TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

MAVZU 15

Qator yaqinlashishining Dalamber , Koshi alomatlari va Integral alomatlari. Ishorasi navbatlanuvchi qatorlar. Leybnits teoremasi.

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

Oiy matematika kafedrasi assistenti

Reja:

- Dalamber alomati.
- Koshi alomati.
- Koshining integral alomati.
- Ishorasi almashuvchi qatorlar. Leybnits teoremasi

Qator yaqinlashishining Dalamber alomati.

Qator yaqinlashishi yoki uzoqlashishini boshqa qatorlarga solishtirmasdan, balki uning hadlaridan tuzilgan ba’zi ko’rinishdagi ifodalarning $n \to \infty$ dagi limitga qarab aniqlovchi alomatlar ishlab chiqilgan. Shulardan ba’zilarini keltirib o’tamiz.

1. Dalamber alomati: Aytaylik $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator bo’lib

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$ limit mavjud bo‘lsin.

U xolda:

1) agar $b<1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;
2) agar $b>1$ bo’lsa, qator uzoqlashuvchi bo’ladi.

Demak, Dalamber alomatini $b=1$ da qo'llab bo'lmaydi. Bunday hollarda qatorni boshqa alomatlar yordamida tekshirish kerak.

1-misol. Quyidagi $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish: Qatorning umumiy hadi

$$a_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ....\cdot (2n-1)}=\frac{n!}{(2n-1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{(2n-1)!(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)!}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

Demak berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

2-misol. Garmonik qatorni yaqinlashuvchilikka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ tekshiring.

Yechish. Bu yerda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Ya'ni $b=1$. Eslatma asosan bu qatorni boshqa usul bilan tekshirish kerak bo'ladi.

3-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish: Bu yerda

$$a_n=\frac{3^n}{n};\ a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{n+1}\quad \text{va}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3n}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=3>1$$

Shu sababli Dalamber alomatiga ko'ra qator uzoqlashadi,

4-misol. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish: Bu qatorda

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ va } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

Lekin bu qatorning yaqinlashuvchi ekanligini bevosita qator yaqinlashishi ta'rifidan ham keltirib chiqarish mumkin.

haqiqatdan:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1 = S$$

chekli son. Ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ yaqinlashuvchi qator va yig'indisi $S = 1$.

Koshi alomati

2. Koshi alomati: Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorda $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Limit mavjud bo‘lsa u xolda:

1. $q<1$ bo’lganda qator yaqinlashuvchi,
2. $q>1$ bo’lganda qator uzoqlashuvchi bo’ladi.

Bu yerda ham $q=1$ bo’lib qolsa, qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ochiq qoladi.

Misollar:

5-misol. $\frac{1}{\ell n 2} + \frac{1}{\ell n^2 3} + \frac{1}{\ell n^3 4} + \cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish: Qatorning umumiy xadi.

$a_n = \frac{1}{\ell n^n (n+1)}$ ko’rinishga ega.

Bundan:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1,$$ demak berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

6-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(4n-1)}{(n+2)}\right)^n$ qator tekshirilsin.

Yechish:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+2}=4>1,$$ ya'ni berilgan qator uzoqlashuvchi.

Koshining integral alomati

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qator berilgan bulsa, uning umumiy xadini natural sonlar tuplamida aniqlangan $a_n = f(n)$ funksiya deb qarash mumkin, ya’ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Shu $f(x)$ funksiyani $[1, \infty)$ oralikda qaraylik.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x \geq 1$ bo’lganda musbat uzluksiz funksiya bo‘lib, $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral chekli qiymat qabul qilsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo’ladi va shu xosmas integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashuvchi bo’ladi.

7-**Misol.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: Qator umumiy hadi.

$a_n = f(n) = \frac{1}{n^2}$ ko'rinishda.

Qatorga mos xosmas integralni hisoblaymiz.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^N\right] = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}+1\right] = 1 < +\infty$$

Demak: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchi qatordir.

8-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ -garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir.

Yechish: Qator umumiy xadi,

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n}$$

Bunga kura:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\left[\ln x\int_1^{N}\right] = \lim_{N\to\infty}[\ln N + 0] = \infty$$

haqiqatdan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - garmonik qator uzoqlashuvchi qator ekan.

Ishorasi almashinuvchi qatorlar

Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik elementlari musbat bo’lsa

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

ko’rinishidagi qator ishorasi almashuvchan qator deyiladi.

Leybnis teoremasi: Agar (1) ishorasi almashuvchan qatorda $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots\ldots > a_n > \ldots\ldots\ldots$ bo’lib, uning umumiy xadi nolga intilsa $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0)$, u xolda u yaqinlashuvchi qator bo’ladi.

Isboti: Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ chekli limit ekanligini ko’rsata olsak teorema o’rinligi kelib chiqadi. Bu ishni quyidagi amalga oshiramiz.

Avval: S_{2m} xususiy yig’indini olib, uni

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

ko’rinishda yozib olaylik. Teorema shartidan

$a_{k-1} - a_k > 0$ va $S_{2m} > 0$ ekanligini hamda m o'sishi bilan S_{2m} ham o'suvchiligini aniqlaymiz.

Shu bilan birga

Endi S_{2m} yigindisining

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$ ko'rinishidan $S_{2m} < a_1$ ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib $\{S_{2m}\}$ yuqoridan chegaralangan monoton o'suvchi ketma-ketlik ekan.

Bunday S_{2m} ketma-ketlik $m \to \infty$ da chekli S limitga bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Endi $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ tenglikni va teoramaning $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ shartini hisobga olsak,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

tenglikka ega bo’lamiz.

Shunday qilib n juftmi yoki toqmi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ chekli yechimi mavjud. Demak (1) yaqinlashuvchi qatordir.

Misollar.

1. Quyidagi

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+\cdots$$

qator yaqinlashuvchi qatordir.

Chunki,

1) $\frac{1}{3}>\frac{2}{9}>\frac{1}{9}>\frac{4}{81}>\cdots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

2. Ushbu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Qatorda Leybnis teoremasi shartlari bajarilgani sababli, u ham yaqinlashuvchi qator bo’ladi.

Adabiyotlar:

1. Soatov Yo. U. Oliy matematika 2-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1994 y.

2. Soatov Yo. U. Oliy matematika 3-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1996 y.

3. E.F.Fayziboyev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudoyorov, Oliy matematikadan misol va masalalar to’plami. Toshkent “O’qituvchi” 2005 y.

4. Farxod Rajabov, Matematika, “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati” Toshkent, 2007 y.

5. V.E.Shneyder, A.I.Slutskiy, A.S.Shumov Oliy matematika qisqa kursi II-qism, Toshkent “o’qituvchi” 1987 y.

6. https://moodle.tiiame.uz/course/view.php?id=899

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI ASSISTENTI

+ 998 93 588 37 89

q.juvanov@tiiame.uz