TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: **OLIY MATEMATIKA**

MAVZU **16**

O‘zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish. Funksional qatorlar. Qatorlarni hadma-had differensiallash va integrallash.

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

Oiy matematika kafedrasi assistenti

Reja:

- **O‘zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.**
- **Funksional qator tushunchasi va funksional qatorning yaqinlashish sohasi.**
- **Funksional qatorlarni hadma-had integrallash.**
- **Funksional qatorlarni hadma-had differensiallash.**

O‘zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

1- Ta’rif: Agar sonli qatorning hadlari orasida musbatlari ham, manfiylari ham bo‘lsa, qator o‘zgaruvchan ishorali qator deb aytiladi. Shuni izoxlab aytish mumkinki, ishoralari navbatlashuvchi qatorlar o‘zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holidir.

Bizga hadlari ixtiyoriy ishorali sonlardan tashkil topgan,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

shu qator hadlari modullaridan iborat bo’lgan,

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

qator tuzaylik.

1-Teorema. (O’zgaruvchan ishorali qator yaqinlashishining yetarli sharti). Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo’lsa,

u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo’ladi.

1-M i s o l: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}$ qatorni tekshiring.

Yechimi: Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qatorni qaraymiz: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

Dalamber alomatiga asosan $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{1}\right)=\frac{1}{4}<1$- qator yaqinlashuvchi ekan, demak teoremaga asosan berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday xolatlar buladiki $\sum a_n$ yaqinlashuvchi, lekin $\sum|a_n|$ uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bunday hollarni tartibga keltiruvchi quyidagi tushunchalar kiritiladi.

2-Ta'rif. Agar berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator xam uning hadlari modullaridan tuzilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum a_n$ absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

3-Ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ uzoqlashuvchi bo'lsa, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

2-Misol: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$

Qatorni yaqinlashuvchilikka tekshing.

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ qator maxraji $q=\frac{1}{2}<1$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yigindisi sifatida yaqinlashuvchi qatordir. Demak

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

absalyut yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

3-misol. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

Qatorni yaqinlashuvchilikka tekshing.

Yechish. Bu qator ishorasi almashuvchan qator bo’lib, Leybnis teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ya’ni yaqinlashuvchi qator.

Lekin uning hadlari modullaridan tuzilgan:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

qator garmonik qator bo’lib, uning uzoqlashuvchi qator ekanligi bizga ma’lum.

Shu sababli $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ shartli yaqinlashuvchi qator ekan.

4-misol. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

bu qator maxraji $q=\frac{1}{3}$ bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lib yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Funksional qator tushunchasi va funksional qatorning yaqinlashish sohasi.

Aytaylik, ushbu

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

funksiyalar ketma-ketligidagi har bir funksiya (a, b) oraliqda berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

ifoda **funksional qator** deyiladi. (1) funksional qator qisqacha

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

kabi ham yoziladi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + ... + x^n + ..., \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + ... + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + ...$$

qatorlar funksional qatorlar bo‘ladi.

Agar x o‘zgaruvchiga biror tayin x_0, $(x_0 \in (a,b))$ qiymat berilsa, u holda (1) funksional qator sonli qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... \tag{3}$$

ga aylanadi. Masalan, (2) qator $x_0 = \frac{1}{2}$ da quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

sonli qatorga aylanadi.

Ravshanki, x oʻzgaruvchining (a, b) ga tegishli turli qiymatlarida, umuman aytganda, turli sonli qatorlar hosil boʻladi.

1-ta'rif. Agar (3) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi deyilib, x_0 nuqta esa funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi deyiladi.

Agar (3) sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator x_0 nuqtada uzoqlashuvchi deyilib, x_0 nuqta esa funksional qatorning uzoqlashish nuqtasi deyiladi.

(1) funksional qator (a, b) oraliqqa tegishli bo'lgan x o'zgaruvchining ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

2-ta'rif. x o'zgaruvchining (1) qator yaqinlashadigan barcha qiymatlaridan iborat M to'plam (1) qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi. Bu holda (1) funksional qator M to'plamda yaqinlashuvchi deb yuritiladi. Ravshanki, $M \subset (a, b)$ bo'ladi.

Funksional qatorning yaqinlashish sohalarini topishda sonli qatorlarda keltirilgan ma'lumotlardan foydalaniladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + ... + x^n + ...$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

$\triangleleft$ Bu qator hadlari mahraji $q = x$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiyani hosil qiladi. Demak, berilgan qator geometrik qator bo‘ladi. Ma’lumki, geometrik qator $|q| < 1$ da yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak, berilgan qator $|x| < 1$ da yaqinlashuvchi, uninig yaqinlashish sohasi esa $(-1, 1)$ oraliqdan iborat.$\triangleright$

2. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \ldots + \frac{n}{x^n} + \ldots$$

fuksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

$\triangleleft$ Bu qator uchun

$$u_n(x) = \frac{n}{x^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x^{n+1}}.$$

Dalamber alomatidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{x^{n+1}} : \frac{n}{x^n}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{|x|}$$

Demak, $\frac{1}{|x|} < 1$, ya'ni $|x| > 1$ da qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yaqinlashish sohasi $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ bo'ladi.$\triangleright$

Funksional qatorlarni hadlab integrallash.

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots.$$

Agar bu qatorning har bir hadi $[a, b]$ da uzluksiz bo'lib, qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa , u holda $S(x)$ funksiya $[a, b]$ da intergrallanuvchi va

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx,$$

ya'ni

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

bo'ladi.

Funksional qatorlarni hadlab differensiallash.

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi $S(x)$ bo‘lsin:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Agar bu qatorning har bir hadi $[a, b]$ da uzluksiz $u_n'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, funksiya hosilasidan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + ... + u'_n(x) + ...$$

funksional qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $S(x)$ funksiya hosilaga ega va

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

ya’ni

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$$

qator yig‘indisi topilsin.

◁ Berilgan qatorning har bir hadi uzluksiz funksiya. Bu qator hadlarining hosilalaridan tuzilgan qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} ...$$

bo‘lib, u $(-1, 1)$ da yaqinlashuvchi, yig‘indisi esa $\dfrac{1}{1-x}$ ga teng.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S(x)$$

deyilsa, u holda

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

bo‘lib,

$$\int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

bo‘ladi. Ayni paytda

$$\int_0^x S'(t)dt = S(x) - S(0) = S(x).$$

Keyingi ikki tenglikdan

$$S(x) = -\ln(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

kelib chiqadi.$\triangleright$

Adabiyotlar:

1. Soatov Yo. U. Oliy matematika 2-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1994 y.

2. Soatov Yo. U. Oliy matematika 3-tom, Toshkent “O’qituvchi’, 1996 y.

3. E.F.Fayziboyev, Z.I.Suleymenov, B.A.Xudoyorov, Oliy matematikadan misol va masalalar to’plami. Toshkent “O’qituvchi” 2005 y.

4. Farxod Rajabov, Matematika, “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati” Toshkent, 2007 y.

5. V.E.Shneyder, A.I.Slutskiy, A.S.Shumov Oliy matematika qisqa kursi II-qism, Toshkent “o’qituvchi” 1987 y.

6. https://moodle.tiiame.uz/course/view.php?id=899

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

JUVONOV QAMARIDDIN RIZOQULOVICH

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI ASSISTENTI

☎ + 998 93 588 37 89

q.juvanov@tiiame.uz