TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

MAVZU 14

Sonli qatorlar. Yaqinlashishning zaruriy sharti. Musbat xadli qatorlar, Solishtirish teoremalari.

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

Oiy matematika kafedrasi assistenti

Reja:

- **Sonli qatorlar**

- **Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.**

- **Musbat hadli qatorlar. Sonli qatorlarni taqqoslash alomatlari.**

Sonli qatorlar

1-Ta’rif. Sonli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

ifodaga sonli qator deyiladi.

Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ qator hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi.

Yukoridagi ta’rifdan kurinadiki qator ma’lum qonuniyat bilan tuzilgan cheksizta qo’shiluvchili yig’indi ekan.

qaralayotgan (1) qatorning chekli sondagi hadlaridan tuzilgan.

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \ldots S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

yig’indilariga shu qatorning xususiy yig’indilari deyiladi.

Agar qator qo'shiluvchilari cheksizligini e'tiborga olsak

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ xususiy yig'indilar ham o'z navbatida ketma-ketlikni tashkil etishini ko'ramiz.

2-Ta'rif. Agar xususiy yig'indilarning $\{S_n\}$ ketma-ketligi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limitga ega bo'lsa, u xolda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator, limit S esa qator yig'indisi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

3-Ta'rif. Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limiti cheksiz yoki mavjud emas), u holda (1) uzoqlashuvchi qator deyiladi.

1-Misol. Quyidagi

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

qator tekshirilsin. Avval xususiy yig'indilarni ko'raylik

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$$

....

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Bundan $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})=1<\infty$ xosil qilamiz. Demak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi $S=1$ ekan.

2-Misol: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ qatorning yig‘indisini toping.

Yechimi:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}$$

Yaqinlashuvchi qatorlarning ba’zi xossalarning keltiramiz.
Deylik

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\equiv a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (4)$$

qator berilgan bo’lsin.

Uning hadlari orqali tuzilgan

$$a_m + a_{m+1} + \ldots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

ko'rinishdagi qatorga (4) qatorning m-qoldig'i deyiladi. U ham o'z navbatida qatordir.

1-Teorema. Agar (4) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning xar qanday koldigi ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha qator qoldig'i yaqinlashuvchi bo'lsa, uning o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2-Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi, $k \cdot S$ bo'ladi.

Bu teorema quyidagicha ham talqin qilinadi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lsa $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bo'ladi ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchi cheksiz yig'indi belgisidan tashkariga chiqarish mumkin.

3-Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi qatorlar bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ qatorlar ham yaqinlashuvchi qatorlar bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu teorema sharti bajarilsa qo'shilayotgan qatorlar soni cheklita bo'lganda ham uning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.

4-Teorema. Agar $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda n→∞ da uning a_n umumiy hadi nolga intiladi.

4-Misol: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \cdots,$ $a_n = \frac{n}{3n-1}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} > 0$

zaruriy shart bajarilmadi.

5-Misol: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1},$ $a_n = \frac{2n}{n^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$ zaruriy shart bajarildi.

Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lganda xar doim ham $\sum\limits_{n=\infty}^{n} a_n$ yaqinlashuvchi qator bulavermaydi.

Masalan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4}+\cdots$ garmonik qator uchun $\lim a_u = \frac{1}{n} = 0$ shart bajarilsa-da, bu garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. (Biz bu tasdiqning isbotini keyinrok keltiramiz).

Musbat xadli qatorlar. Sonli qatorlarni taqqoslash alomatlari.

4-Ta'rif: Agar barcha $n=1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n > 0$ bo'lsa,

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat xadli qator deyiladi.

Bizga ikkita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat xadli qatorlar berilgan bo'lsin.

5-Teorema: Agar barcha $n=1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n \le b_n$, bo'lib $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

6-Misol. quyidagi:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

qator yaqinlashuvchi qatoridir. Haqiqatdan agar:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

qatorni olsak, bu qatorlar uchun

$$\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{2^n};(n=1,2,3\cdots)$$

ekanligini kuramiz. Ya'ni keyingi qator ikkinchi hadidan boshlab, birinchi hadi $\frac{1}{2^2}$ va maxraji $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan, cheksiz kamayuvchi geometrik progresiyaning barcha hadlari yig'indisidan iborat. Shu sababli bu qator yaqinlashuvchi qator bo'lib yig'indisi $1+\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=1\frac{1}{2}$ ga tengdir.

7-M i s o l: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ qatorni tekshiring.

Yechish: Yordamchi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^{n+1}}$ qatorni qaraymiz.

Bu qator geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan ($\left(q=\frac{1}{2}\right)$ qator va u yaqinlashuvchidir.

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\leq\frac{2}{2^{n+1}}$$

Demak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ qator yaqinlashuvchi ekan.

6-Teorema: Agar barcha $n=1,2,3,\ldots$ lar uchun $a_n \le b_n$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlanuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ham uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

8-Misol: quyidagi

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ qator tekshirilsin.

Biz $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ garmonik qatorni olaylik $n=1,2,3,\ldots$ bo‘lganda $\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ ekanligini ko‘ramiz, hamda garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. Shuning uchun teoremaga asosan berilgan qator uzoqlashuvchidir.

Adabiyotlar:

1. Soatov Yo. U. Oliy matematika 1-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1992 y.

2. Soatov Yo. U. Oliy matematika 3-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1996 y.

3. E.F.Fayziboyev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudoyorov, Oliy matematikadan misol va masalalar to’plami. Toshkent “O’qituvchi” 2005 y.

4. Farxod Rajabov, Matematika, “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati” Toshkent, 2007 y.

5. V.E.Shneyder, A.I.Slutskiy, A.S.Shumov Oliy matematika qisqa kursi II-qism, Toshkent “o’qituvchi” 1987 y.

6. https://moodle.tiiame.uz/course/view.php?id=899

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI ASSISTENTI

☎ + 998 93 588 37 89

✉ q.juvanov@tiiame.uz