1$:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x - 1)^n + \dots$$

2) Находим производные:

$$f(x) = \ln x; \quad f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$f'''(x) = (-x^{-2})' = -1 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{1 \cdot 2}{x^3};$$

$$f^{(4)}(x) = (1 \cdot 2 \cdot x^{-3})' = 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4};$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{x^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

3) Вычисляем значение функции и значения производных при $x = 1$:

$$f(1) = \ln 1 = 0; \quad f'(1) = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1; \quad f''(1) = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1!;$$

$$f'''(1) = \frac{1 \cdot 2}{x^3} \Big|_{x=1} = 2!; \quad f^{(4)}(1) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} \Big|_{x=1} = -3!; \dots$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \Big|_{x=1} = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

4) Подставляем найденные значения в ряд Тейлора:

$$\ln x = 0 + 1(x-1) + \frac{-1!}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \frac{-3!}{4!}(x-1)^4 \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n + \dots$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + \dots \quad (1)$$

5) Находим область сходимости ряда Тейлора (1):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \div \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \text{Следовательно, интервал сходимости}$$

$$|x-1| < 1; \quad -1 < x-1 < 1; \quad 0 < x < 2.$$

Исследуем ряд на концах интервала. При $x = 0$ ряд (1) имеет вид

$$(0-1) - \frac{1}{2}(0-1)^2 + \frac{1}{3}(0-1)^3 - \frac{1}{4}(0-1)^4 \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(0-1)^n + \dots = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^{2n-1}}{n} \dots$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \dots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right) \text{ - ряд расходится.}$$

При $x = 2$ ряд (1) имеет вид

$$(2-1) - \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{3}(2-1)^3 - \frac{1}{4}(2-1)^4 \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(2-1)^n + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \dots$$

Это знакочередующийся ряд и, применяя признак Лейбница, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \text{то есть он сходится. Так как ряд, составленный из абсолютных величин}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{ расходится, то при } x = 2 \text{ ряд (1) сходится условно. Область}$$

сходимости ряда (1) $0 < x \leq 2$.

6) Записываем разложение функции $\ln x$ по степеням $(x-1)$ с указанием области сходимости:

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad 0 < x \leq 2.$$

$$\text{Ряд Тейлора } f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \text{ при}$$

$x_0 = 0$, называют *рядом Маклорена*.

Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.

Пример 3. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = x + x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 5$.

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся *методом последовательного дифференцирования*. Будем искать решение с помощью ряда Маклорена.

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

Из начального условия $y(0) = 5$, тогда $y'(0) = 0 + 0^2 + 5^2 = 25$. Для нахождения следующего коэффициента продифференцируем обе части уравнения $y' = x + x^2 + y^2$, получим

$$y'' = x' + (x^2)' + (y^2)',$$

$$y'' = 1 + 2x + 2y \cdot y',$$

$$y''(0) = 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 25 = 251.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = 5 + 25x + \frac{251}{2!} x^2 + \dots = 5 + 25x + 125,5x^2 + \dots$$

Пример 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' = -xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$.

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся *методом последовательного дифференцирования*. Будем искать решение с помощью ряда Маклорена.

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

Из начального условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Для нахождения следующего коэффициента продифференцируем обе части уравнения $y'' = -xy$,

$$y''' = -y - xy' = -1 + 0 = -1$$

$$y^{IV} = -y' - y' - xy'' = -2y' - xy'' = 0$$

получим

$$y^V = -2y'' - y'' - xy''' = 0$$

$$y^{VI} = -2y''' - y''' - xy^{IV} = -4y''' - xy^{IV} = -4(-1) = 4$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = 1 + \frac{(-1)x^3}{3!} + \frac{1}{6!} x^6 + \dots$$

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + xy' + y = x \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся *методом неопределенных коэффициентов*. Разложим свободный коэффициент уравнения в степенной ряд

$$x \cos x = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right).$$

Решение уравнения будем искать в виде $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$

Тогда $y' = c_1 + 2 \cdot c_2x + 3 \cdot c_3x^2 + \dots$

$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3x + 3 \cdot 4 \cdot c_4x^2 + \dots$$

Из начальных условий находим: $c_0 = 0, c_1 = 1$.

Для нахождения следующих коэффициентов подставляем полученные разложения для $x \cos x, y', y''$ в дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & (2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3x + 3 \cdot 4 \cdot c_4x^2 + \dots) + x(c_1 + 2 \cdot c_2x + 3 \cdot c_3x^2 + \dots) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) = \\ & = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^0 : 2c_2 + c_0 = 1;$$

$$x^1 : 2 \cdot 3 \cdot c_3 + c_1 + c_1 = 0$$

$$x^2 : 3 \cdot 4 \cdot c_4 + 2 \cdot c_2 + c_2 = 0$$

$$x^3 : 4 \cdot 5 \cdot c_5 + 3 \cdot c_3 + c_3 = -\frac{1}{2}$$

$$x^4 : 5 \cdot 6 \cdot c_6 + 4 \cdot c_4 + c_4 = 0 \dots$$

учитывая, что $c_0 = 0, c_1 = 1$ находим, что $c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0, c_3 = -\frac{1}{3!}, c_5 = \frac{1}{5!}, \dots$

Таким образом, решение уравнения имеет вид $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, то есть $y = \sin x$.

Заключение

Таким образом, достигшей знанием нам легче будет решить дифференциальные уравнение используя разложения в ряды Тейлора.

Литература:

1. Н.М. Кравченко Дифференциальные уравнения и ряды Екатеринбург 2006
2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1985