TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

MAVZU 17

Darajali qatorlar. (x-a) ning darajalari bo‘yicha qatorlar. Teylor va Makloren qatorlari. Binomial qator.

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

Oiy matematika kafedrasi assistenti

Reja:

- **Darajali qator tushunchasi. Abel teoremasi.**
- **Darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali.**
- **(x-a) ning darajalari bo’yicha qatorlar.**
- **Teylor qatori.**
- **Makloren qatori. Ba’zi elementar funksiyalarni makloren qatoriga yoyish**
- **Binomial qator.**

Darajali qator tushunchasi. Abel teoremasi.

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (1)$$

yoki umumiyroq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (2)$$

ko‘rinishdagi qatorlar **darajali qatorlar** deyiladi.

Bunda x_0 va $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lar o‘zgarmas sonlar bo‘lib, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lar darajali qatorning **koeffitsiyentlari** deyiladi.

Agar (2) darajali qatorga $x-x_0$ ni biror o'zgaruvchi, masalan t deyilsa ($t = x - x_0$), u holda bu qator (1) ko'rinishidagi qatorga keladi. Shu sababli (1) ko'rinishdagi darajali qatorlarni o'rganish yetarli bo'ladi.

Masalan,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (0! = 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

qatorlar darajali qatorlar bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, darajali qatorlar o‘z koeffitsiyentlari bilan to‘la aniqlaydi.

1-teorema (Abel teoremasi). Agar (1) darajali qator $x = x_0 \neq 0$ da yaqinlashuvchi bo‘lsa, ushbu

$$|x| < |x_0| \tag{3}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda (1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali.

Darajali qator

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

ning yaqinlashishi hamda uzoqlashishi nuqtalari to‘plami quiyidagicha bo‘lishi mumkin.

1. Har qanday darajali qator $x = 0$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘ladi. (Chunki bu holda $S_n(0) = a_0$ bo‘lib, $n \to \infty$ da chekli limitga ega.)

Shunday darajali qator borki, u faqat bitta nuqtaga yaqinlashadi. Masalan,

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + ... + n!x^n + ...+$$

qator faqat $x = 0$ nuqtada yaqinlashadi. Bunday holda qatorning yaqinlashuvchi nuqtadagi to‘plami bir elementli to‘plamdir.

2. Shunday darajali qatorlar borki, ular ixtiyoriy $x\epsilon(-\infty, +\infty)$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘ladi. Masalan,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... +$$

qator ixtiyoriy $x\epsilon(-\infty, +\infty)$ da yaqinlashuvchi.

Bunday holda darajali qatorning yaqinlashishi nuqtalar to‘plami $(-\infty, +\infty)$ bo‘ladi.

3. Shunday darajali qatorlar borki, u biror $x = a$ nuqtada yaqinlashuvchi, $x = b$ nuqtada uzoqlashuvchi bo‘ladi. Masalan,

$$1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 5^3} + ... + \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n} + ... +$$

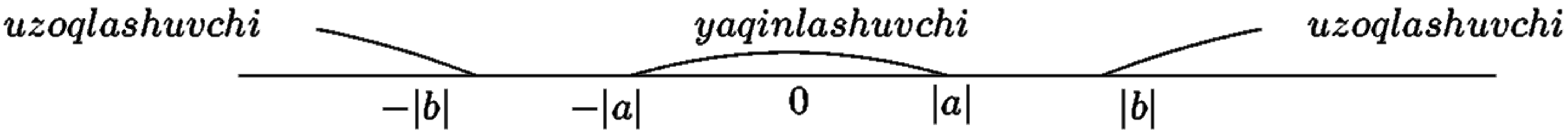
darajali qator $x = 4$ nuqtada yaqinlashuvchi, $x = 6$ nuqtada uzoqlashuvchi.

Bunday holda, avvalo

$$|a| < |b|$$

bo‘ladi. Keyin, Abel teoremasi va uning natijasiga ko‘ra $|x| < |a|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator yaqinlashuvchi, ya’ni $(-|a|, |a|)$

intervalda qator yaqinlashuvchi; $|x| > |b|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator uzoqlashuvchi, ya’ni
$(-\infty, -|b|) \cup (|b|, +\infty)$ to‘plamda uzoqlashuvchi bo‘ladi (3-chizma).



3-chizma.

Endi ushbu

$$|a| < c_1 < |b|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi c_1 sonni olaylik. Bu $x = c_1$ nuqtada (1) darajali qator quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_1^n = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_1^2 + ... + a_n c_1^n + ...$$

sonli qatorga aylanadi.

Agar bu sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda Abel teoremasiga ko‘ra darajali qator $|x| < c_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashuvchi, ya’ni darajali qator $(-c_1, c_1)$ da yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda natijaga ko‘ra darajali qator $|x| > c_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlashuvchi, ya’ni $(-\infty, -c_1) \cup (c_1, +\infty)$ to‘plamda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Endi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_1^n$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lganda c_1 bilan b sonlari orasiga, qator uzoqlashuvchi bo'lganda a bilan c_1 sonlar orasida joylashgan biror sonni olib, uni c_2 deylik. So'ng ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_2^n = a_0 + a_1 c_2 + a_2 c_2^2 + \ldots + a_n c_2^n + \ldots$$

sonli qatorni qaraymiz.

Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab va bu jarayonni davom ettirib

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi. Uni r bilan belgilaymiz:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = r.$$

Ravshanki, $r > 0$ bo'ladi.

Natijada (1) darajali qator $|x| < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashuvchi, $|x| > r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlanuvchi bo'ladi.

1-ta'rif. Yuqoridagi r son $(r > 0)$ (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi, $(-r, r)$ interval esa darajali qatorning yaqinlashish intervali deyiladi.

Eslatma. Agar darajali qator faqat bitta nuqtada yaqinlasuvchi bo'lsa, bu qatorning yaqinlashish radiusi $r = 0$ deb, agar darajali qator barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning yaqinlashish radiusi $r = \infty$ deb qaraladi.

Endi darajali qatorning yaqinlashish radiusini topish imkonini beradigan teoremani keltiramiz.

1-teorema. Aytaylik (1) darajali qator berilgan bo'lsin. Bu qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

bo‘lib, L-chekli son, $L \neq 0$ bo‘lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$r = \frac{1}{L}$$

bo‘ladi.

$\lhd$(1) qator hadlarning absolyut qiymatidan tuzilgan ushbu

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + \ldots + |a_n||x^n| + \ldots \tag{2}$$

qatorni olib, unga Dalamber alomatini qo‘llaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x|$$

Ravshanki, (2) qator $L|x| < 1$, ya'ni

$$|x| < \frac{1}{L}$$

da yaqinlashuvchi, (2) qator $L|x| > 1$, ya'ni

$$|x| > \frac{1}{L}$$

da uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, (1) qator $|x| < \frac{1}{L}$ da yaqinlashuvchi, $|x| > \frac{1}{L}$ da uzoqlashuvchi bo'lib, undan (1) qatorning yaqinlashish radiusi $r = \frac{1}{L}$ ekanligi kelib chiqadi.$\triangleright$

Eslatma. (1) darajali qator $x = r$, $x = -r$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'lishi ham mumkin, uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. Uni qo'shimcha tekshirish bilan aniqlanadi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali topilsin.

$\triangleleft$ Ravshanki,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad a_{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

bo'lib,

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1$$

bo‘ladi. Demak berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$, yaqinlashish intervali $(-1,1)$.

Agar $x=1$ bo‘lsa, berilgan qator ushbu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

ko‘rinishida bo‘lib, u (garmonik qator bo‘lgani uchun) uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Agar $x=-1$ bo‘lsa, berilgan qator ushbu

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$$

ko‘rinishda bo‘lib, u (Leybnits teoremasiga ko‘ra) yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlanish sohasi $[-1,1)$.$\triangleright$

(x-a) ning darajalari bo'yicha qatorlar.

Endi $x-a$ ayirmaning darajalari bo'yicha

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n \ldots \qquad (1)$$

ko'rinishdagi funksional qatorni qaraymiz, bu ham darajali qator deyiladi, bundagi a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ..., o'zgarmas sonlar qatorning koeffitsiyentlari deyiladi. Bu $x-a$ ikkihadning darajalari bo'yicha joylashgan darajali qatordir.

$a=0$ bo'lsa, x ning darajalari bo'yicha joylashgan qatorni hosil qilamiz. (1) qatorning yaqinlashish sohasini aniqlash uchun $x-a$ ni t bilan almashtiramiz:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots \qquad (2)$$

bu qator yaqinlashish intervaliga ega bo‘lsin. Bu holda t ning $-R<x-a<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (1) qatorning yaqinlashuvchanligi kelib chiqadi. $|t|>R$ bo‘lganda, (2) qator uzoqlashuvchi bo‘lganligi uchun $|x-a|>R$ bo‘lganda (1) qator ham uzoqlashadi. Bundan ko‘rinadiki, (1) qatorning yaqinlashish intervali markazi a nuqtada va uzunligi $2R$ bo‘lgan intervaldan iborat bo‘ladi. Bu intervalning tashqarisida esa uzoqlashuvchidir. Yaqinlashish intervalining oxirlarida yaqinlashish yoki uzoqlashish ro‘y berishi mumkin.

M i s o l. $\frac{(x-2)}{1\cdot 2}+\frac{(x-2)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-2)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. $x-2=t$ deb olsak, qator quyidagi ko'rinishni oladi: $\frac{t}{1\cdot 2}+\frac{t^2}{2\cdot 2^2}+\frac{t^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{t^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$ bu qatorni absolut qiymatlari-

dan tuzilgan $\frac{|t|}{1\cdot 2}+\frac{|t^2|}{2\cdot 2^2}+\frac{|t^3|}{3\cdot 2^3}\ldots+\frac{|t^n|}{n\cdot 2^n}+\ldots$ qatorni qaraymiz.

Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$U_n=\frac{|t^n|}{n\cdot 2^n}; \quad U_{n+1}=\frac{|t^{n+1}|}{(n+1)\cdot 2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|t^{n+1}|\cdot n\cdot 2^n}{|t^n|(n+1)2^{n+1}}=\frac{|t|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|t|}{2}.$$

Dalamber alomatiga ko'ra $\frac{|t|}{2} < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi, $\frac{|t|}{2} > 1$ bo'lsa, uzoqlashadi. Demak, berilgan qator $\frac{|x-2|}{2} < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi va $\frac{|x-2|}{2} > 1$ bo'lganda uzoqlashuvchidir. Bundan ko'rinadiki, berilgan qator markazi $a=2$ nuqtada bo'lgan $0<x<4$ intervalda yaqinlashadi.

Endi intervalning oxirida qatorning yaqinlashishiga tekshiramiz: $x=0$ bo'lganda $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$ ko'rinishdagi qatorga ega bo'lamiz. Bu ishoralari navbatlashuvchi qator bo'lib, shartli yaqinlashuvchidir. $x=4$ bo'lsa, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ ko'rinishdagi garmonik qatorga ega bo'lamiz, bu esa uzoqlashuvchi qator. Shunday qilib, berilgan qator $0 \le x \le 4$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashadi.

Teylor qatori.

Ma'luimki, $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

bo'lib,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

uning qoldiq hadi bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya

$$(x_0-r, x_0+r)$$

da istalgan tartibli hosilaga ega bo'lsin. Bu hol yuqoridagi Teylor formulasidagi hadlarning sonini har qancha katta qilib olish imkonini beradi. Natijada $x - x_0$ ning darajalari bo'yicha ushbu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... \quad (1)$$

darajali qator hosil bo'ladi. Bu darajali qatorning koeffitsiyentlari $f(x)$ funksiya va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalangan:

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, ...$$

(1) qator Teylor qatori deyiladi.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervalda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo‘lib, barcha hosilalar absolyut qiymati bo‘yicha $(x_0 - r, x_0 + r)$ oraliqda bitta o‘zgarmas sondan kichik yoki teng bo‘lsa,

$$|f^n(x)| \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

u holda

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

bo‘ladi.

Makloren qatori. Ba’zi elementar funksiyalarni makloren qatoriga yoyish

Xususan, (1) Teylor qatorida $x_0 = 0$ deyilsa, u holda

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{3}$$

qator hosil bo‘ladi.

(3) qator **Makloren qatori** deyiladi.

Ushbu $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilishini keltiramiz:

1) $f(x) = e^x$ **bo'lsin.** Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi $f^{(n)}(x) = e^x$ bo'lib,

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad (n = 1, 2, 3...)$$

bo'ladi. Ayni paytda ixtiyoriy $[-A, A]$ $(A > 0)$ oraliqda

$$|f^{(n)}(x)| = e^x < e^A \quad (n = 1, 2, ...)$$

tengsizlik bajariladi. Demak, 1-teoremaga ko'ra

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad (1)$$

yoyilma barcha x larda o'rinli;

2) $f(x) = \sin x$ **bo'lsin.** Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'lib,

$$f(0) = 0, \;\; f^{(n)}(0) = 0 \;\; (n = 2m, \;\; m \in \mathbb{N})$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^m \;\; (n = 2m + 1, \;\; m \in \mathbb{N})$$

bo'ladi. Bu funksiyaning hosilalari uchun

$$|f^{((n))}(x)| \leq 1$$

tengsizlik bajariladi. Demak, 1-teoremaga ko'ra

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

yoyilma barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ da o'rinli bo'ladi;

3) $f(x) = \cos x$ **bo'lsin.** Bu holda yuqoridagiga o'xshash

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

yoyilma barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ da o'rinli bo'ladi;

Binomial qator.

Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x) = (1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... + ...$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga ***binomial qator*** deyiladi. U $(-1,1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Adabiyotlar:

1. Soatov Yo. U. Oliy matematika 2-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1994 y.

2. Soatov Yo. U. Oliy matematika 3-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1996 y.

3. E.F.Fayziboyev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudoyorov, Oliy matematikadan misol va masalalar to’plami. Toshkent “O’qituvchi” 2005 y.

4. Farxod Rajabov, Matematika, “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati” Toshkent, 2007 y.

5. V.E.Shneyder, A.I.Slutskiy, A.S.Shumov Oliy matematika qisqa kursi II-qism, Toshkent “o’qituvchi” 1987 y.

6. https://moodle.tiiame.uz/course/view.php?id=899

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI ASSISTENTI

☎ + 998 93 588 37 89

q.juvanov@tiiame.uz