ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR

VAZIRLIGI

ILMIY AXBOROTNOMA 2026

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI

- НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК НАМАНГАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
- SCIENTIFIC BULLETIN OF NAMANGAN STATE UNIVERSITY

1

journal.namdu.uz

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

"NamDU ilmiy axborotnomasi – Научный вестник НамГУ" 2019-yildan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi Rayosati qarori bilan quyidagi fan sohalari bo'yicha OAKning dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

01.00.00-Fizika-matematika fanlari (14)
02.00.00-Kimyo fanlari (18)
03.00.00-Biologiya fanlari (17)
09.00.00-Falsafa fanlari (24)
10.00.00-Filologiya fanlari (26)
13.00.00-Pedagogika fanlari (30)

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-1]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

Abbasova Munira Obudjonovna
Namangan davlat universiteti
abbasovamunira21@gmail.com
Ergashev To'xtasin Gulamjanovich
Milliy tadqiqot universiteti "TIQXMMI"

YEVKLID FAZOSINING CHEKSIZ SOHALARIDA LAPLAS TENGLAMASI UCHUN DIRIXLE

Annotatsiya: *Ma'lumki, Laplas tenglamasi uchun doirada Dirixle masalasi juda yaxshi o'rganilgan. Mazkur ish cheksiz fazoning qismlari bo'lgan yarim fazo chorak fazo, nimchorak fazo va fazoning* $1/2^n$ *-qismida asosiy chegaraviy masalalarni o'rganishga bag'ishlangan. Qaralayotgan masalalarning bir qiymatli yechilishi ishning asosiy natijasidir. Qo'yilgan Dirixle masalasining yechimlarining yagonaligi elliptik tenglamalar uchun ekstremum prinsiridan kelib chiqadi, yechimlari oshkor ko'rinishlarda yozgan.*

Kalit so'zlar: *Laplas tenglamasi, Dirixle masalasi, Evklid fazolari, cheksiz soha.*

Аббасова Мунира Обуджоновна
Наманганский государственный университет,
Эргашев Тухтасин Гуламжанович
Национальный исследовательский университет "ТИИИМСХ",

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Аннотация: *Хорошо известно, что задача Дирихле для уравнения Лапласа в круги была широко изучена. Настоящая работа посвящена исследованию основных краевых задач в полупространстве, четвертьпространстве, получетвертьпространстве и в* $1/2^n$ *-й части пространства, которые являются частями бесконечного пространства. Основным результатом работы является существование единственного решения рассматриваемых задач. Единственность решений поставленных задач следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений, а решения выражаются в явной форме.*

Ключевые слова: *Уравнение Лапласа, задача Дирихле, евклидова пространства, бесконечной области,*

Abbasova Munira Obudjonovna
Namangan State University
Ergashev Tuhtasin Gulamjanovich
National Research University 'TIIAME',

DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN INFINITE REGIONS OF EUCLIDIC SPACE

Abstract: *Abstract: It is well known that the Dirichlet problem for the Laplace equation in the circle has been extensively studied. This work is devoted to the study of the principal boundary value problems in the half-space, quarter-space, semi-quarter-space and in the* $1/2^n$ *-th part of space, which are parts of the infinite space. The existence of a unique solution for the problems under consideration is the main result of the work. The uniqueness of the solutions to the posed problems follows from the extremum principle for elliptic equations, and the solutions are expressed in explicit form.*

Keywords: *Laplace equation, Dirichlet problem, Euclidean space, infinite domain.*

Введение

В большинстве случаев рассматривается некоторая замкнутая поверхность S, не обязательно связная, и предполагается, что S ограничивает область Ω, конечную или бесконечную. При рассмотрении как конечных, так и бесконечных областей граница области предполагается конечной; как всегда, граница состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Однако в данном исследовании рассматриваются так называемые полубесконечные области, границы которых бесконечны. Простейшими примерами полубесконечных областей являются полупространство, четвертьпространства, получетвертьпространства и, вообще говоря, $1/2^n$ -я часть m -мерного пространства.

Функция $u(x)$ называется гармонической в конечной области Ω, если она дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Функция $u(x)$ называется гармонической в бесконечной области Ω, если в каждой точке этой области, находящейся на конечном расстоянии от начала координат, функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению Лапласа и на бесконечности имеет порядок $O\left(\frac{1}{R^{m-2}}\right)$, так что при достаточно больших R выполняется неравенство:

$$|u(x)| \leq \frac{C}{R^{m-2}} \tag{1}$$

где $m > 2$, $R = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$, а C — некоторая константа.

В случае двумерной области $(m = 2)$ условие (1) означает, что гармоническая функция в бесконечной области ограничена на бесконечности.

2 Краевые задачи для уравнения Лапласа в бесконечных частях евклидова пространства

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — две точки m-мерного евклидова пространства E_m. Обозначим $r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \xi_j\right)^2}$ (2)

и рассмотрим функцию $q(x,\xi) = \frac{1}{r^{m-2}}$ (3)

предполагая, что $m > 2$. Будем также считать точку ξ неподвижной, так что $v(x,\xi)$ можно рассматривать как функцию точки x. Известно [19, Ch.11], что функция $q(x,\xi)$ разрывна при $x = \xi$, и в любой области, не содержащей точку ξ, функция $q(x,\xi)$ является гармонической. При этом на бесконечности $a(x,\xi) = O\left(\frac{1}{R^{m-2}}\right)$, если рассматриваемая область бесконечна и функция $q(x,\xi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Определим теперь функцию, гармоническую в полупространстве или, вообще, в области с бесконечной границей. Распространим определение, данное для конечной области, на этот случай: в области с бесконечной границей функция называется гармонической, если в этой области функция имеет вторые производные, непрерывные в каждой точке, и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Дополнительно введем обозначения:

$$\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2}, \qquad \rho_k = \sqrt{\sum_{j=1,\, j\neq k}^{m} x_j^2}; \tag{4}$$

$$I_k = \left\{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\right\},\ r_{I_k} = \sqrt{\sum_{j\in I_k}\left(x_j + \xi_j\right)^2 + \sum_{j\in\{1,2,\ldots,m\}\setminus I_k}\left(x_j - \xi_j\right)^2},$$

$$R_{i_s, \tilde{I}_{i_s}} = \left(r_{I_k}\right)\Big|_{\xi_s = 0},\ s \in I_k,\ \tilde{x}_k = x \setminus \{x_k\},\ \tilde{\xi}_k = \xi \setminus \{\xi_k\},\ d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_m,\ d\tilde{\xi}_k = d\xi / d\xi_k.$$

Во всех обозначениях $1 \leq k \leq n \leq m$. Примем $I_0 \equiv \varnothing$, поэтому $r_{I_k}\Big|_{k=0} = r$. Например,

$$I_1 = \left\{k : 1 \leq k \leq n\right\}, I_n = (1, 2, \ldots, n), \quad \tilde{I}_{i_s} = I_k \setminus i_s,\ 1 \leq s \leq k;$$

$$r_k = \sqrt{\left(x_k+\xi_k\right)^2+\sum\nolimits_{j=1,\,j\neq k}^{m}\left(x_j-\xi_j\right)^2},\quad 1,, k,, n, \tag{5}$$

$$r_{1,\dots,n} = \sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^{n}\left(x_j+\xi_j\right)^2+\sum\nolimits_{j=n+1}^{m}\left(x_j-\xi_j\right)^2}, \tag{6}$$

$$R_k = r_k\big|_{\xi_k=0},\ R_{k,(1,\dots,n)\backslash k} = \left(r_{1,\dots,n}\right)\big|_{\xi_k=0}. \tag{7}$$

Обозначим также частей евклидова пространства E_m:

a) полупространство – $\Omega_1 = \{x : x_1 > 0\}$;

b) четверть пространства – $\Omega_2 = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0\}$;

c) получетверть пространства – $\Omega_3 = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$;

d) $1/2^n$ -ая часть пространства – $\Omega_n = \{x : x_1 > 0,\dots, x_n > 0, n,, m\}$.

Боковые грани области Ω_n при $x_k = 0$ обозначим через

$$S_k = \{x : x_1 > 0,\dots, x_{k-1} > 0, x_{k+1} > 0,\dots, x_n > 0\},\ \ k = 1,2,\dots,n.$$

В данной работе рассматриваются явные решения задач Дирихле для уравнения Лапласа.

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \tag{8}$$

в бесконечных частях Ω_k ($k = \overline{1,n}$) евклидова пространства E_m.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в полупространстве Ω_1 обсуждаются в учебниках по уравнениям математической физике (см., например, [19, Гл.18]). Поэтому здесь такие задачи в полупространстве Ω_1 не будут рассматриваться.

3. Задача Дирихле

3.1 Постановка задачи и теорема единственности

Задача Дирихле D_n^∞. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (8) из класса функций $C\left(\overline{\Omega}_n\right)\cap C^2(\Omega_n)$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x)\Big|_{x_k=0} = \tau_k(\tilde{x}_k),\ \tilde{x}_k \in \overline{S}_k,\ k = \overline{1,n} \tag{9}$$

и условию изчезнования на бесконечности

$$\lim_{\rho\to\infty} u(x) = 0, \tag{10}$$

где $\tau_k\left(\tilde{x}_k\right)$ – заданные функции, причем

$$\tau_k\left(\tilde{x}_k\right) = O\left(\rho_k^{-\varepsilon}\right),\ \ \varepsilon > 0 \tag{11}$$

Кроме того, функции $\tau_k\left(\tilde{x}_k\right)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\tau_k(0) = \tau_j(0),\quad \tau_k(\tilde{x}_k)\Big|_{x_j=0} = \tau_j(\tilde{x}_j)\Big|_{x_k=0},\quad k\neq j,\quad j = \overline{1,n}, \tag{12}$$

Здесь $0 := (0,\dots,0) \in \mathrm{R}_{m-1}$.

Теорема 3.1 *Задача Дирихле D_n^∞ для уравнения (8) в неограниченной области Ω_n может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет тривиальное решение. Конечную часть области Ω_n, ограниченную плоскостями (боковыми гранями) $x_j = 0$, $j = \overline{1,n}$ и поверхностью

$$\sigma_n^\rho:\left\{x: x_1^2+\ldots+x_m^2=\rho^2, x_1>0,\ldots,x_n>0,-\rho<x_{n+1}<\rho,\ldots,-\rho<x_m<\rho\right\},$$

обозначим через Ω_n^ρ. Исследуем задачу D^∞ для уравнения (8) в Ω_n^ρ.

Пусть

$$\tau_k(\tilde{x}_k)=0, \tilde{x}_k\in\overline{S}_k,\quad k=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Тогда справедливость теоремы следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений [1, 2]. В самом деле, функция $u(x)$ в области $\overline{\Omega_n^\rho}$ в силу (13) свой положительный максимум и отрицательный минимум может достигнуть только на σ_n^ρ.

Пусть x – произвольная точка области Ω_n^ρ. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon>0$ и, учитывая (14), выберем ρ настолько большим, чтобы $|u(x)|<\varepsilon$ на σ_n^ρ. При достаточно большом ρ эта точка попадает в область Ω_n^ρ и потому $|u(x)|<\varepsilon$. В силу произвольности ε будем иметь $u(x)=0$. Тогда $u(x)=0$ в области $\overline{\Omega}_n$. Теорема доказана.

3.2 Существование решения задачи Дирихле

Как известно [8, гл.18], решение задачи Дирихле D_1^∞ в полупространстве Ω_1 дается формулой

$$u_0^{(1)}(x)=\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_1\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{m-1}\tau_1\left(\tilde{\xi}_1\right)\frac{1}{r_1^m}\bigg|_{\xi_1=0}d\tilde{\xi}_1.$$

Следуя работе [8], нетрудно построить решения задач Дирихле для уравнения Лапласа в соответствующих бесконечных частях евклидова пространства E_m:

в четверти пространства (в области Ω_2):

$$u_0^{(2)}(x)=\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_1\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{m-2}\tau_1\left(\tilde{\xi}_1\right)\left(\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_2^m}\right)\bigg|_{\xi_1=0}d\tilde{\xi}_1$$

$$+\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_2\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{m-2}\tau_2\left(\tilde{\xi}_2\right)\left(\frac{1}{r_2^m}-\frac{1}{r_1^m}\right)\bigg|_{\xi_2=0}d\tilde{\xi}_2;$$

в получетверти пространства (в области Ω_3):

$$u_0^{(3)}(x)=\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_1\int_0^\infty\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{m-3}\tau_1\left(\tilde{\xi}_1\right)\left(\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_2^m}-\frac{1}{r_3^m}+\frac{1}{r_{23}^m}\right)\bigg|_{\xi_1=0}d\tilde{\xi}_1$$

$$+\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_2\int_0^\infty\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{m-3}\tau_2\left(\tilde{\xi}_2\right)\left(\frac{1}{r_2^m}-\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_3^m}+\frac{1}{r_{13}^m}\right)\bigg|_{\xi_2=0}d\tilde{\xi}_2$$

$$+\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_3\int_0^\infty\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{m-3}\tau_3\left(\tilde{\xi}_3\right)\left(\frac{1}{r_3^m}-\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_2^m}+\frac{1}{r_{12}^m}\right)\bigg|_{\xi_3=0}d\tilde{\xi}_3; \tag{14}$$

в $1/16$-ой части пространства (в области Ω_4):

$$u_0^{(4)}(x)=\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_1\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty}_{m-4}\tau_1\left(\tilde{\xi}_1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_2^m}-\frac{1}{r_3^m}-\frac{1}{r_4^m}+\frac{1}{r_{23}^m}+\frac{1}{r_{24}^m}+\frac{1}{r_{34}^m}-\frac{1}{r_{234}^m}\right)\Bigg|_{\xi_1=0}d\tilde{\xi}_1$$

$$+\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty}_{m-4}\tau_2\left(\tilde{\xi}_2\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{r_2^m}-\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_3^m}-\frac{1}{r_4^m}+\frac{1}{r_{13}^m}+\frac{1}{r_{14}^m}+\frac{1}{r_{34}^m}-\frac{1}{r_{134}^m}\right)\Bigg|_{\xi_2=0}d\tilde{\xi}_2$$

$$+\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_3\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty}_{m-4}\tau_3\left(\tilde{\xi}_3\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{r_3^m}-\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_2^m}-\frac{1}{r_4^m}+\frac{1}{r_{12}^m}+\frac{1}{r_{14}^m}+\frac{1}{r_{24}^m}-\frac{1}{r_{124}^m}\right)\Bigg|_{\xi_3=0}d\tilde{\xi}_3$$

$$+\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}x_4\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\underbrace{\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty}_{m-4}\tau_4\left(\tilde{\xi}_1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{r_4^m}-\frac{1}{r_1^m}-\frac{1}{r_2^m}-\frac{1}{r_3^m}+\frac{1}{r_{12}^m}+\frac{1}{r_{13}^m}+\frac{1}{r_{23}^m}-\frac{1}{r_{123}^m}\right)\Bigg|_{\xi_4=0}d\tilde{\xi}_4; \qquad (15)$$

и, вообще, в $1/2^n$ -ой части пространства (в области Ω_n):

$$u_0^{(n)}(x)=\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}\sum_{k=1}^n x_k\underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n-1}\underbrace{\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty}_{m-n}\tau_k\left(\tilde{\xi}_k\right)\sum_{s=0,s\neq k}^n(-1)^{s_k}\sum_{i_1,\dots,i_s\in\tilde{I}_{i_k}}\frac{1}{r_{i_1,\dots,i_s}^m}\Bigg|_{\xi_k=0}d\tilde{\xi}_k, \qquad (16)$$

где $$s_k=\begin{cases}s, & s<k,\\ s-1, & s>k.\end{cases} \qquad (17)$$

Заключение

В данной статье построить решения задач Дирихле для уравнения Лапласа в соответствующих бесконечных частях евклидова пространства E_m. Можно видеть, что единственность решения была доказана с помощью принципа экстремума.

Литература

[1] Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. (Наука, М., 1966).

[2] Миранда С. Уравнения с частными производными эллиптического типа. (Иностранная литература, Ленинград, 1957). 1973.

[3] Karimov E.T., Nieto J.J. *The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients* // Computers and Mathematics with Applications**62**, 214 – 224 (2011). DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.068

[4] Hasanov A., Karimov E.T. *Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients* // Applied Mathematics Letters. **22**, 1828 – 1832 (2009). DOI: 10.1016/j.aml.2009.07.006

[5] Ergashev T.G. *Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients* // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. **13**(1), 48– 57 (2020). DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-1-48-57

[6] Эргашев Т.Г., Тулакова З.Р. *Задача Дирихле для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами в бесконечной области* // Известия ВУЗов. М.**7**, 81– 91 (2021). DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-81-91

[7] Copson E.T. *On Hadamard's elementary solution.* // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. **69**(1), 19–27 (1970).

[8] Михлин С.Г. *Курс математической физики*. Москва:Наука.1968.

[9] Abbasova M.O., Ergashev T.G., Yuldashev T.K. *Dirichlet problem for the Laplace equation in the hyperoctant of a multidimensional ball* // Lobachevskii Journal of Mathematics **44**(3), 1072 – 1079 (2023). DOI: 10.1134/S1995080222030022

[10] Аманов Д. *Некоторые краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения в неограниченной области* // Известия АН УзССР, Серия физ. матем. н. **1**, 8 – 13 (1984).

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
01.00.00 - ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICS AND MATHEMATICS

KIMYO FANLARI
02.00.00 - ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ
CHEMICAL SCIENCES

BIOLOGIYA FANLARI
03.00.00 - БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ
BIOLOGICAL SCIENCES