О. З. Арзикулов, А. Хасанов, Т. Г. Эргашев, Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025, номер 3, 407–429

https://www.mathnet.ru/vsgtu2156

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 29, № 3. С. 407–429
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2156
EDN: YWKYZB

УДК 517.956

Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

***З. О. Арзикулов*[1]*, А. Хасанов*[2,4]*, Т. Г. Эргашев*[2,3,4]**

[1] Ферганский государственный технический университет,
Узбекистан, 150107, Фергана, ул. Ферганская, 86.
[2] Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9.
[3] Ташкентский институт инженеров ирригации
и механизации сельского хозяйства,
Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары-Ниязи, 39.
[4] Гентский университет,
Бельгия, 9000, Гент, ул. Синт-Питерснёвестрат, 33.

Аннотация

В ходе серии исследований, охватывающей период с 1889 по 1939 год, были систематически изучены все двойные гипергеометрические ряды второго порядка. Значительный вклад в развитие теории гипергеометрических функций двух переменных внес Горн, предложивший их классификацию на полные и конфлюэнтные функции. Составленный Горном список включает четырнадцать полных и двадцать конфлюэнтных функций двух переменных, причем последние являются предельными случаями полных функций. В 1985 году Сривастава и Карлссон завершили построение полного набора гипергеометрических функций второго порядка трех переменных, однако аналогичная классификация для

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Арзикулов З. О., Хасанов А., Эргашев Т. Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 407–429. EDN: YWKYZB. DOI: 10.14498/vsgtu2156.

Сведения об авторах

Зафаржон Одилович Арзикулов https://orcid.org/0009-0004-2965-4566
PhD; старший преподаватель; каф. высшей математики; e-mail: zafarbekarzikulov1984@gmail.com

Анварджан Хасанов https://orcid.org/0000-0002-9849-4103
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник, отд. дифференциальных уравнений и их применения[2]; научный сотрудник, каф. математики, анализа, логики и дискретной математики[4]; e-mail: anvarhasanov@yahoo.com

Тухтасин Гуламжанович Эргашев 🖂 https://orcid.org/0000-0003-3542-8309
доктор физико-математических наук, профессор; научный сотрудник, отд. дифференциальных уравнений и их применения[2]; профессор, каф. высшей математики[3]; научный сотрудник, каф. математики, анализа, логики и дискретной математики[4]; e-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

их конфлюэнтных аналогов до сих пор остается незавершенной. Таким образом, теория конфлюэнтных гипергеометрических функций трех переменных в настоящее время находится в стадии формирования, а изучение функций четырех переменных представляет собой перспективное направление исследований.

В настоящей работе исследуются некоторые конфлюэнтные гипергеометрические функции от трех и четырех переменных. Устанавливаются их новые свойства, которые применяются для решения задачи Дирихле для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами.

Фундаментальные решения указанного уравнения выражаются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию четырех переменных, а явное решение задачи Дирихле в первом октанте строится с помощью функции трех переменных, являющейся следом конфлюэнтной функции четырех переменных. Доказывается теорема о вычислении значений функций многих переменных и устанавливаются формулы их преобразования. Полученные результаты используются для определения порядка сингулярности фундаментальных решений и обоснования корректности решения задачи Дирихле.

Единственность решения задачи Дирихле доказывается на основе принципа экстремума для эллиптических уравнений.

Ключевые слова: конфлюэнтные функции многих переменных, системы дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа, сингулярное уравнение Гельмгольца, фундаментальное решение, задача Дирихле.

Получение: 24 февраля 2025 г. / Исправление: 2 мая 2025 г. / Принятие: 5 мая 2025 г. / Публикация онлайн: 22 августа 2025 г.

---

1. Введение. Начиная с работы И. Н. Векуа [1, гл. 1] исследуются краевые задачи для уравнения Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0,$$

где λ — вообще говоря, комплексная постоянная. Это уравнение встречается во многих разделах математической физики (теория упругости, теория электромагнитных волн и др.); его иногда называют метагармоническим уравнением, а его решения — метагармоническими функциями; постоянную λ называют параметром метагармонической функции [2].

Ввиду наличия многочисленных приложений в современной теории дифференциальных уравнений в частных производных значительное место занимают исследования вырождающихся уравнений, особый класс которых составляют уравнения с сингулярными коэффициентами.

Впервые в 1952 году М. Б. Капилевичем [3] была решена задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{2\alpha}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} - b^2 u = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1,$$

в полупространстве $x_n > 0$.

Краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda^2 u = 0, \quad 0 < 2\alpha, \quad 2\beta < 1, \tag{1}$$

были предметом интереса многих математиков.

Уравнение (1) связано с уравнением смешанного типа

$$\eta^m u_{\xi\xi} + \xi^n u_{\eta\eta} + \lambda^2 u = 0, \tag{2}$$

а именно, если в области эллиптичности привести уравнение (2) к канонической форме, то получится уравнение (1). При $n = \lambda = 0$ уравнение (2) называется уравнением Геллерстедта, а в случае $n = \lambda = 0$, $m = 1$ — уравнением Трикоми и имеет важное прикладное значение в газовой динамике [4].

Теория краевых задач для различных частных случаев уравнения (1) активно разрабатывалась во второй половине XX века. С. П. Пулькиным [5] исследованы краевые задачи типа E для уравнения (1) при $\beta = \lambda = 0$. Краевыми задачами для частных случаев уравнения (1), а также уравнения (2), занимались Д. Аманов [6], М. Е. Лернер и О. А. Репин [7], Е. И. Моисеев [8], Н. Б. Плещинский и Д. Н. Тумаков [9], Н. Р. Раджабов [10], М. С. Салахитдинов и А. Хасанов [11].

В 1969 году R. P. Gilbert [12] построил интегральное представление решений уравнения (1) через аналитические функции. Выведенная там формула обращения этого представления содержит весьма громоздкие ряды и неудобна в приложениях, в частности при решении вопросов о сведении краевых задач для уравнения (1) к хорошо изученным краевым задачам теории аналитических функций [13]. В работе А. Хасанова [14] фундаментальные решения уравнения (1) построены в явных формах.

В монографии [15] получены различные интегральные представления решений и некоторые частные формулы их обращений для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца (1) и соответствующего ему гиперболического уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x - \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda^2 u = 0, \quad 0 < 2\alpha, \quad 2\beta < 1,$$

получаемого из (1) заменой y на $-iy$.

Для уравнения (1) при $\lambda = \mu i$ в работе О. А. Репина и М. Е. Лернера [16] доказана однозначная разрешимость и найдена формула решения задачи Дирихле в первом квадранте. А. А. Абашкиным [17] поставлены и исследованы новые краевые задачи для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца (1) в прямоугольнике, полуполосе и полосе. Отличительной особенностью исследованных краевых задач [17] является то, что на параметры α, β и λ уравнения (1) накладываются минимальные ограничения.

В настоящей работе исследуется задача Дирихле для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z - \lambda^2 u = 0 \tag{3}$$

в первом октанте, где α, β, γ и λ — действительные числа, причем $0 < 2\alpha$, 2β, $2\gamma < 1$. Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений. С использованием известного решения уравнения (3), построенного в [18], решение рассматриваемой задачи строится в явной форме. При доказательстве теоремы существования применяются свойства конфлюэнтной гипергеометрической функции от трех переменных A_2, впервые введенной и исследованной в [14].

Исследованию краевых задач для уравнения (3) посвящено сравнительно малое количество работ. Отметим работы А. Хасанова [19] и Э. Т. Каримова [20], в которых решения основных краевых задач для уравнения (3) при $\lambda = 0$ в бесконечной (первом октанте) и конечной (первом октанте шара) областях соответственно найдены в явных формах. В работе [21] для уравнения (3) при $\beta = \gamma = \lambda = 0$ построена теория потенциала и решена задача Хольмгрена с помощью метода потенциала.

2. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных. Известно [22, 23], что решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциала, приводит к специальным функциям. Чаще всего они появляются при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных. Разнообразие задач, приводящих к специальным функциям, вызвало быстрый рост числа функций, применяемых в приложениях.

Символ Похгаммера $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (z)_0 = 1.$$

Справедливы равенства $(z)_n = (-1)^n(1-n-z)_n$, $(1)_n = n!$ и

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \tag{4}$$

Равенство (4) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при действительных (комплексных) n.

Большие успехи в изучении теории гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a, b; c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!}, \quad |x| < 1 \tag{5}$$

стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или многих переменных.

Аппель [24] определил в 1880 г. гипергеометрическую функцию

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}, \quad |x| + |y| < 1, \tag{6}$$

которая аналогична функции Гаусса.

Гипергеометрическая функция Лауричелла [25]

$$F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} \ \mathbf{x} \right] = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} (a)_{|\mathbf{k}|} \prod_{i=1}^{n} \frac{(b_i)_{k_i}}{(c_i)_{k_i}} \frac{x_i^{k_i}}{k_i!}, \quad |x_1| + \dots + |x_n| < 1, \tag{7}$$

является естественным обобщением классической гипергеометрической функции Гаусса (5) и функции Аппеля (6) на случай многих комплексных переменных и соответствующих им комплексных параметров. Здесь и далее

$$\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n), \quad \mathbf{c} := (c_1, \dots, c_n), \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n), \quad |\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n, \quad k_1 \geqslant 0, \dots, k_n \geqslant 0.$$

В приложениях функций Лауричелла $F_A^{(n)}$ важна следующая

Теорема 1 [26]. *Пусть a, b_k, c_k — действительные числа, $a > |\mathbf{b}| > 0$ и $c_k > b_k$. Тогда для $n = 1, 2, \dots$ справедливо следующее предельное соотношение*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{-|\mathbf{b}|} F_A^{(n)}\left[\begin{array}{c} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{array} 1 - \frac{f_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \dots, 1 - \frac{f_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]\right\} = \\ = \frac{\Gamma(a - |\mathbf{b}|)}{\Gamma(a)} \prod_{k=1}^{n} \frac{|f_k(0)|^{-b_k}\Gamma(c_k)}{\Gamma(c_k - b_k)},$$

где $|\mathbf{b}| := b_1 + \dots + b_n$; $f_k(\varepsilon)$ — произвольные функции, причем $f_k(0) \neq 0$.

Отметим, что явные решения основных краевых задач для многомерных сингулярных эллиптических уравнений выражаются через гипергеометрическую функцию Лауричелла $F_A^{(n)}$, число переменных которой равно числу сингулярных коэффициентов рассматриваемого эллиптического уравнения [27, 28].

Рассмотрим следующую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию от $n + 1$ переменных [29]:

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{array}{c} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{array} \mathbf{x}; y\right] = \sum_{|\mathbf{k}|+l=0}^{\infty} (a)_{|\mathbf{k}|-l} \prod_{j=1}^{n} \frac{(b_j)_{k_j}}{(c_j)_{k_j}} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!} \cdot \frac{y^l}{l!}, \quad \sum_{j=1}^{n} |x_j| < 1. \tag{8}$$

Для функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ справедлива формула преобразования

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{array}{c} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{array} \mathbf{x}; y\right] = Z^{-a} \mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{array}{c} a, \mathbf{c} - \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{array} -\frac{\mathbf{x}}{Z}; Zy\right], \tag{9}$$

где

$$Z := 1 - x_1 - \dots - x_n.$$

В приложениях конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ к решению краевых задач используется следующая

Теорема 2. *Пусть a, b_k, c_k — действительные числа, $a > |\mathbf{b}| > 0$ и $c_k > b_k$. Тогда для $n = 1, 2, \dots$ справедливо следующее предельное соотношение*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{-|\mathbf{b}|} \mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{array}{c} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{array} 1 - \frac{f_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \dots, 1 - \frac{f_n(\varepsilon)}{\varepsilon}, \varepsilon y\right]\right\} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(a-|\mathbf{b}|\right)}{\Gamma(a)} \prod_{k=1}^{n} \frac{|f_k(0)|^{-b_k}\Gamma(c_k)}{\Gamma(c_k-b_k)}, \quad (10)$$

где $|\mathbf{b}| := b_1 + \cdots + b_n$; $f_k(\varepsilon)$ — *произвольные функции, причем* $f_k(0) \neq 0$; y — *действительная переменная.*

Доказательство. Из определения (8) конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ следует

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix}\ \mathbf{x}; y\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-a)_k} \frac{y^k}{k!} F_A^{(n)}\left[\begin{matrix} a-k, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix}\ \mathbf{x}\right], \quad (11)$$

где $F_A^{(n)}$ — гипергеометрическая функция Лауричелла, определенная в (7). Положив в (11) $y = 0$, придем к равенству

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix}\ \mathbf{x}; 0\right] = F_A^{(n)}\left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix}\ \mathbf{x}\right]. \quad (12)$$

Далее доказательство теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1 и формулы (12). □

Частные случаи конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ были известны: в случае $n = 1$ — конфлюэнтная функция Горна H_3, определяемая равенством

$$\mathrm{H}_3(a, b; c; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n}(b)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}, \quad |x| < 1; \quad (13)$$

в случае $n = 2$ — конфлюэнтная функция, введенная в [14]:

$$\mathrm{A}_2\left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix}\ x, y, z\right] = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-k}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^k}{k!}, \quad |x| + |y| < 1;$$

в случае $n = 3$ конфлюэнтная гипергеометрическая функция $\mathrm{H}_A^{(3,1)}$ была определена впервые в [18] через функцию Лауричелла $F_A^{(3)}$:

$$\mathrm{H}_A^{(3,1)}\left[\begin{matrix} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{matrix}\ x, y, z, t\right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-a)_k} \frac{t^k}{k!} F_A^{(3)}\left[\begin{matrix} a-k, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{matrix}\ x, y, z\right], \quad |x| + |y| + |z| < 1.$$

В приложениях любой гипергеометрической функции важна система дифференциальных уравнений в частных производных, которой удовлетворяет данная гипергеометрическая функция. Такая система для конфлюэнтной функции двух переменных H_3 была известна. Однако Волкодавов и Быстрова [30] впервые обратили внимание на то, что в известной справочной литературе по специальным функциям [31, гл. 5, фор. 5.9(34)] приведена ошибочно система дифференциальных уравнений, которой якобы удовлетворяет функция (13), и ими получена истинная система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет конфлюэнтная функция $\mathrm{H}_3(a, b; c; x, y)$.

Конфлюэнтная функция $u = \mathrm{A}_2 \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} \; x, y, z \right]$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных [14]:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} - xyu_{xy} + xzu_{xz} + \\ \qquad\qquad + [c_1 - (a+b_1+1)x]u_x - b_1yu_y + b_1zu_z - ab_1u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - xyu_{xy} + yzu_{yz} - \\ \qquad\qquad - b_2xu_x + [c_2 - (a+b_2+1)y]u_y + b_2zu_z - ab_2u = 0, \\ zu_{zz} - xu_{xz} - yu_{yz} + (1-a)u_z + u = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Вообще говоря, конфлюэнтная функция $\mathrm{H}_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} \; \mathbf{x}; y \right]$ удовлетворяет системе из $n+1$ уравнений гипергеометрического типа, которая в окрестности начала координат имеет 2^n линейно независимых решений (за подробностями см. [29]).

3. Фундаментальные решения обобщенного трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами. Первую октанту трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ обозначим через

$$\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, \;\; y > 0, \;\; z > 0\}.$$

Пусть (x, y, z) и (ξ, η, ζ) — две точки области Ω. Обозначим

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

В области Ω рассмотрим обобщенное трехмерное уравнение Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv \Delta u + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z - \lambda^2 u = 0, \tag{15}$$

где α, β, γ и λ — действительные числа, причем $0 < 2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma < 1$.

Уравнение вида

$$L^*u \equiv \Delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\alpha u}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\beta u}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\gamma u}{z}\right) - \lambda^2 u = 0 \tag{16}$$

называется сопряженным уравнением к уравнению $Lu = 0$.

Определение 1. Функция $q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ называется фундаментальным решением уравнения (15) с особенностью в точке $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$, если она

1) является решением уравнения (15) по переменным ξ, η, ζ во всех точках Ω, за исключением точки (x, y, z);
2) является решением сопряженного уравнения (16) по переменным x, y, z во всех точках Ω, за исключением точки (ξ, η, ζ);
3) при $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$ имеет особенность порядка $1/r$.

Как известно [18], уравнение (15) имеет 8 линейно независимых решений:

$$u_0 = k_0 r^{-2a} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a, \alpha, \beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

$$u_{11} = k_{11}(x\xi)^{1-2\alpha} r^{4\alpha-2a-2} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\alpha, 1-\alpha, \beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

$$u_{12} = k_{12}(y\eta)^{1-2\beta} r^{4\beta-2a-2} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\beta, \alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

$$u_{13} = k_{13}(z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\gamma-2a-2} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\gamma, \alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

$$u_{21} = k_{21}(x\xi)^{1-2\alpha}(y\eta)^{1-2\beta} r^{4\alpha+4\beta-2a-4} \times \\ \times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\beta, 1-\alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

$$u_{22} = k_{22}(x\xi)^{1-2\alpha}(z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\gamma-2a-4} \times \\ \times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\gamma, 1-\alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

$$u_{23} = k_{23}(y\eta)^{1-2\beta}(z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\beta+4\gamma-2a-4} \times \\ \times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\beta-2\gamma, \alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

$$u_3 = k_3(x\xi)^{1-2\alpha}(y\eta)^{1-2\beta}(z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\beta+4\gamma-2a-6} \times \\ \times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+3-2\alpha-2\beta-2\gamma, 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right],$$

где $a := \alpha + \beta + \gamma + 1/2$; $k_0, \ldots, k_3$ — известные постоянные. Здесь для краткости совокупность переменных обозначена через X:

$$X := \left(-\frac{4x\xi}{r^2}, -\frac{4y\eta}{r^2}, -\frac{4z\zeta}{r^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r^2 \right).$$

Очевидно, каждое из этих решений симметрично относительно переменных x, y, z и ξ, η, ζ, следовательно, они удовлетворяют уравнению (15) как по переменным x, y, z, так и по ξ, η, ζ. Однако эти функции не удовлетворяют сопряженному уравнению (16) по переменным x, y, z.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если функция $w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (15) по переменным ξ, η, ζ, то функция*

$$q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$$

удовлетворяет сопряженному уравнению (16) по переменным x, y, z.

Доказательство. Пусть некоторая функция $w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (15) по переменным ξ, η, ζ, тогда в силу симметричности она удовлетворяет этому же уравнению по переменным x, y, z, т.е. $L(w) = 0$.

Теперь подставим функцию $q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ в сопряженное уравнение (16). С этой целью вычислим необходимые производные:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2\alpha x^{2\alpha-1} y^{2\beta} z^{2\gamma} w + x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_x,$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2\alpha(2\alpha-1) x^{2\alpha-2} y^{2\beta} z^{2\gamma} w + 4\alpha x^{2\alpha-1} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_x + x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\alpha q}{x}\right) = 2\alpha(2\alpha-1) x^{2\alpha-2} y^{2\beta} z^{2\gamma} w + 2\alpha x^{2\alpha-1} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_x$$

и аналогично по переменным y и z.

Подставив вычисленные производные в сопряженное уравнение (16), получим

$$L^*(q) = x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} L(w) = 0.$$

Последнее равенство доказывает лемму 1. □

Таким образом, следующие функции удовлетворяют первым двум условиям определения 1:

$$q_0 = x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} r^{-2a} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a, \alpha, \beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \tag{17}$$

$$q_{11} = x y^{2\beta} z^{2\gamma} \xi^{1-2\alpha} r^{4\alpha-2a-2} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\alpha, 1-\alpha, \beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \tag{18}$$

$$q_{12} = x^{2\alpha} y z^{2\gamma} \eta^{1-2\beta} r^{4\beta-2a-2} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\beta, \alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \tag{19}$$

$$q_{13} = x^{2\alpha} y^{2\beta} z \zeta^{1-2\gamma} r^{4\gamma-2a-2} \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\gamma, \alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \tag{20}$$

$$q_{21} = x y z^{2\gamma} \xi^{1-2\alpha} \eta^{1-2\beta} r^{4\alpha+4\beta-2a-4} \times$$
$$\times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\beta, 1-\alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \tag{21}$$

$$q_{22} = x y^{2\beta} z \xi^{1-2\alpha} \zeta^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\gamma-2a-4} \times$$
$$\times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\gamma, 1-\alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \tag{22}$$

$$q_{23} = x^{2\alpha} y z \eta^{1-2\beta} \zeta^{1-2\gamma} r^{4\beta+4\gamma-2a-4} \times$$
$$\times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\beta-2\gamma, \alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \tag{23}$$

$$q_3 = k_3 x y z \xi^{1-2\alpha} \eta^{1-2\beta} \zeta^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\beta+4\gamma-2a-6} \times$$
$$\times \mathrm{H}_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+3-2\alpha-2\beta-2\gamma, 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right]. \tag{24}$$

Лемма 2. *Если $0 < 2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma < 1$, то каждая из функций, определенных равенствами (17)–(24), имеет особенность порядка $1/r$ при $r \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим в качестве примера функцию q_3, определенную в (24). Для остальных функций утверждение устанавливается аналогично.

Функцию q_3 можно представить в виде

$$q_3(x,y,z;\xi,\eta,\zeta;\lambda)=\frac{1}{r}\cdot\tilde{q}_3(x,y,z;\xi,\eta,\zeta;\lambda), \tag{25}$$

где

$$\tilde{q}_3=k_3xyz\xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}r^{2\alpha+2\beta+2\gamma-6}\times \\ \times\mathrm{H}_A^{(3,1)}\left[\begin{matrix}7/2-\alpha-\beta-\gamma,1-\alpha,1-\beta,1-\gamma;\\2-2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma;\end{matrix}\;X\right],$$

$$k_3=\frac{\Gamma(7/2-\alpha-\beta-\gamma)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\pi^{3/2}4^{\alpha+\beta+\gamma-2}\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)}. \tag{26}$$

Покажем, что функция $\tilde{q}_3$ ограничена при $r\to 0$. С этой целью в правой части (25) произведем замену переменных:

$$\xi=x+\varepsilon t,\quad \eta=y+\varepsilon s,\quad \zeta=z+\varepsilon v,$$

где t, s, v — новые переменные и $\varepsilon\geqslant 0$, тогда получим

$$\tilde{q}_3(x,y,z;x+\varepsilon t,y+\varepsilon s,z+\varepsilon v)= \\ =k_3xyz(x+\varepsilon t)^{1-2\alpha}(y+\varepsilon s)^{1-2\beta}(z+\varepsilon v)^{1-2\gamma}\left[\varepsilon^2(t^2+s^2+v^2)\right]^{\alpha+\beta+\gamma-3}\times \\ \times\mathrm{H}_A^{(3,1)}\left[\begin{matrix}7/2-\alpha-\beta-\gamma,1-\alpha,1-\beta,1-\gamma;\\2-2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma;\end{matrix}\right. \\ \left.-\frac{4x(x+\varepsilon t)}{\varepsilon^2(t^2+s^2+v^2)},-\frac{4y(y+\varepsilon s)}{\varepsilon^2(t^2+s^2+v^2)},-\frac{4z(z+\varepsilon v)}{\varepsilon^2(t^2+s^2+v^2)}\right].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и используя теорему 2 о предельных значениях конфлюэнтной гипергеометрической функции (см. формулу (10)), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{q}_3=\frac{1}{4\pi}<\infty.$$

Лемма 2 доказана. □

Следовательно, функции, определенные равенствами (17)–(24), являются фундаментальными решениями трехмерного сингулярного уравнения Гельмгольца (15).

4. Постановка задачи Дирихле и теорема единственности.

Задача Дирихле. Найти регулярное решение $u(x,y,z)$ сингулярного уравнения Гельмгольца (15) из класса функций $C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,y,0)=\tau_1(x,y),\quad 0\leqslant x,y<\infty, \tag{27}$$

$$u(x,0,z)=\tau_2(x,z),\quad 0\leqslant x,z<\infty, \tag{28}$$

$$u(0,y,z)=\tau_3(y,z),\quad 0\leqslant y,z<\infty, \tag{29}$$

и условию исчезновения на бесконечности

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y,z)=0,\quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{30}$$

где $\tau_1(t,s)$, $\tau_2(t,s)$, $\tau_3(t,s)$ — заданные функции вида

$$\tau_1(x,y) = \frac{\tilde{\tau}_1(x,y)}{(1+x^2+y^2)^{\varepsilon_1} e^{|\lambda|\sqrt{R^2+x^2+y^2}}}, \quad \tilde{\tau}_1(x,y) \in C(0 \leqslant x, y < \infty), \tag{31}$$

$$\tau_2(x,z) = \frac{\tilde{\tau}_2(x,z)}{(1+x^2+z^2)^{\varepsilon_2} e^{|\lambda|\sqrt{R^2+x^2+z^2}}}, \quad \tilde{\tau}_2(x,z) \in C(0 \leqslant x, z < \infty), \tag{32}$$

$$\tau_3(y,z) = \frac{\tilde{\tau}_3(y,z)}{(1+y^2+z^2)^{\varepsilon_3} e^{|\lambda|\sqrt{R^2+y^2+z^2}}}, \quad \tilde{\tau}_3(y,z) \in C(0 \leqslant y, z < \infty), \tag{33}$$

причем $\frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{2} < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 < 2$.

Кроме того, функции $\tau_1(x,y)$, $\tau_2(x,z)$ и $\tau_3(y,z)$ удовлетворяют условиям согласования в начале координат:

$$\tau_1(0,0) = \tau_2(0,0) = \tau_3(0,0)$$

и на границах области Ω:

$$\tau_1(x,0) = \tau_2(x,0), \quad \tau_1(0,y) = \tau_3(y,0), \quad \tau_2(0,z) = \tau_3(0,z), \quad x,y,z \in \overline{\Omega}.$$

Здесь $\overline{\Omega}$ обозначает замыкание области Ω:

$$\overline{\Omega} = \{(x,y,z) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}.$$

Теорема 3. *Задача Дирихле для сингулярного уравнения Гельмгольца* (3) *в бесконечной области Ω может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Рассмотрим конечную подобласть $\Omega_R \subset \Omega$, ограниченную координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и октантом сферы радиуса R:

$$\sigma_R := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2, x>0, y>0, z>0\}.$$

В случае однородных граничных условий

$$\tau_1(x,y) = 0, \quad \tau_2(x,z) = 0, \quad \tau_3(y,z) = 0,$$

согласно принципу экстремума для эллиптических уравнений [32, гл. 1], функция $u(x,y,z)$ достигает своих экстремальных значений в $\overline{\Omega}_R$ только на σ_R.

Для произвольной точки $(x,y,z) \in \Omega_R$ и любого $\varepsilon > 0$ выберем R достаточно большим, чтобы $|u(x,y,z)| < \varepsilon$ на σ_R. Тогда в силу принципа максимума $|u(x,y,z)| < \varepsilon$ во всей области Ω_R. Поскольку ε произвольно мало, заключаем, что $u(x,y,z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 3 доказана. □

5. Существование решения задачи Дирихле. Пусть $(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_R$. Вырежем из области Ω_R шар достаточно малого радиуса ε с центром в точке (ξ,η,ζ) и оставшуюся часть области Ω_R обозначим через Ω_ε, а через C_ε — сферу вырезанного шара. Используя известную формулу Грина, получим

$$\int_{C_\varepsilon}\Big(u\frac{\partial q_3}{\partial \boldsymbol{N}}-q_3\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big)dC_\varepsilon=-\int_{\sigma_R}u\frac{\partial q_3}{\partial \boldsymbol{M}}d\sigma_R+\int_{D_1}u(x,y,0)\frac{\partial q_3}{\partial z}\Big|_{z=0}dxdy+$$
$$+\int_{D_2}u(x,0,z)\frac{\partial q_3}{\partial y}\Big|_{y=0}dxdz+\int_{D_3}u(0,y,z)\frac{\partial q_3}{\partial x}\Big|_{x=0}dydz, \quad (34)$$

где $u(x,y,z)$ — искомое решение уравнения (15); $q_3(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ — фундаментальное решение уравнения (15), определенное в (24); $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{M}$ — внешние нормали к C_ε и σ_R соответственно; D_1, D_2 и D_3 — боковые грани области Ω_R:

$$D_1:=\{(x,y,z):x^2+y^2<R^2,x>0,y>0,z=0\},$$
$$D_2:=\{(x,y,z):x^2+z^2<R^2,x>0,y=0,z>0\},$$
$$D_3:=\{(x,y,z):y^2+z^2<R^2,x=0,y>0,z>0\}.$$

Следуя работе [18], будем иметь

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\Big(u\frac{\partial q_3}{\partial \boldsymbol{N}}-q_3\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}\Big)dC_\varepsilon=u(\xi,\eta,\zeta).$$

Далее, переходя к пределу в правой части (34) при $R\to\infty$ и учитывая при этом условия задачи Дирихле, после некоторых преобразований получим

$$u(x,y,z)=u_1(x,y,z)+u_2(x,y,z)+u_3(x,y,z), \quad (35)$$

где

$$u_1(x,y,z)=(1-2\gamma)k_3x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\tau_1(t,s)ts}{r_1^{2a}}\times$$
$$\times\,\mathrm{A}_2\left[\begin{matrix}a,1-\alpha,1-\beta;\\2-2\alpha,\ 2-2\beta;\end{matrix}\ -\frac{4xt}{r_1^2},-\frac{4ys}{r_1^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_1^2\right]dtds, \quad (36)$$
$$u_2(x,y,z)=(1-2\beta)k_3x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\tau_2(t,s)ts}{r_2^{2a}}\times$$
$$\times\,\mathrm{A}_2\left[\begin{matrix}a,1-\alpha,1-\gamma;\\2-2\alpha,\ 2-\gamma;\end{matrix}\ -\frac{4xt}{r_2^2},-\frac{4zs}{r_2^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_2^2\right]dtds, \quad (37)$$
$$u_3(x,y,z)=(1-2\alpha)k_3x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\tau_3(t,s)ts}{r_3^{2a}}\times$$
$$\times\,\mathrm{A}_2\left[\begin{matrix}a,1-\gamma,1-\beta;\\2-2\gamma,\ 2-2\beta;\end{matrix}\ -\frac{4yt}{r_3^2},-\frac{4zs}{r_3^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_3^2\right]dtds, \quad (38)$$
$$a=7/2-\alpha-\beta-\gamma,\qquad r_1^2=(x-t)^2+(y-s)^2+z^2,$$
$$r_2^2=(x-t)^2+y^2+(z-s)^2,\quad r_3^2=x^2+(y-t)^2+(z-s)^2.$$

Лемма 3. *Если функцию $\tau_1(x,y)$ можно представить в виде (31), то функция $u_1(x,y,z)$, определенная равенством (36), является регулярным решением уравнения (15) в области Ω, удовлетворяющим граничным условиям*

$$u_1(x,y,0)=\tau_1(x,y),\quad u_1(x,0,z)=0,\quad u_1(0,y,z)=0, \quad (39)$$

и условию исчезновения на бесконечности (30).

Доказательство. Прежде всего мы должны убедиться в том, что функция (36) удовлетворяет сингулярному уравнению Гельмгольца (15).

С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию

$$W(x,y,z;t,s) = x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}r_1^{-2a}\omega(\xi,\eta,\theta), \tag{40}$$

где

$$\omega(\xi,\eta,\theta) := \mathrm{A}_2\left[\begin{array}{c} a, 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha,\ 2-2\beta,\ 2-2\gamma; \end{array} \xi,\eta,\theta\right],$$

$$\xi = -\frac{4xt}{r_1^2}, \quad \eta = -\frac{4ys}{r_1^2}, \quad \theta = -\frac{\lambda^2}{4}r_1^2.$$

Вычислим необходимые производные от вспомогательной функции W по переменным x, y, z и подставим их в сингулярное уравнение Гельмгольца. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} &W_{xx}+W_{yy}+W_{zz}+\frac{2\alpha}{x}W_x+\frac{2\beta}{y}W_y+\frac{2\gamma}{z}W_z-\lambda^2W = \\ &\quad=\Lambda\frac{\xi}{x}\big\{\xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}+\xi\theta\omega_{\xi\theta}+ \\ &\qquad\qquad+[2(1-\alpha)-(2-\alpha+a)\xi]\omega_\xi-a(1-\alpha)\omega\big\}+ \\ &\quad+\Lambda\frac{\eta}{y}\big\{\eta(1-\eta)\omega_{\eta\eta}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}+\eta\theta\omega_{\eta\theta}+ \\ &\qquad\qquad+[2(1-\beta)-(2-\beta+a)\eta]\omega_\eta-a(1-\beta)\omega\big\}+ \\ &\qquad\qquad+\theta\big\{\theta\omega_{\theta\theta}-\xi\omega_{\xi\theta}-\eta\omega_{\eta\theta}+(1-a)\omega_\theta-\omega\big\}=0, \end{aligned}$$

где $\Lambda = x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}r_1^{-2a}$, которое равносильно следующей системе уравнений гипергеометрического типа:

$$\begin{cases} \xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}+\xi\theta\omega_{\xi\theta}+[2(1-\alpha)-(2-\alpha+a)\xi]\omega_\xi-a(1-\alpha)\omega=0, \\ \eta(1-\eta)\omega_{\eta\eta}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}+\eta\theta\omega_{\eta\theta}+[2(1-\beta)-(2-\beta+a)\eta]\omega_\eta-a(1-\beta)\omega=0, \\ \theta\omega_{\theta\theta}-\xi\omega_{\xi\theta}-\eta\omega_{\eta\theta}+(1-a)\omega_\theta-\omega=0. \end{cases}$$

Сопоставляя последнюю систему уравнений с системой уравнений (14) для конфлюэнтной функции A_2, можно заключить, что функция (40) является решением сингулярного уравнения Гельмгольца. Следовательно, функция $u_1(x,y,z)$, определенная равенством (36), удовлетворяет сингулярному уравнению Гельмгольца (15).

Теперь докажем, что функция $u_1(x,y,z)$ удовлетворяет граничным условиям (39). Действительно, введя в подынтегральной функции в (36) вместо t и s новые переменные $\mu=(t-x)/z$ и $\nu=(s-y)/z$, получим

$$\begin{aligned} u_1 = (1-2\gamma)k_3\frac{x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}}{z^{4-2\alpha-2\beta}}\int_{-x/z}^{\infty}\int_{-y/z}^{\infty}\frac{\tau_1\left(x+\mu z, y+\nu z;\lambda\right)(x+z\mu)(y+z\nu)}{K^a}\times \\ \times\,\mathrm{A}_2\left[\begin{array}{c} a,\ 1-\alpha, 1-\beta; \\ 2-2\alpha,\ 2-2\beta; \end{array} \frac{4x(x+z\mu)}{z^2K}, \frac{4y(y+\nu z)}{z^2K}, -\frac{1}{4}\lambda^2z^2K\right]d\mu d\nu, \end{aligned} \tag{41}$$

где $K := 1 + \mu^2 + \nu^2$.

Используя теорему 2 о предельных значениях конфлюэнтной гипергеометрической функции (см. формулу (10)), в правой части (41) переходим к пределу при $z \to 0$. Учитывая выражение (26) для коэффициента k_3, известную формулу для вычисления двукратного несобственного интеграла [33, стр. 633, фор. 4.623]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(a^2x^2 + b^2y^2)dxdy = \frac{\pi}{4ab} \int_0^\infty \varphi(x)dx$$

и формулу Лежандра для удвоения аргумента гамма-функции [31, стр. 19, фор. (15)]

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big),$$

получим

$$\lim_{z\to 0} u_1(x, y, z) = \tau_1(x, y). \qquad (42)$$

Совершив аналогичные преобразования, имеем

$$\lim_{x\to 0} u_1(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y\to 0} u_1(x, y, z) = 0. \qquad (43)$$

Следовательно, на основании равенств (42) и (43) заключаем, что функция $u_1(x, y, z)$, определенная равенством (36), удовлетворяет условиям (39).

Остается показать исчезновение функции $u_1(x, y, z)$ на бесконечности. Воспользовавшись формулой преобразования (см. фор. (9))

$$\mathrm{A}_2 \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} \; x, y, z \right] = (1 - x - y)^{-a} \times$$
$$\times \mathrm{A}_2 \left[\begin{matrix} a, c_1 - b_1, c_2 - b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} \; -\frac{x}{1 - x - y}, -\frac{y}{1 - x - y}, (1 - x - y)z \right],$$

функцию (36) запишем в виде

$$u_1(x, y, z) = (1/2 - \gamma)k_3 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_1(t, s)ts}{\rho^{2a}} \times$$
$$\times \mathrm{A}_2 \left[\begin{matrix} a, \; 1 - \alpha, 1 - \beta; \\ 2 - 2\alpha, \; 2 - 2\beta; \end{matrix} \; \frac{4xt}{\rho^2}, \frac{4ys}{\rho^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2\rho^2 \right] dtds, \qquad (44)$$

где $\rho^2 = (x + t)^2 + (y + s)^2 + z^2$.

Нетрудно заметить, что в (44) справедливо неравенство

$$\frac{4xt}{\rho^2} + \frac{4ys}{\rho^2} < 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad s > 0.$$

Докажем, что при стремлении точки (x, y, z) к бесконечности, т.е. при $R \to \infty$, функция (44) стремится к нулю. С этой целью конфлюэнтную гипергеометрическую функцию A_2 представим виде

$$\mathrm{A}_2 \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} \; x, y, z \right] = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^k}{(1 - a)_k k!} F_2(a - k, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y),$$

где F_2 — гипергеометрическая функция Аппеля (6).

Из теории функций Аппеля [24] известно, что если $|x|+|y|<1$, то при любых значениях числовых параметров гипергеометрическая функция Аппеля F_2 ограничена:

$$|F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)| \leqslant C_1, \quad |x|+|y|<1,$$

следовательно, имеем оценку

$$|u_1| \leqslant C_2 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\tau_1(t,s)|ts}{\rho^{7-2\alpha-2\beta-2\gamma}} {}_0F_1\Big(b; \frac{\lambda^2}{4}\rho^2\Big) dtds, \tag{45}$$

где $b=\alpha+\beta+\gamma-5/2$.

Здесь под интегралом ${}_0F_1$ обозначает обобщенную гипергеометрическую функцию [34, стр. 437, фор. 7.2.3(1)], для которой справедлива следующая формула связи [34, стр. 594, фор. 7.13.1(1)]:

$${}_0F_1(b; z) = \Gamma(b) z^{(1-b)/2} I_{b-1}(2\sqrt{z}), \tag{46}$$

где

$$I_\alpha(z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m+\alpha}$$

— модифицированная функция Бесселя [15, гл. 1, фор. (1.84)]. Далее, применяя последовательно к правой части (45) формулу связи (46), асимптотическое представление [35, стр. 93]

$$I_\alpha(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

и представление (31) для заданной функции τ_1, получим

$$|u_1| \leqslant C_3 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{|\lambda|\rho} ts dtds}{e^{|\lambda|\sqrt{R^2+t^2+s^2}} (1+t^2+s^2)^{\varepsilon_1} \rho^{4-\alpha-\beta-\gamma}}.$$

Выполнив замену $t=R\mu$, $s=R\nu$ в последнем двойном несобственном интеграле, получим

$$|u_1| \leqslant C_3 \Big(\frac{x}{R}\Big)^{1-2\alpha} \Big(\frac{y}{R}\Big)^{1-2\beta} \Big(\frac{z}{R}\Big)^{1-2\gamma} \frac{K(x,y)}{R^{2\varepsilon_1-3+\alpha+\beta+\gamma}}, \tag{47}$$

где

$$\varepsilon_1 > \frac{3}{2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},$$

$$K(x,y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{|\lambda|R\left(\sqrt{1+\mu^2+\nu^2+\frac{2x}{R}+\frac{2y}{R}} - \sqrt{1+\mu^2+\nu^2}\right)} \mu\nu d\mu d\nu}{(\mu^2+\nu^2)^{\varepsilon_1} (1+\mu^2+\nu^2)^{(4-\alpha-\beta-\gamma)/2}}. \tag{48}$$

Покажем, что двойной несобственный интеграл в правой части (48) ограничен при $R\to\infty$. Действительно, используя формулу [36]

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}}_{n}\frac{x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1\cdots dx_n}{[(r_1x_1)^{q_1}+\cdots+(r_nx_n)^{q_n}]^t[1+(r_1x_1)^{q_1}+\cdots+(r_nx_n)^{q_n}]^s}=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1/q_1)\cdots\Gamma(p_n/q_n)\Gamma(P-t)\Gamma(s+t-P)}{q_1q_2\cdots q_nr_1^{p_1q_1}\cdots r_n^{p_nq_n}\Gamma(P)\Gamma(s)},$$

где $P:=p_1/q_1+\cdots+p_n/q_n$; p_k, q_k, r_k и s — положительные числа ($k=\overline{1,n}$), $0<P-t<s$, и переходя к пределу при $R\to\infty$, будем иметь соотношение

$$\lim_{R\to\infty}K(x,y)=\frac{\Gamma(2-\varepsilon_1)\Gamma\big((2\varepsilon_1-\alpha-\beta-\gamma)/2\big)}{4\Gamma\big((4-\alpha-\beta-\gamma)/2\big)},\quad \varepsilon_1<2. \tag{49}$$

Таким образом, в силу (47) и (49) справедлива оценка

$$|u_1|\leqslant\frac{C_3}{R^{2\varepsilon_1-3+\alpha+\beta+\gamma}},\quad \frac{3}{2}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}<\varepsilon_1<2,\quad R\to\infty,$$

учитывая которую, заключаем, что функция (41) обращается в нуль на бесконечности. Лемма 3 доказана. □

Замечание 1. Повторяя рассуждения, проведенные в лемме 3, можно доказать еще две леммы относительно функций $u_2(x,y,z)$ и $u_3(x,y,z)$, определенных, соответственно, равенствами (37) и (38). Так что если для заданных функций $\tau_2(x,z)$ и $\tau_3(y,z)$ справедливы представления (32) и (33), то каждая из функций $u_2(x,y,z)$ и $u_3(x,y,z)$ является решением сингулярного уравнения Гельмгольца (3), изчезающим на бесконечности и удовлетворяющим совокупности условий

$$u_2(x,y,0)=0,\quad u_2(x,0,z)=\tau_2(x,z),\quad u_2(0,y,z)=0,$$

$$u_3(x,y,0)=0,\quad u_3(x,0,z)=0,\quad u_3(0,y,z)=\tau_3(y,z)$$

соответственно.

Теорема 4. *Если функции $\tau_1(x,y)$, $\tau_2(x,z)$ и $\tau_3(y,z)$ удовлетворяют условиям* (31), (32) и (33) *соответственно, то функция $u(x,y,z)$, определенная в* (35), *является регулярным решением уравнения* (15) *в области Ω, удовлетворяющим условиям* (27)–(30).

Доказательство теоремы 4 следует из леммы 3 и замечания 1.

Заключение. Установлены новые свойства конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных и доказана теорема о значениях гипергеометрической функции при предельных значениях переменных, имеющая важное приложение при решении краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.

На основе известных линейно независимых решений трехмерного сингулярного уравнения Гельмгольца построены фундаментальные решения данного уравнения, выражаемые через конфлюэнтную функцию от четырех переменных и с использованием доказанной предельной теоремы определен порядок особенности этих решений.

Впервые решена задача Дирихле для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами в бесконечной области. Единственность решения задачи доказана известным методом принципа экстремума для эллиптических уравнений. Благодаря доказанным свойствам конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных решение поставленной задачи удалось выписать в явном виде через конфлюэнтную функцию от трех переменных. В дальнейшем полученное решение задачи Дирихле может быть использовано при решении краевых задач для трехмерных сингулярных уравнений смешанного типа в качестве решения, принесенного из эллиптической части смешанной области.

Результаты настоящей работы открывают путь к исследованию краевых задач для сингулярных эллиптических уравнений. Используя построенные фундаментальные решения, можно поставить и решить задачу Неймана и еще несколько задач со смешанными условиями Дирихле и Неймана для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами в первом октанте или в других областях.

В настоящее время известны [29] все линейно независимые решения обобщенного многомерного сингулярного уравнения Гельмгольца вида

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}-\lambda^2 u=0,\quad m\geqslant 2,\ n\geqslant 1,\ m\geqslant n,\ 0<2\alpha_k<1, \tag{50}$$

которые выражаются через конфлюэнтную функцию $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ от $n+1$ переменных. Предлагается распространить результаты данной работы к многомерному уравнению Гельмгольца с n сингулярными коэффициентами (50).

Поэтому полученные в работе результаты можно рассматривать как начальный этап исследования конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных и решения краевых задач для уравнения Гельмгольца с тремя и более сингулярными коэффициентами.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений*. М., Ленинград: Гостехиздат, 1948. 296 с.
2. Векуа И. Н. Об одном разложении метагармонических функций // *Докл. АН СССР*, 1945. Т. 48, № 1. С. 3–6.
3. Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // *Матем. сб.*, 1952. Т. 30(72), № 1. С. 11–38.
4. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике*. М.: Наука, 1973. 712 с.
5. Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx}+u_{yy}+px^{-1}u_x=0$ // *Уч. зап. Куйбыш. пед. ин-та. Физ.-мат. науки*, 1958. Т. 21. С. 3–54.
6. Аманов Д. Некоторые краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения в неограниченной области // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1984. № 1. С. 8–13.

7. Лернер М. Е., Репин О. А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1562–1564. EDN: WJHLOV.
8. Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1565–1567.
9. Плещинский Н. Б., Тумаков Д. Н. Граничные задачи для уравнения Гельмгольца в квадранте и в полуплоскости, составленной из двух квадрантов // *Изв. вузов. Матем.*, 2004. № 7. С. 63–74. EDN: HQUGXR.
10. Раджабов Н. Р. Теоремы единственности и аналоги формулы Пуассона в первом октанте для уравнения типа Гельмгольца с n сингулярной гиперплоскостью // *Докл. АН СССР*, 1978. Т. 238, № 4. С. 804–807.
11. Салахитдинов М. С., Хасанов А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 110–119.
12. Gilbert R. P. *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations.* New York, London: Academic Press, 1969. xviii+311 pp.
13. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977. 640 с.
14. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation // *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2007. vol. 52, no. 8. pp. 673–683. DOI: https://doi.org/10.1080/17476930701300375.
15. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
16. Репин О. А., Лернер М. Е. О задаче Дирихле для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998. № 6. С. 5–8. EDN: HKVCIB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1.
17. Абашкин А. А. Об одной весовой краевой задаче в бесконечной полуполосе для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. Т. 6. С. 3–12. EDN: PVYBAX.
18. Urinov A. K., Karimov E. T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // *Appl. Math. Lett.*, 2011. vol. 24, no. 3. pp. 314–319. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.10.013.
19. Хасанов А. *Гипергеометрические функции и их применения к решению краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка*: Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Ташкент, 2009. 240 с.
20. Каримов Э. Т. О задаче Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами // *Докл. АН Узбекистана*, 2010. Т. 2. С. 9–11.
21. Эргашев Т. Г. Потенциалы для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом и их применение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 257–285. EDN: HVACIC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1810.
22. Niukkanen A. W. Generalised hypergeometric series ${}^N F(x_1, \ldots, x_N)$ arising in physical and quantum chemical applications // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983. vol. 16, no. 9. pp. 1813–1825. DOI: https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/9/007.
23. Bers L. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics* / Surveys in Applied Mathematics. vol. 3. New York: John Wiley & Sons, 1958. xv+278 pp.
24. Appell P. Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur dés équations différentielles linéaires aux dérivés partielles // *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1880. vol. 90. pp. 296–299 (In French).
25. Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili // *Palermo Rend.*, 1893. vol. 7. pp. 111–158 (In Italian).
26. Эргашев Т. Г., Тулакова З. Р. Задача Дирихле для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами в бесконечной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. № 7. С. 81–91. EDN: OJVXJT. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-7-81-91.

27. Эргашев Т. Г. Обобщенная задача Хольмгрена для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 7. С. 872–886. EDN: IYVASY. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064120070043.
28. Эргашев Т. Г., Тулакова З. Р. Задача со смешанными граничными условиями для сингулярного эллиптического уравнения в бесконечной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2022. № 7. С. 58–72. EDN: IMUNNL. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-7-58-72.
29. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 1. pp. 15–26. EDN: HRRMPZ. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220010047.
30. Волкодавов В. Ф., Быстрова О. К. Построение функций Римана–Адамара для одного вырождающегося уравнения // *Диффер. уравн.*, 1991. Т. 27, № 8. С. 1444–1446.
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*. vol. 1. New York: McGraw-Hill, 1953. xxvi+302 pp.
32. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin: Springer, 1970. xii+372 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5.
33. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Физматлит, 1962. 1100 с.
34. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*. М.: Наука, 1986. 800 с.
35. Маричев О. И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул)*. Минск: Наука и жизнь, 1978. 312 с.
36. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain // *Lobachevskii J. Math.*, 2022. vol. 43, no. 1. pp. 199–206. EDN: SNHKZE. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222040102.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 407–429
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2156

MSC: 33C70, 35J25, 35J05, 35A08

Confluent hypergeometric functions and their application to the solution of Dirichlet problem for the Helmholtz equation with three singular coefficients

Z. O. Arzikulov[1]***, A. Hasanov***[2,4]***, T. G. Ergashev***[2,3,4]

[1] Fergana State Technical University,
86, Fergana st., Fergana, 150107, Uzbekistan.
[2] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Science,
9, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
[3] Tashkent Institute of Irrigation and
Agricultural Mechanization Engineers,
39 Kari-Niyazi st., Tashkent, 100000, Uzbekistan.
[4] Ghent University,
33, Sint-Pietersnieuwstraat, Ghent, 9000, Belgium.

Abstract

In the course of a series of studies spanning the fifty-year period from 1889 to 1939, all double hypergeometric series of the second order were systematically investigated. A significant contribution to the study of hypergeometric functions of two variables was made by Horn, who proposed their classification into two types: complete and confluent. Horn's final list comprised fourteen complete (non-confluent) functions of two variables and twenty distinct confluent functions, which represent limiting cases of the complete ones. In 1985, Srivastava and Karlsson completed the classification of all possible second-order complete hypergeometric functions of three

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Arzikulov Z. O., Hasanov A., Ergashev T. G. Confluent hypergeometric functions and their application to the solution of Dirichlet problem for the Helmholtz equation with three singular coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 407–429. EDN: YWKYZB. DOI: 10.14498/vsgtu2156 (In Russian).

Authors' Details:

Zafarjon O. Arzikulov https://orcid.org/0009-0004-2965-4566
PhD; Senior Lecturer; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: zafarbekarzikulov1984@gmail.com

Anvardjan Hasanov https://orcid.org/0000-0002-9849-4103
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Research Fellow, Dept. of Differential Equations and Their Applications[2]; Research Associate, Dept. of Mathematics, Analysis, Logic and Discrete Mathematics[4]; e-mail: anvarhasanov@yahoo.com

Tuhtasin G. Ergashev https://orcid.org/0000-0003-3542-8309
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Research Associate, Dept. of Differential Equations and Their Applications[2]; Professor, Dept. of Higher Mathematics[3]; Research Associate, Dept. of Mathematics, Analysis, Logic and Discrete Mathematics[4]; e-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

variables, while a similar systematic classification for their confluent counterparts remains incomplete. Thus, the theory of confluent hypergeometric functions of three variables has not yet been fully developed, and the study of functions of four variables represents an area for future research.

This paper investigates certain confluent hypergeometric functions of three and four variables, establishing their new properties and applying them to the solution of the Dirichlet problem for the three-dimensional Helmholtz equation with three singular coefficients.

Fundamental solutions of the aforementioned Helmholtz equation are expressed in terms of a confluent hypergeometric function of four variables, while an explicit solution to the Dirichlet problem in the first octant is constructed using a function of three variables, which is derived as a trace of the four-variable confluent function. A theorem on the computation of limiting values of multivariate functions is proved, and transformation formulas for these functions are established. These results are employed to determine the singularity order of fundamental solutions and to validate the correctness of the solution to the Dirichlet problem.

The uniqueness of the solution to the Dirichlet problem is proved using the maximum principle for elliptic equations.

Keywords: multiple confluent hypergeometric function, PDE-systems of hypergeometric type, singular Helmholtz equation, fundamental solution, Dirichlet problem.

Received: 24$^{\text{th}}$ February, 2025 / Revised: 2$^{\text{nd}}$ May, 2025 / Accepted: 5$^{\text{th}}$ May, 2025 / First online: 22$^{\text{nd}}$ August, 2025

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Vekua I. N. *New Methods for Solving Elliptic Equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 1. New York, John Wiley & Sons, 1967, xii+358 pp.
2. Vekua I. N. On one expansion of metaharmonic functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1945, vol. 48, no. 1, pp. 3–6 (In Russian).
3. Kapilevich M. B. On an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Sb. Math.*, 1952, vol. 72, no. 1, pp. 11–38 (In Russian).
4. Frankl F. I. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973, 712 pp. (In Russian)
5. Pulkin S. P. Some boundary value problems for the equation $u_{xx} + u_{yy} + px^{-1}u_x = 0$, *Uch. Zap. Kuibysh. Ped. In-ta. Fiz.-mat. Nauki*, 1958, vol. 21, pp. 3–54 (In Russian).
6. Amanov D. Some boundary value problems for a degenerate elliptic equation in an unbounded domain, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1984, no. 1, pp. 8–13 (In Russian).
7. Lerner M. E., Repin O. A. Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz equation, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1640–1642. EDN: LGMMOT. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1017985319783.

8. Moiseev E. I. Solvability of a nonlocal boundary value problem, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1643–1646. EDN: LGWFPF. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1017937403853.
9. Pleshchinsky N. B., Tumakov D. N. Boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant and in a half-plane formed from two quadrants, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 7, pp. 60–71.
10. Radzhabov N. R. Uniqueness theorems and analogues of Poisson's formula in the first octant for an equation of Helmholtz type with n singular hyperplanes, *Sov. Math., Dokl*, 1978, vol. 19, no. 4, pp. 111–115.
11. Salakhitdinov M. C., Hasanov A. The Tricomi problem for an equation of mixed type with a nonsmooth line of degeneracy, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 110–119 (In Russian).
12. Gilbert R. P. *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*. New York, London, Academic Press, 1969, xviii+311 pp.
13. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. New York, Dover Publ., 1990, xvii+561 pp.
14. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2007, vol. 52, no. 8, pp. 673–683. DOI: https://doi.org/10.1080/17476930701300375.
15. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
16. Repin O. A., Lerner M. E. On the Dirichlet problem for the generalized biaxisymmetric Helmholtz equation in the first quadrant, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 1998, no. 6, pp. 5–8 (In Russian). EDN: HKVCIB. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1.
17. Abashkin A. A. On a weighted boundary-value problem in an infinite half-strip for a bi-axisymmetric Helmholtz equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 6, pp. 1–9. EDN: RFHWBR. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X13060017.
18. Urinov A. K., Karimov E. T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter, *Appl. Math. Lett.*, 2011, vol. 24, no. 3, pp. 314–319. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.10.013.
19. Hasanov A. *Hypergeometric Functions and Their Applications to Solving Boundary Value Problems for Degenerate Second-Order Differential Equations*, D.Sc. (Physics and Mathematics) Thesis. Tashkent, 2009, 240 pp. (In Russian)
20. Karimov E. T. On the Dirichlet problem for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients, *Dokl. Akad Nauk Uzbekistana*, 2010, vol. 2, pp. 9–11 (In Russian).
21. Ergashev T. G. Potentials for a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient and their application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 257–285 (In Russian). EDN: HVACIC. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1810.
22. Niukkanen A. W. Generalised hypergeometric series ${}^{N}F(x_1, \ldots, x_N)$ arising in physical and quantum chemical applications, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, vol. 16, no. 9, pp. 1813–1825. DOI: https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/9/007.
23. Bers L. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*, Surveys in Applied Mathematics, vol. 3. New York, John Wiley & Sons, 1958, xv+278 pp.
24. Appell P. Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur dés équations différentielles linéaires aux dérivés partielles, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1880, vol. 90, pp. 296–299 (In French).
25. Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili, *Palermo Rend.*, 1893, vol. 7, pp. 111–158 (In Italian).
26. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Dirichlet problem for an elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 7, pp. 71–80. EDN: WJAPIG. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X21070082.
27. Ergashev T. G. Generalized Holmgren problem for an elliptic equation with several singular coefficients, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 842–856. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266120070046.

28. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. A problem with mixed boundary conditions for a singular elliptic equation in an infinite domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2022, vol. 66, no. 7, pp. 51–63. EDN: GYKGFC. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X22070039.
29. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 1, pp. 15–26. EDN: HRRMPZ. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220010047.
30. Volkodavov V. F., Bisrtova O. K. Construction of Riemann–Hadamard functions for a degenerate equation, *Differ. Uravn.*, 1991, vol. 27, no. 8, pp. 1444–1446 (In Russian).
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*, vol. 1. New York, McGraw-Hill, 1953, xxvi+302 pp.
32. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin, Springer, 1970, xii+372 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5.
33. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Fizmatlit, 1962, 1100 pp. (In Russian)
34. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and Series: Additional Chapters]. Moscow, Nauka, 1986, 800 pp. (In Russian)
35. Marichev O. I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsii (teoriya i tablitsy formul)* [Methods for Computing Integrals of Special Functions (Theory and Formula Tables)]. Minsk, Nauka i zhizn', 1978, 312 pp. (In Russian)
36. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 1, pp. 199–206. EDN: SNHKZE. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080222040102.