ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

“ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ” МИЛЛИЙ ТАДҚИҚОТ УНИВЕРСИТЕТИ

“ҚИШЛОҚ ВА СУВ ХЎЖАЛИГИНИНГ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ”

*мавзусидаги анъанавий **XXI -** ёш олимлар, магистрантлар ва иқтидорли талабаларнинг илмий - амалий анжумани*

21

***XXI -** traditional Republic scientific - practical conference of young scientists, master students and talented students under the topic*

“THE MODERN PROBLEMS OF AGRICULTURE AND WATER RESOURCES”

МАҚОЛАЛАР ТЎПЛАМИ

Тошкент-2022 йил, 12-13 май

IX – ШЎЪБА

Қишлоқ ва сув хўжалиги масалаларида математик моделлаштириш усуллари ва ахборот технологияларини қўллаш.

Раис: доц. Абдуллаев З.
Ҳамраис: проф. Шадманова Г.
Котиба: доц. Зиядуллаев Д.

13.	M.Yeshanova – 1-bosqich 113-guruh talaba, "TIQXMMI" Milliy tadqiqot universiteti	Sodda iqtisod-muhandislik masalariga matritsalarning tatbiqi	1831
14.	Йулдашев Н. доц, (каф. Выс. мат.), Исомиддинов С., 1- курса студент гр.109, ЭАСХ, "ТИИИМСХ" Национальный исследовательский университет	Комплексные числа и их применение в решение задач электротехники	1834
15.	Шодмонова Г, "АТ кафедраси профессори", Искандаров Ҳ., СХТЭБ мутухассислиги магистранти, "ТИҚХММИ" Миллий тадқиқот университети	Қишлоқ хўжалик корхоналарида ресурслардан оқилона фойдаланишни математик моделлар орқали таҳлил қилиш	1839
16.	Вахобов В. Доц. Гулмухаммедов. Б. ЕРБ талабаси 1- курса 102-группа "ТИҚХММИ" Миллий тадқиқот университети	Қишлоқ хўжалик экинлари таннархини режаллаштиришда математик статистиканинг ўрни	1842
17.	Мусаева Ф. ўкитувчи-стажор, Матякубов Л.1-босқич 104-гурух ТЖИЧАБ талаба "ТИҚХММИ" Миллий тадқиқот университети	Оддий дифференциал тенгламалар учун коши масаласини такрибий ечишнинг даражали каторлар методи	1845
18.	Хидоятова М.А. асс. Аветисян М.В. "ТИҚХММИ" Миллий тадқиқот университети	Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений	1848
19.	Қ.Р. Жувонов- Асс, А.Б.Нуриллаев-Талаба. 1-босқич 106-гурух "ТИҚХММИ" Миллий тадқиқот университети	Тақрибий ҳисоблашларда дифференциалдан фойдаланиш	1852

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хидоятова М.А. асс. Аветисян М.В. 107 группа УЗР

Аннотация:

В работе рассматривается применения приближенный метода интегрирование дифференциальных уравнение при помощи степенных рядов. В случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно или способ его решения слишком сложен, решение такого уравнения следует искать в виде ряда Тейлора $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$.Коэффициенты ряда c_n находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $(x-x_0)$ в обеих частях полученного равенства. Если удаётся найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд служит решением во всей своей области сходимости. Этим способом можно интегрировать линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

Рядом Тейлора функции $f(x)$ *относительно точки* x_0 называется степенной ряд вида

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Коэффициенты этого ряда $c_0=f(x_0),\ c_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ c_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots\ c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots$ называются *коэффициентами Тейлора* функции $f(x)$.

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию $f(x)=\ln x$.

Решение.

1) Записываем ряд Тейлора, $x_0=1$:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ \ldots\ +\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\ldots$$

2) Находим производные:

$$f(x)=\ln x;\quad f'(x)=\frac{1}{x};\quad f''(x)=(x^{-1})'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2};$$

$$f'''(x)=(-x^{-2})'=-1\cdot(-2)\cdot x^{-3}=\frac{1\cdot 2}{x^3};$$

$$f^{(4)}(x)=(1\cdot 2\cdot x^{-3})'=1\cdot 2\cdot(-3)\cdot x^{-4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4};$$

....

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(n-1)}{x^n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

3) Вычисляем значение функции и значения производных при $x=1$:

$$f(1)=\ln 1=0;\quad f'(1)=\left.\frac{1}{x}\right|_{x=1}=1;\quad f''(1)=-\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=1}=-1!;$$

$$f'''(1)=\left.\frac{1\cdot 2}{x^3}\right|_{x=1}=2!;\quad f^{(4)}(1)=-\left.\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\right|_{x=1}=-3!;..............$$

$$f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\left.\frac{(n-1)!}{x^n}\right|_{x=1}=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

4) Подставляем найденные значения в ряд Тейлора:

$$\ln x=0+1(x-1)+\frac{-1!}{2!}(x-1)^2+\frac{2!}{3!}(x-1)^3+\frac{-3!}{4!}(x-1)^4\ \ldots\ +\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n+\ldots$$

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4\ \ldots\ +\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\ldots \qquad (1)$$

5) Находим область сходимости ряда Тейлора (1):

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\div\frac{1}{n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, Следовательно, интервал сходимости $|x-1|<1;\quad -1<x-1<1;\quad 0<x<2$.

Исследуем ряд на концах интервала. При $x=0$ ряд (1) имеет вид

$$(0-1)-\frac{1}{2}(0-1)^2+\frac{1}{3}(0-1)^3-\frac{1}{4}(0-1)^4\ \ldots\ +\frac{(-1)^{n-1}}{n}(0-1)^n+\ldots=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^{2n-1}}{n}\ldots$$

$$=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)$$ – ряд расходится.

При $x=2$ ряд (1) имеет вид

$$(2-1)-\frac{1}{2}(2-1)^2+\frac{1}{3}(2-1)^3-\frac{1}{4}(2-1)^4\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(2-1)^n+\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ldots$$

Это знакочередующийся ряд и, применяя признак Лейбница, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то есть он сходится. Так как ряд, составленный из абсолютных величин $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+..$ расходится, то при $x=2$ ряд (1) сходится условно.Область сходимости ряда (1) $0<x\le 2$.

6) Записываем разложение функции $\ln x$ по степеням $(x-1)$ с указанием области сходимости:

$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\qquad 0<x\le 2.$$

Ряд Тейлора $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, при $x_0=0$, называют *рядом Маклорена*.

Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.

Пример 3. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = x + x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 5$.

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся *методом последовательного дифференцирования*. Будем искать решение с помощью ряда Маклорена.

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots .$$

Из начального условия $y(0) = 5$, тогда $y'(0) = 0 + 0^2 + 5^2 = 25$. Для нахождения следующего коэффициента продифференцируем обе части уравнения $y' = x + x^2 + y^2$, получим

$$y'' = x' + \left(x^2\right)' + \left(y^2\right)',$$

$$y'' = 1 + 2x + 2y\cdot y',$$

$$y''(0) = 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 5\cdot 25 = 251.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = 5 + 25x + \frac{251}{2!}x^2 + \dots = 5 + 25x + 125{,}5x^2 + \dots .$$

Пример 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' = -xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$.

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся *методом последовательного дифференцирования*. Будем искать решение с помощью ряда Маклорена.

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Из начального условия $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Для нахождения следующего коэффициента продифференцируем обе части уравнения $y'' = -xy$, получим

$$y''' = -y - xy' = -1 + 0 = -1$$

$$y^{IV} = -y' - y' - xy'' = -2y' - xy'' = 0$$

$$y^{V} = -2y'' - y'' - xy''' = 0$$

$$y^{VI} = -2y''' - y''' - y''' - xy^{IV} = -4y''' - xy^{IV} = -4(-1) = 4$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = 1 + \frac{(-1)x^3}{3!} + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + xy' + y = x\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся *методом неопределенных коэффициентов*. Разложим свободный коэффициент уравнения в степенной ряд

$$x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\right).$$

Решение уравнения будем искать в виде $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$.

Тогда
$$y' = c_1 + 2 \cdot c_2 x + 3 \cdot c_3 x^2 + \ldots$$
$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 x + 3 \cdot 4 \cdot c_4 x^2 + \ldots$$

Из начальных условий находим: $c_0 = 0, \quad c_1 = 1$.

Для нахождения следующих коэффициентов подставляем полученные разложения для $x\cos x, \; y', \; y''$ в дифференциальное уравнение

$$\left(2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3 x + 3 \cdot 4 \cdot c_4 x^2 + \ldots\right) + x\left(c_1 + 2 \cdot c_2 x + 3 \cdot c_3 x^2 + \ldots\right) + \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\right) =$$
$$= x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^0 : 2c_2 + c_0 = 1;$$
$$x^1 : 2 \cdot 3 \cdot c_3 + c_1 + c_1 = 0$$
$$x^2 : 3 \cdot 4 \cdot c_4 + 2 \cdot c_2 + c_2 = 0$$
$$x^3 : 4 \cdot 5 \cdot c_5 + 3 \cdot c_3 + c_3 = -\frac{1}{2}$$
$$x^4 : 5 \cdot 6 \cdot c_6 + 4 \cdot c_4 + c_4 = 0 \ldots$$

учитывая, что $c_0 = 0, \quad c_1 = 1$ находим, что $c_2 = c_4 = c_6 = \ldots = 0$, $c_3 = -\frac{1}{3!}, \; c_5 = \frac{1}{5!}, \ldots$.

Таким образом, решение уравнения имеет вид $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, то есть $y = \sin x$.

Заключение

Таким образом, достигшей знанием нам легче будет решить дифференциальные уравнение используя разложения в ряды Тейлора.

Литература:

1. Н.М. Кравченко Дифференциальные уравнения и ряды Екатеринбург 2006
2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1985