2-Mavzu-Determinanatlarning xossalari, Minor va algebraik to'ldiruvchi

1.1.1. Тўртта сондан иборат

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

квадрат жадвал *иккинчи тартибли квадрат матрица* дейилади.

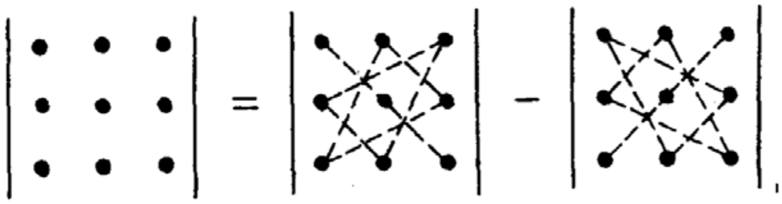
Иккинчи тартибли квадрат матрицага мос келувчи *иккинчи тартибли детерминант* деб қуйидаги белги ва тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Шунга ўхшаш ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

ифода *учинчи тартибли детерминант* дейилади. Бу ифодага мусбат ишора билан кирадиган ҳар бир кўпайтма, ҳамда манфий ишорали кўпайтмалар кўпайтувчиларини алоҳида-алоҳида пунктир чизиқлар ёрдамида туташтириб, учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаш учун хотирада осон сақланадиган «учбурчаклар қоидаси»га эга бўламиз (1- шакл).



1- шакл

Детерминант a_{ik} элементининг M_{ik} *минори* деб, шу детерминантдан бу элемент турган қатор ва устунни ўчириш натижасида ҳосил бўлган детерминантга айтилади.

Детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

муносабат билан аниқланади.

1.1.2. Детерминантларнинг асосий хоссалари:

а) агар детерминантнинг барча сатрлари мос устунлари билан алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди;

Кейинги хоссаларни таърифлашда сатрлар ва устунларни бир сўз билан *қатор* деб атаймиз.

б) агар детерминантноллардан иборат қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

в) агар детерминант иккита бир хил параллел қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

г) агар детерминант иккита параллел қаторининг мос элементлари мутаносиб (пропорционал) бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

д) бирор қатор элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин;

е) агар детерминант иккита параллел қаторининг ўринлари алмаштирилса, детерминант ишорасини қарама-қаршисига ўзгартиради;

ж) детерминантнинг қиймати бирор қатор элементлари билан шу элементларга тегишли алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

Бу хосса *детерминантни* қатор элементлари бўйича *ёйиш* дейилади. Ундан детерминантларни ҳисоблашда фойдаланилади.

з) бирор қатор элементлари билан параллел қатор мос элементлари алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг.

и) агар детерминант бирор қаторининг ҳар бир элементи икки қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда детерминант икки детерминант йиғиндисига тенг бўлиб, уларнинг бири тегишли қатор биринчи қўшилувчилардан, иккинчиси эса иккинчи қўшилувчилардан иборат бўлади. Масалан

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

к) агар детерминантнинг бирор қатори элементларига параллел қаторнинг мос элементларини бирор ўзгармас сонга кўпайтириб қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{11} & a_{32}+\lambda a_{12} & a_{33}+\lambda a_{13} \end{vmatrix}.$$

1.1.3. $(n\times n)$ та сондан иборат ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

жадвал *n- тартибли квадрат матрица* дейилади. Унинг *n- тартибли детерминанти* деб қуйидаги белги ва тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+ \dots +a_{1n}A_{1n}.$$

1.1.2 бандда келтирилган хоссаларнинг ҳаммаси исталган тартибли детерминантга тегишлидир. Ихтиёрий тартибли детерминантни ҳисоблашнинг иккита усулини келтирамиз:

1. *Детерминант тартибини пасайтириш усули* — детерминант бирор қатори элементларининг биттасидан бошқаларини олдиндан нолга айлантириб олиб, шу қатор бўйича ёйиш усули.

1- мисол.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} \doteq 91.$$

2. *Детерминантни учбурчак кўринишга келтириш усули* детерминантни шундай алмаштиришдан иборатки, унинг бош диагоналидан бир томонида ётувчи ҳамма элементлари нолга айлантирилади ва учбурчаксимон шаклга келтирилади, масалан

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Равшанки, учбурчак шаклидаги детерминантнинг қиймати бош диагоналлари элементлари кўпайтмасига тенг:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

2- мисол.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48\,.$$