TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

MAVZU 11

Ikkinchi tartibli o’zgarmas koeffisiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar. Ikkinchi tartibli o’zgarmas koeffisiyentli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi.

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

Oiy matematika kafedrasi assistenti

Reja:

- **Ikkinchi tartibli o’zgarmas koeffisiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.**
- **Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar , o’zgarmas sonni variatsiyalash usuli.**

Ikkinchi tartibli o’zgarmas koeffisiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko‘p masalalari $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$ tenglamada $p(x)$ *va* $g(x)$ funksiyalar o‘zgarmas sonlar bo‘lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o‘zgarmas koeffitsientlar bo‘lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y''+py'+gy=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib p, g lar o‘zgarmas koeffitsientlar. Bunday ko‘rinishdagi tenglamaga ***ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. (1) ko‘rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (1) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog‘lanmagan yechimlari bo‘lsa,

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \qquad (2)$$

Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffisiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.

funksiya uning umumiy yechimi bo'ladi, bu yerda C_1 *va* C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Shunday qilib, (1) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog'lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(1) tenglamaning yechimini $y = e^{kx}$, ko'rinishda izlaymiz, bu yerda k – noma'lum son. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, bo'lib,(1) tenglamadan

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + ge^{kx} = 0 \;\; yoki \;\; k^2 + pk + g = 0, \;\; (e^{kx} \neq 0) \qquad (3)$$

bo'ladi. (3) tenglik bajarilsa $y = e^{kx}$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'ladi.

(3) tenglamaga (1) differensial tenglamaning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo'lib, bunda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

Ikkinchi tartibli o’zgarmas koeffisiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.

1) k_1 *va* k_2 lar haqiqiy va har xil, ya’ni $k_1 \neq k_2$;

2) k_1 *va* k_2 haqiqiy va teng (karrali), ya’ni $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$;

3) k_1 *va* k_2 kompleks sonlar, ya’ni $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimlar bo‘lib, umumiy yechim

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffisiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.

1-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad k_1 = 2; \qquad k_2 = 3$$

bo'lib, umumiy yechim (4) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo'ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng $k_1 = k_2$ *va* $y_1(x) = e^{k_1 x}$ bitta xususiy yechim bo'ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = xe^{k_1 x}$ ko'rinishda tanlaymiz.

Bu funksiya ham (1) tenglamaning yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = xe^{k_1x}, \quad y_2' = e^{k_1x}(1 + k_1x), \quad y_2''(x) = e^{k_1x}(k_1{}^2 + 2k_1)$$

ifodalarni (1) tenglamaga qo‘yib

$$x(k_1{}^2 + pk_1 + g) + (2k_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. k_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no‘lga teng, $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$ bo‘lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan nolga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{k_1x}$ funksiya ham (1) tenglamaning yechimi bo‘ladi, hamda $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog‘lanmagan.

Shunday qilib,

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} \qquad (5)$$

umumiy yechim bo‘ladi.

2-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

bo‘lib, ildizlari $k_1 = k_2 = -3$ bo‘ladi. Xarakteristik tenglamaning ildizlari o‘zaro teng, (5) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo'shma:
$k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ bo'lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x}$$

ko'rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - ie^{\alpha x} \sin \beta x$$

tengliklar hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad va \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

funksiyalar ham (1) tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli.

Demak,

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (6)$$

(1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$k_1 = -3 + 2i$, $k_2 = -3 - 2i$ bo'ladi. Bu ildizlar kompleks qo'shma bo'lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3$, $\beta = 2$ ekanligini hisobga olib (6) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

bo'ladi.

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar , o’zgarmas sonni variatsiyalash usuli.

Ta’rif. Ushbu

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (7)$$

ko‘rinishda tenglama ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama deyiladi.
Bu yerda p, g lar o‘zgarmas koeffitsientlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Ushbu ko’rinishdagi tenglamani yechishning 2 xil usuli, *o’zgarmas koeffitsientlar usuli* va *o’zgarmas sonni variatsialash usuli* mavjud.

O’zgarmas sonni variatsiyalash usuli. Bu usul umumiy bo’lib quyidagicha tahlil qilinadi. Agar y_1 va y_2 lar $y'' + py' + gy = 0$ tenglamaning chiziqli bog’liqsiz xususiy yechimlari bo’lsa $y'' + py' + gy = f(x)$ tenglamaning

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar , o’zgarmas sonni variatsiyalash usuli.

umumiy yechimi $y = Ay_1 + By_2$ ko’rinishda bo’ladi, bu yerda A va B lar x ning funksiyasi bo’lib,

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0, \\ A'y_1' + B'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (8)$$

sistemani qanoatlantiradi.

Bundan $A' = -\dfrac{y_2 f(x)}{W}$; $B' = \dfrac{y_1 f(x)}{W}$; $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar , o’zgarmas sonni variatsiyalash usuli.

4-misol. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ differensial tenglamani yeching.

$y'' - 2y' + y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topib olamiz.

$y = e^{kx}$ belgilash orqali $k^2 - 2k + 1 = 0$ xarakteristik tenglamasini tuzib olamiz va uning ildizlari $k = 1$ ekanligini topamiz.

Bir jinsli tenglamaning xususiy yechimlari $y_1 = e^x$ va $y_2 = xe^x$ ko’rinishda bo’ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini $y = Ay_1 + By_2$ ko’rinishda qidiramiz. (8) formulaga asosan

$$\begin{cases} A'e^x + B'xe^x = 0, \\ A'e^x + B'(e^x + xe^x) = e^{2x} \end{cases}, \quad A' = -\frac{y_2 f(x)}{W}; \quad B' = \frac{y_1 f(x)}{W}; \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar , o’zgarmas sonni variatsiyalash usuli.

formulalarga asosan

$$W=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}=e^{2x}+xe^{2x}-xe^{2x}=e^{2x},$$

$$A'=-\frac{xe^x\cdot e^{2x}}{e^{2x}}=-xe^x;\quad B'=\frac{e^x\cdot e^{2x}}{e^{2x}}=e^x\ ,$$

bundan

$A=-\int xe^x dx=-xe^x+e^x+C_1;\quad B=\int e^x dx=e^x+C_2$ ni topib olamiz.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y=Ay_1+By_2=(-xe^x+e^x+C_1)e^x+(e^x+C_2)xe^x=$$
$$=-xe^{2x}+e^{2x}+C_1e^x+xe^{2x}+C_2xe^x=e^x(C_1+C_2x)+e^{2x}$$

Adabiyotlar:

1. Soatov Yo. U. Oliy matematika 2-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1994 y.

2. Soatov Yo. U. Oliy matematika 3-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1996 y.

3. E.F.Fayziboyev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudoyorov, Oliy matematikadan misol va masalalar to’plami. Toshkent “O’qituvchi” 2005 y.

4. Farxod Rajabov, Matematika, “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati” Toshkent, 2007 y.

5. N.S.Piskunov, Differensial va integral hisob 2-qism, Toshkent “O’qituvchi” 1974 y.

6. https://moodle.tiiame.uz/course/view.php?id=899

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI ASSISTENTI

☎ + 998 93 588 37 89

✉ q.juvanov@tiiame.uz