TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

Mavzu

07

Vektorlar vektor ko‘paytmasi. Aralash **ko**‘paytma.

Kucharov Olimjon Ruzimuratovich

Oliy matematika kafedrasi dotsenti

Reja:

1. Vektorlar vektor ko‘paytmasi

2. Vektorlar aralash ko’paytmasi.

3. Vektorlarning ayrim masalalarga tadbiqi

Vektorlar vektor ko‘paytmasi

Ta’rif: Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki;

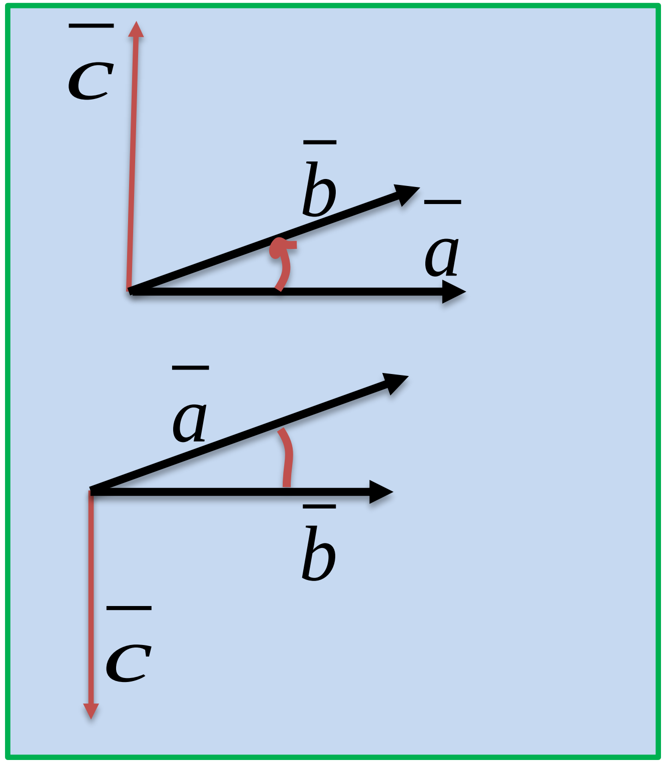
1) U son qiymat bo‘yicha berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogram yuziga teng modulga ega;
2) U parallelogram tekisligiga perpendikulyar;
3) U shunday tomonga yo‘naltirilganki, uning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga qarab eng kichik burilish soat strelkasiga qarama-qarshi bo‘ladi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning bu xildagi joylashishiga o‘ng bog‘lam deyiladi.

Ikki vektorning vector ko‘paytmasi $\vec{a}\times\vec{b}$ yoki $[\bar{a},\bar{b}]$ ko‘rinishda yoziladi.

Shunday qilib ikki vektorning vector ko‘paytmasi

$$
\begin{cases}
1)\ \vec{c}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \vec{a}\cdot\vec{b}\sin\varphi, \\
2)\ \vec{c}\perp\vec{a}\ va\ \vec{c}\perp\vec{b}, \\
3)\ \vec{a},\vec{b},\vec{c},\ \text{o'ng bog'lam hosil qilsa}
\end{cases}
$$



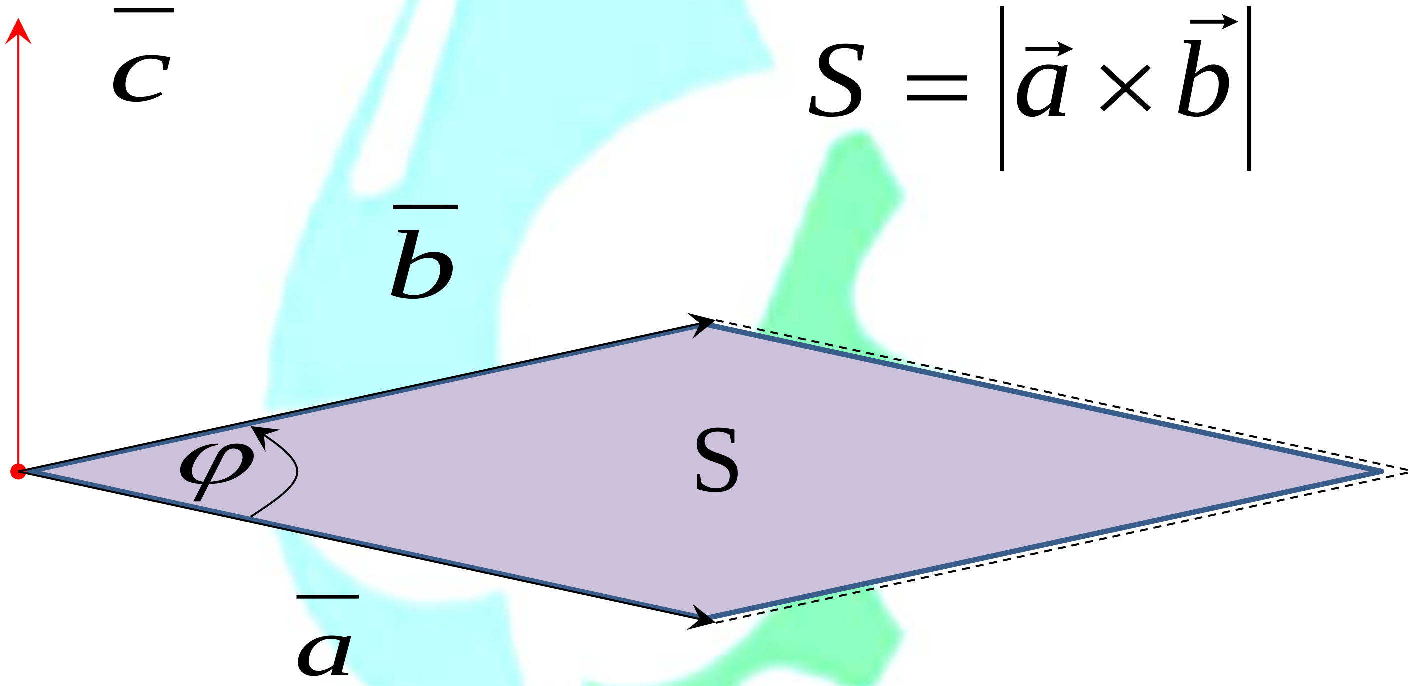
$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ bo‘ladi. Vektor ko‘paytma vector kattalikdir.

Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(a_x, a_{y,} a_z)$ va $\vec{b}(b_x,\ b_y, b_z)$

vektorlarning vektor ko‘paytmasi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

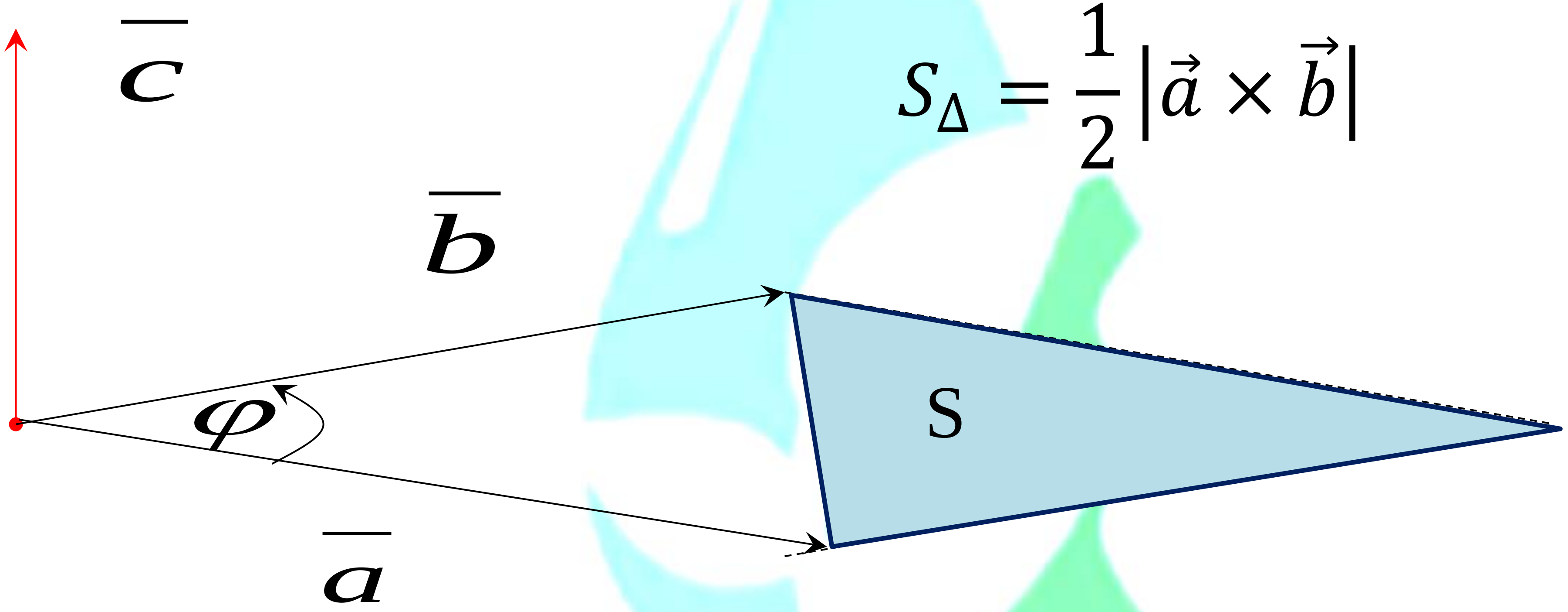
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasi



$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan uchburchak yuzasi

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$



Vektor ko'paytma xossalari

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2) $\lambda \cdot \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(\lambda \cdot \bar{a}\right) \times \bar{b} = \bar{a} \times \left(\lambda \cdot \bar{b}\right)$

3) $\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

4) $\bar{a} \times \bar{a} = 0$

5) $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$

Misol: $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b})$ ni toping.

Yechish: Quyidagiga egamiz,

$$(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b}) = 2\vec{a}\times\vec{a}+3\vec{b}+\vec{a}-4\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{b} = 7\vec{b}\times\vec{a}$$

chunki, $\vec{a}\times\vec{a}=0,\ \vec{b}\times\vec{b}=0$ va $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

Misol: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.

Yechish:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}$$

Vektorlar aralash ko‘paytmasi

Ta’rif: $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi deb $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ko‘rinishdagi ifodaga aytiladi. Odatda uch vektorning aralash ko‘paytmasi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ yoki $\left([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\right)$ ko‘rinishlarda yoziladi. Bundan keyin biz aralash ko‘paytmani $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ko‘rinishda kiritamiz. Agar vektorlarimiz $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ va $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ koordinatalar bilan berilgan bo‘lsa, bu vektorlarning aralash ko‘paytmasi

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ga teng bo‘ladi.

Aralash ko‘paytma xossalari

1) Aralash ko‘paytmaning istalgan ikki ko‘paytuvchisining o‘rinlari o‘zaro almashtirilsa, ko‘paytmaning ishorasi o‘zgaradi, yani

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$$

2) Agar berilgan uchta vektordan ikkitasi teng yoki parallel bo‘lsa, aralash ko‘paytma nolga teng bo‘ladi.

3) “Nuqta” bilan ko‘rsatilgan va “Krest” (×) bilan ko‘rsatilgan amallarning o‘rinlarini almashtirish mumkin $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\overrightarrow{c})$

Aralash ko‘paytma tadbiqi

1) $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelopipedning hajmi

$$V = \pm \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \begin{cases} + \text{vektorlar o'ng bog'lam tashkil etsa,} \\ - \text{vektorlar chap bog'lam tashkil etsa} \end{cases}$$

2) $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan piramidaning hajmi

$$V_{nup} = \pm \frac{1}{6} \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$$

3) Agar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o‘zaro komplanar bo‘lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ va aksincha.

Misol. $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ va $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$

vektorlar aralash ko‘paytmasi topilsin.

Yechish:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 12 & 6\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & 6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 12\end{vmatrix}=-(-18+48)-3(12-12)+$$
$$+2(24-9)=0$$

Demak, berilgan vektorlar komplanar vektorlar.

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: "ЎАЖБНТ" маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo'raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O'zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.,
7.Соатов Ё., Олий математика. Т., "Ўзбекистон". 1996 й, 3 жилд
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E‘TIBORLARINGIZ UCHUN RAXMAT

Kucharov Olimjon Ruzimuratovich

Oliy matematika kafedrasi dotsenti

☎ + 998 71 237 0986

O.kucharov@tiiame.uz

@O. Kucharov