TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

MAVZU 10

Tartibini pasaytirish mumkin bo‘lgan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar. Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

Oiy matematika kafedrasi assistenti

Reja:

- $F(x, y', y'') = 0$ **ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.**
- $F(y, y', y'') = 0$ **(erkli o‘zgaruvchi oshkor qatnashmagan) ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.**
- **Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.**

$F(x, y', y'') = 0$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar.

$F(x, y', y'') = 0$ tenglamada tarkibida y oshkor holda qatnashmaydi. Bu tenglama $y' = p,\ \ y'' = \frac{dp}{dx}$ almashtirish orqali $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ birinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

1-misol. $y'' = \frac{y'}{x} + x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $y' = p$ bilan almashtirib olsak

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x \text{ yoki } p' - \frac{1}{x} p = x$$

birinchi tartibli chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani

$P = e^{-\int P(X)dx}\left[C + \int e^{\int P(X)dx} Q(X)dx\right]$ Chiziqli differensial tenglamani yechish

$F\left(x, y', y''\right) = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.

formulasiga asosan :

$$P = e^{\int \frac{1}{x} dx}\left[C_1 + \int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx\right] = e^{\ln x}\left[C_1 + \int x e^{-\ln x} dx\right] = x(C_1 + \int x e^{-\ln x} dx) =$$

$$= x(C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x(C_1 + x), \quad p = y' = C_1 x + x^2, \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2$$

umumiy yechimni olamiz.

$F\left(x, y', y''\right) = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.

2-misol. $y'' = y' ctgx$ differensial tengamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Faraz qilaylik, $z = y'$. U holda $y'' = (y')' = z'$, berilgan tenglamaning ko`rinishi $z' = z \cdot ctgx, z \neq 0$ bo`lsin. $\frac{dz}{z} = ctgx \cdot dx$ yoki $\frac{dz}{z} = \frac{d \sin x}{\sin x}$ hadma–had integrallab, $\ln|z| = \ln|\sin x| + \ln c_1$, bu yerda $c_1 > 0$, yoki $z = c_1 \sin x$.

$z = 0$ tenglamaning yechimi bo`lgani uchun, uning ixtiyoriy yechimi $z = c_1 \sin x$, c_1 ixtiyoriy son.

$z = \frac{dy}{dx}$ bo`lgani uchun $dy = c_1 \sin x \, dx$. Oxirgi tenglikni integrallab $y = - c_1 \cos x + c_2$ ni olamiz.

$F\left(y, y', y''\right)=0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.

2. $F(y, y', y'')=0$ ***(erkli o‘zgaruvchi oshkor qatnashmagan) bunday differensial tenglamaning*** umumiy yechimini $y'=p(y)$ almashtirish olib, birinchi tartibli tenglamaga keltirib yechim topiladi.

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}=p\cdot p'$$

bo‘ladi.

3-misol. $yy''-2y'^2=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y'=p(y)$ almashtirish olib, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ ekanligini hisobga olsak,

$yp\dfrac{dp}{dy}-2p^2=0$ tenglama hosil bo‘ladi. Bu birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama:

$F(y, y', y'') = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.

$$\frac{ydp}{dy} = 2p \quad yoki \quad \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y},$$

oxirgi tenglamani integrallab,

$$\ln p = 2\ln y + \ln C_1$$

bundan

$$p = C_1 y^2$$

bo‘ladi. $p = \dfrac{dy}{dx}$ ni hisobga olsak ,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx$$

o‘ladi.Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \qquad yoki \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

bo‘ladi.Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

$F(y, y', y'')=0$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar.

4-misol. $y''=\dfrac{1+y'^2}{y}$ tenglamani yeching.

Yechish. $y'=p(y),\ y''=p\cdot p'$ ni o'rniga qo'yishni amalga oshirsak, tenglama

$$p\cdot p'=\frac{1+p^2}{y}$$

ko'rinishga keladi. Bu- o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O'zgaruvchilarini ajratib va integrallab, topamiz:

$$\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y} \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{2}\ln\left|1+p^2\right|=\ln|y|+\ln C_1$$

bu yerdan

$$1+p^2=C_1^2y^2 \quad \text{yoki} \quad p=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}.$$

$F\left(y, y', y''\right) = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.

y o’zgaruvchiga qaytsak

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1} \text{ yoki } \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx\,.$$

Bundan,

$$\frac{1}{C_1} \ln\left|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right| = \pm(x + C_2)$$

Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.

Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko‘p masalalarini yechish *ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga* keltiriladi.

Differensial tenglamada noma’lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. ***Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama*** quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (4)$$

bu yerda y noma’lum funksiya, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ lar biror (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x)=0$ bo‘lsa, (4) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x)\neq 0$ **bo‘lsa bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog‘langan va chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Shunday α_1, α_2 o‘zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (5)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog‘langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘langan bo‘lsa, ular proporsianal bo‘ladi, ya’ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo‘lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \quad yoki \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

bo‘ladi.

Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ *va* $y_2 = x^2$ funksiyalar chiziqli bog‘langan, chunki $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{4x^2}{x^2} = 4.$

Ta’rif. Agar n ta $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ bir vaqtda nolga teng bo’lmagan sonlar mavjud bo’lib, $[a;b]$ kesmada barcha x lar uchun

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0 \qquad (6)$$

ayniy munosabat bajarilsa $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar sistemasi $[a;b]$ kesmada *chiziqli bog’liq* deyiladi.

Aks holda, ya’ni (6) ayniy munosabat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ bo’lganda bajarilsa, u holda $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar sistemasi *chiziqli erkli* deyiladi.

Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.

Aks holda, ya'ni (6) ayniy munosabat faqat $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ bo'lganda bajarilsa, u holda $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar sistemasi *chiziqli erkli* deyiladi.

Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar $(n$-$1)$-marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ulardan tuzilgan ushbu

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinant *Vronskiy determinanti* yoki *vronskian* deyiladi. Vronskian funksiyalar sistemasining chiziqli bog'liqligi yoki chiziqli erkliligini tekshirish vositasi hisoblanadi. Uning qo'llanishi quydagi ikkita teoremaga asoslangan.

1-teorema. Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda sistemaning vronskiani aynan nolga teng bo'ladi.

Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.

2-teorema. Agar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ chiziqli erkli funksiyalar bo'lib, ular birorta n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamani qanoatlantirsa, u holda bunday sistemaning vronskiani hech bir nuqtada nolga aylanmaydi.

2. n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning $y_1, y_2, \ldots, y_n$ xususiy yechimlar sistemasi n ta chiziqli erkli funksiyadan iborat bo'lsa, bu sistemani *fundamental sistema* deymiz.

5-misol. Berilgan yechimlarning fundamental sistemalariga mos bir jinsli differensial tenglamalarni tuzing.

$$a) \quad e^{-x}, e^{x}; \quad b) \quad x^3, x^4;$$

Yechish. a) Izlanayotgan tenglamaning ixtiyoriy yechimi (uni y deb belgilaymiz) e^{-x}, e^{x} larga chiziqli bog'liq bo'ladi. Shu sababli ularning Vronskiy determinanti

Chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Vronskiy determinanti.

$$W(e^{-x}, e^{x}, y) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & y \\ -e^{-x} & e^{x} & y' \\ e^{-x} & e^{x} & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Bundan $y''-y=0$ ko'rinishdagi izlanayotgan tenglama hosil bo'ladi.

b) Izlanayotgan tenglamani a) misoldagiga o'xshash tuzamiz:

$$W(x^3, x^4, y) = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 & y \\ 3x^2 & 4x^3 & y' \\ 6x & 12x^2 & y'' \end{vmatrix} =$$

$$= 4x^6y'' + 36x^4y + 6x^5y' - 24x^4y - 12x^5y' - 3x^6y'' = 0$$

$$x^6y'' - 6x^5y' + 12x^4y = 0, \quad x^2y'' - 6xy' + 12y = 0.$$

Adabiyotlar:

1. Soatov Yo. U. Oliy matematika 2-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1994 y.

2. Soatov Yo. U. Oliy matematika 3-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1996 y.

3. E.F.Fayziboyev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudoyorov, Oliy matematikadan misol va masalalar to’plami. Toshkent “O’qituvchi” 2005 y.

4. Farxod Rajabov, Matematika, “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati” Toshkent, 2007 y.

5. N.S.Piskunov, Differensial va integral hisob 2-qism, Toshkent “O’qituvchi” 1974 y.

6. https://moodle.tiiame.uz/course/view.php?id=899

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI ASSISTENTI

☎ + 998 93 588 37 89

✉ q.juvanov@tiiame.uz