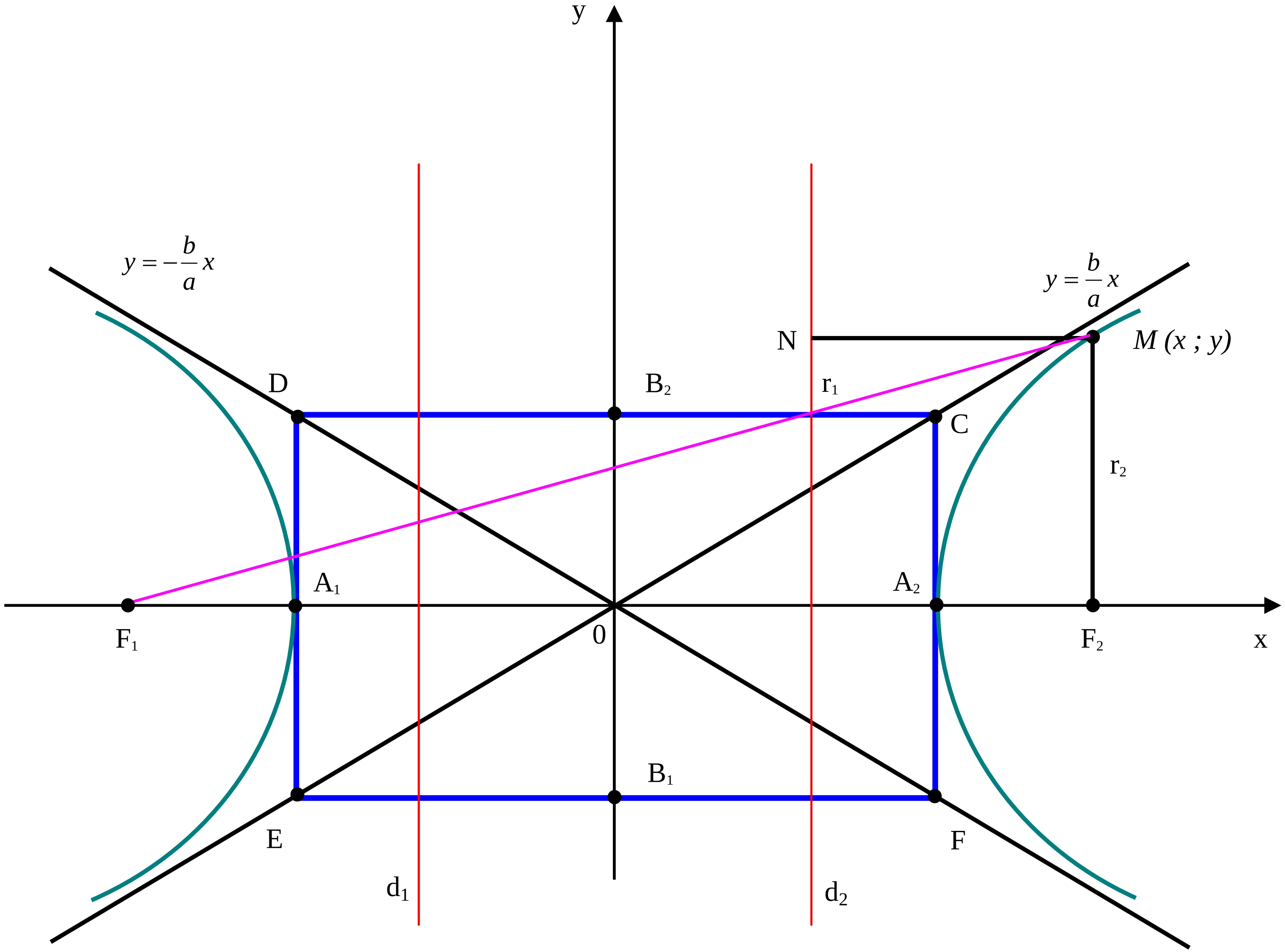
GIPERBOLA VA PARABOLA.

1 – §. GIPERBOLA VA UNING TENGLAMASI.

T a’ r i f. Giperbola deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to’plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslri deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo’lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o’zgarmas bo’ladi (bu kattalik nolga teng bo’lmagan va fokuslari orasidagi masofalardan kichik bo’lgan shartda).

F_1 va F_2 fokuslar orasidgi masofani $2c$ orqali, giperbolaning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo’lgan masofalar ayirmasining moduliga teng bo’lgan o’zgarmas miqdorni 2a orqali ($0<2a<2c$) belgilaymiz. Ellips holida bo’lgani kabi absissalar o’qini fokuslar orqali o’tkazamiz, F_1 F_2 kesmaning o’rtasini esa koordinatalar boshi deb qabul qilamz. *(6 – chizma)*



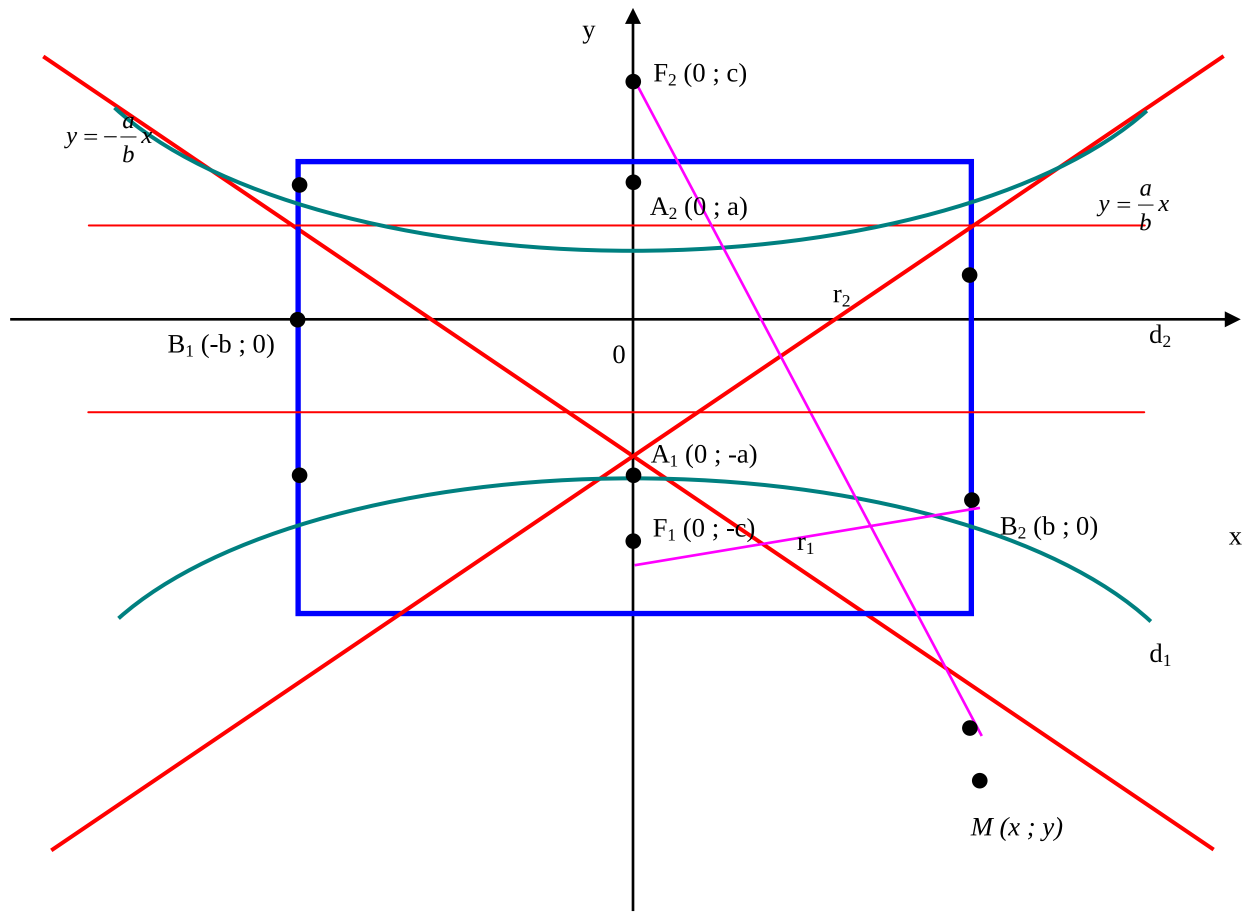
6 – c h i z m a.

Bunda fokuslar F_1 (-0 ; 0) va F_2 (0 ; 0) koordinatalarga ega bo’ladi.

Fokuslari Ox o’qida yotgan giperbola (6-chizma) tenglamasini, uning ta’rifiga asoslanib keltirib chiqaramiz. Ikki nuqt orasidagi masofa formulasiga ko’ra:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \qquad (1.1)$$

y



7 – c h i z m a.

Soddalashtirishlarni bajargandan so'ng, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \quad (1.2)$$

(1.2) tenglamada giperbola uchun 2a < 2c bo'lgandan ayirma noldan kichik:

$a^2-c^2<0$. Shuning uchun $c^2-a^2=b^2$ (1.3) deb olamiz. U hold (1.2) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (1.4).

(1.4) tenglamaga fokuslari Ox o'qida yotgan giperbolaning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Giperbola tenglamasida $y=0$ deyilsa, $x=\pm a$ bo'lib, giperbola Ox o'qini $A_1(-a\ ;\ 0)$ va $A_2(a\ ;\ 0)$ nuqtalarda kesishini bildiradi. (1.4) tenglamada x=0 deyilsa $y^2=-b^2$ bo'lib, bu esa giperbola Oy o'qi bilan kesishmasligini bildiradi.

Lekin, $y = \pm\sqrt{-b^2} = \pm bi$ mavhum bo'lgani uchin,fokal o'qqa perpendikulyar bo'lgan simmitiriya o'qi giperbolaning mavhum o'qi(B_1B_2 kesma), giperbolaning fokuslari joylashgan o'q fokal o'q (F_1F_2 kesma) va fokal o'qni odatta haqiqiy o'q (A_1A_2 kesma) deyilib, A_1 va A_2 nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari deb ataladi.

Agar giperbolaning fokuslari Oy o'qda yotsa (7-chizma), u holda uning tenglamasi $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (1.5). Bu giperbola (1.4) giperbolaga nisbatan qo'shma deyiladi.

2 – §. GIPERBOLANING SHAKLI.

(1.4) tenglamadan $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ (2.1) tenglamalarni topamiz.

Bu tenglamalarning birinchisidan ushbu xulosalar chiqadi:

1) $|x|<a$ uchun y ning qiymti mavhum; demak, giperbola y o'qi bilan kesishmaydi va $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha ichida nuqtalari bo'lmaydi.

2) $x=\pm<a$ bo'lganda, $y=0$ bo'ladi; demak, giperbola x o'qini ikkita A_1 va A_2 nuqtada kesadi; bu A_1 va A_2 nuqtalar koordinatalar boshida a masofda turadi va giperbolaning uchlari deb ataladi.

3) absolyut qiymti a dan katta bo'lgan x ning har bir qiymatiga y ning ikki qiymati to'g'ri keladi, bu qiymatlar bir – biridan ishoralari bilangina farq qiladi. Demak, giperbola x o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziqdir;

4) x cheksiz o'sganda y ham cheksiz o'sadi. Demak, (2.1) tenglamalarning ikkinchisi giperbolaning y o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziq ekanligini ko'rsatadi.

Giperbolaning hamma nuqtalari $x = \pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohadan tashqarida joylashganligidan va ordinatalar o'qiga simmetrikligidan, u cheksiz cho'zilgan ikki ayrim tarmoqdan ibort ekanligi bilinadi. (6-chizma).

3 – §. G I P E R B O L A N I N G A S I M P T O T A L A R I.

Funksiya argumenti x cheksizlikka intilganda funksiya grafigi biror to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashish xossasi uning grafigini chizishda muhum rol o'ynaydi.

T a' r i f. Agar $y = f(x)$ egri chiziqning M nuqtasidan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan s masofa M nuqta cheksiz uzoqlashganda nolga intilsa, l to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya grafigining asimptota chiziqlari umuman uch xil ko'rinishda bo'ladi:

1). Vertikal asimptota;

2). Gorizontal asimptota;

3). $y = kx + b$ *ko'rinishdagi asimptota chizig'i.*

$x \to a$ bo'lganda $|y| \to \infty$ bo'lsa, $x = a$ vertikal asimptota chizig'i; $y \to a$ bo'lganda $|x| \to \infty$ bo'lsa, $y = b$ gorizontal asimptota chizig'i bo'ladi.

Agar $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (3.1), $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - k(x))$ (3.2) limitlar mavjud bo'lsa, u holda $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning og'ma asimptotasi deyiladi.

Agar $y = kx + b$ og'ma asimptota tenglamasini aniqlashda $k = 0$ (xususiy holda $k = 0$, $b = 0$) bo'lsa, u holda $y = b$ (yoki $y = 0$) to'g'ri chiziq gorizontal asimptota deyiladi.

Giperbolaning muhum xususiyatlaridan biri shundaki, uning nuqtalari uchlaridan uzoqlashib borgan sari asimptota deb atalgan to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib boradi.

Giperbolada ikkita asimptota bor bo'lib, uning tenglamalari, (1.4) uchun: $y = \pm \frac{b}{a} x$ (3.3), (1.5) tenglama uchun: $y = \pm \frac{a}{b} x$ (3.4).

6 – va 7 – chizmalarda giperbola va uning asimptotalarining o'zaro joylashishi ko'rsatilgan. Bu chizmalarda giperbola asimptotalarining qanday joylashi ham ko'rsatilgan. Giperbolani yasashdan avval uning asimptotalarini yasash tavsiya qilinadi.

4 – §. Giperbolaning ekssentrisiteti, direktrisalari va fokal radiuslari.

T a' r i f. *Giperbolaning ekssentrisiteti deb,* fokuslar orasidagi (2c) masofaning haqiqiy o'qi (2a) nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (4.1).$$

$c < a$ bo'lgani uchun $e > 1$ bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan (1.3) formuladan quyidagi kelib chiqadi: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = e^2 - 1$ (4.2). Bundan ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa, giperbolaning yarim o'qlari nisbati $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo'lishi ko'rinadi.

Biroq $\frac{b}{a}$ nisbat giperbola asosiy to'g'ri to'rtburchagi CDEF (6-chizma) ning shaklini, demak, giperbolaning o'zining shaklini aniqlaydi. Giperbolaning ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa, uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi fokal o'q yo'nalishi bo'yicha shunchalik tortilgan bo'ladi.

T a' r i f. *Giperbolaning direktrisalari deb,* uning simmetriya markazidan $\pm\frac{a}{e}$ masofada haqiqiy o'qiga perpendikulyar bo'lib o'tadigan (d_1 va d_2) to'g'ri chiziqlarga aytiladi.

Demak, giperbola direktrisalarining tenglamalari:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{e} \\ x = -\dfrac{a}{e} \end{cases} \quad (4.3) \text{ yoki } \begin{cases} x = \dfrac{a^2}{c} \\ x = -\dfrac{a^2}{c} \end{cases} \quad (4.4)$$

Giperbolaning markazidan bir tomonda yotgan direktrisasi va fokusi mos direktrisa va mos fokus deb ataladi.

Giperbolaning nuqtalari mos fokus va mos direktrisaga nisbatan ushbu xossaga ega: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo'lgan masofaning mos direktrisagacha bo'lgan masofaga nisbati o'zgarmas son bo'lib, giperbolaning ekssentrisitetiga tengdir, ya'ni:

$$\frac{r_1}{d_1} = e \quad (4.5) \text{ yoki } \frac{r_2}{d_2} = e \quad (4.6)$$

T a' r i f. Giperbolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasidan uning $F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ fokuslarigacha bo'lgan masofalari M nuqtaning *fokal radiuslari deyiladi* va ular shu

$$\begin{matrix} r_1 = -a + ex \\ r_2 = a + ex \end{matrix}$$

(o'ng tarmog'i uchun) (4.7) va

$$\begin{matrix} r_1 = -a - ex \\ r_2 = a - ex \end{matrix}$$

(chap tarmoq uchun) (4.8) formulalar bilan aniqlanadi.

5 – §. Giperbolaning ba'zi xossalari.

1. Agar giperbolaning haqiqiy yarim o'qi mavhum yarim o'qqa teng bo'lsa $(a=b)$, u teng tomonli (yoki teng yonli) giperbola deyiladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ yoki $x^2-y^2=a^2$ (5.1) ko'rinishga ega bo'ladi. Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamasi $y=x$, $y=-x$ (5.2) ko'rinishda bo'ladi va demak, koordinata burchaklarining bissektrisalari bo'ladi.

Teng tomonli giperbolaning ekssentrisiteti: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}$ (5.3)

2. (1.3) va (4.1) tenglamalar fokuslari Oy o'qda bo'lgan giperbola uchun o'zgarishsiz qoladi.

3. Fokuslari Oy o'qda yotgan teng tomonli giperbolaning tenglamasi: $y^2-x^2=a^2$ (5.4) ko'rinishda bo'ladi.

4. Giperbolaning o'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lib, markazi biror $(x_0;y_0)$ nuqtada bo'lsa, uning tenglamasi $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ (5.5) ko'rinishda bo'ladi.

(1) tenglamada $A=\frac{1}{a^2}$; $B=0$; $C=-\frac{1}{b^2}$; $D=0$; $E=0$; $F=-1$ bo'lsa, u tenglama $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ko'rinishni olib, giperbola tenglamasiga aylanadi.

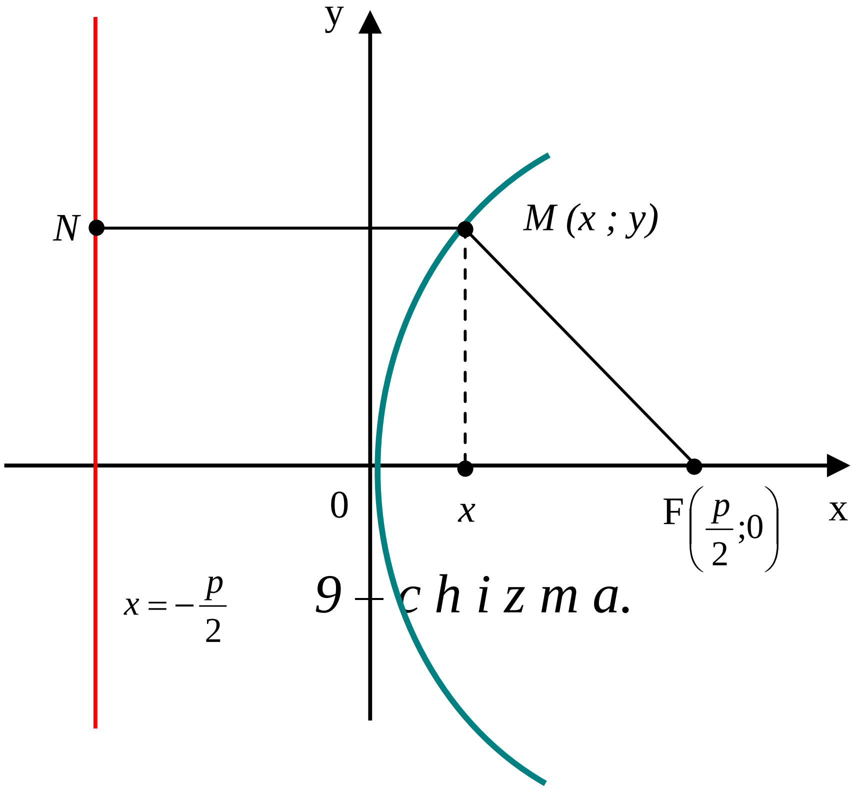
6 – §. Parabola va uning tenglamasi.

6.1. Uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola.

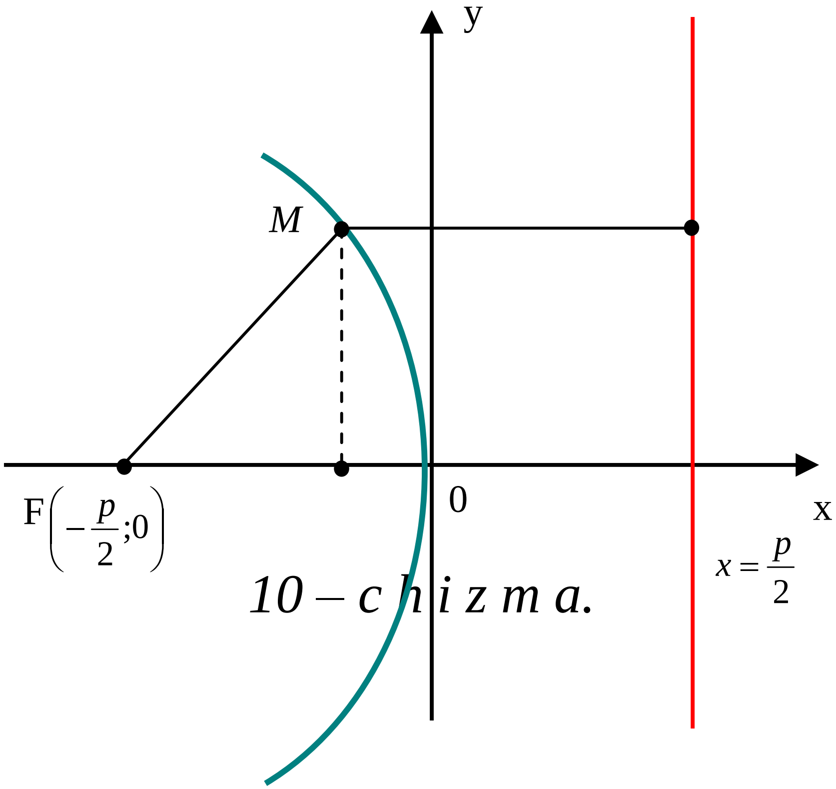
T a' r i f. ***Parabola deb,*** tekislikning fokus deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan baravar uzoqlashgan barcha nuqtalar to'plamiga (fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi) aytiladi.

Fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofani p orqali belgilaymiz. Bu kattalik ***parabolaning parametrik deyiladi.***

Parabola tenglamasini keltirib chiqarish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz. Fokusdan o'tuvchi hamda berilgan direktrisaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni abssissa o'qi deb, direktrisa va fokus orasidagi masofani ifodalovchi kesma o'rtasidan o'tuvchi hamda Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni Oy o'qi deb olamiz. *(9 – chizma)*



9 – c h i z m a.



10 – c h i z m a.

Shunday qilib, tanlangan sistemada *fokus* $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, **direktrisa tenglamasi** $x=-\frac{p}{2}$ (6.12) ko'rinishda bo'ladi.

$M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda parabola ta'rifiga asosan: $MN=MF$ (6.11). Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$ (6.13) bo'ladi.

(6.12) tenglikning har ikki tomonini kvadratga oshirib topamiz:

$y^2=2px(p>0)$ (6.14). Bu tenglama, simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari o'nga yo'nalgan, uchi koordinata boshida bo'lgan parabolaning kanonik (eng sodda) tenglamasi deyiladi (9-chizma).

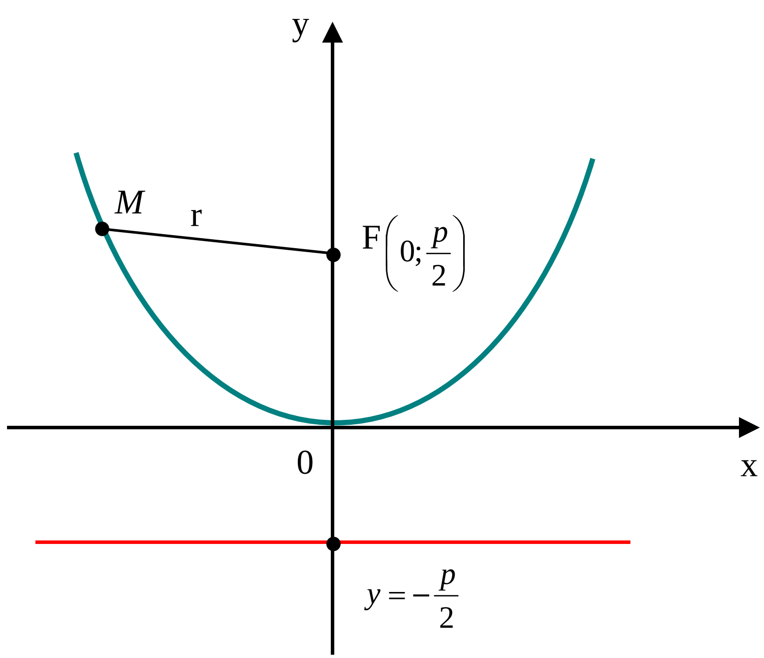
Parabolaning simmetriya o'qi fokal o'q deyiladi. Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning uchi deyiladi.

$M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi: $r=x+\frac{p}{2}$ (6.15)

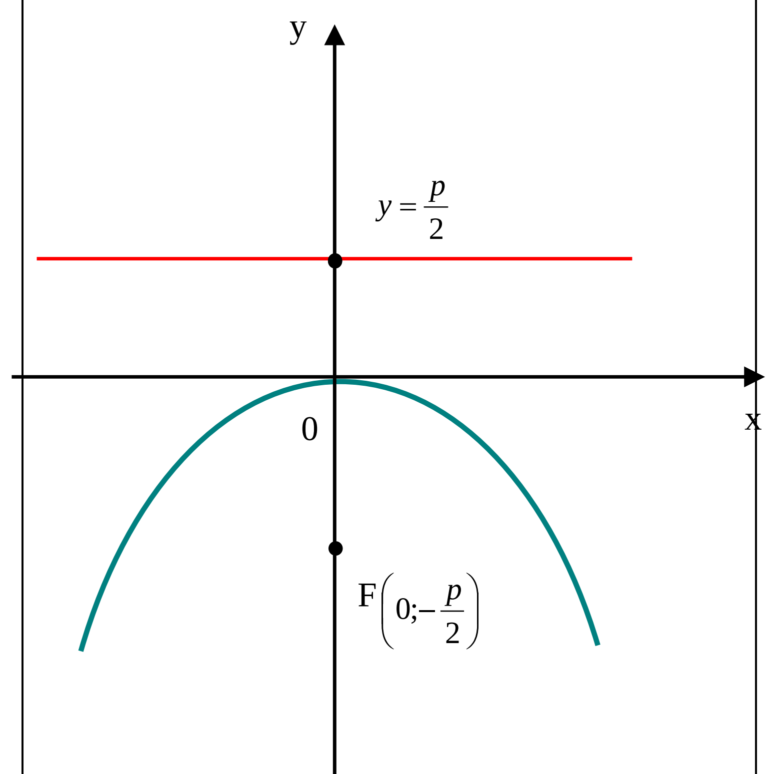
Simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari chapga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola (10-chizma) ning kanonik tenglamasi $y=-2px$

$(p > 0)$ (6.15) ko'rinishda bo'ladi. Uning direktrisasi tenglamasi $x = \frac{p}{2}$ (6.1.7) bo'ladi.

Oy o'q simmetriya o'qi bo'lgan va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida joylashgan parabolaning tenglamasi (11-chizma) $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ (6.1.7) ko'rinishda bo'lib, uning direktrisasi tenglamasi $y = -\frac{p}{2}$ (6.1.8) bo'ladi. $M(x; y)$ nuqtaning fokal – radiusi: $r = y + \frac{p}{2}$ (6.1.9)



9 – chizma.



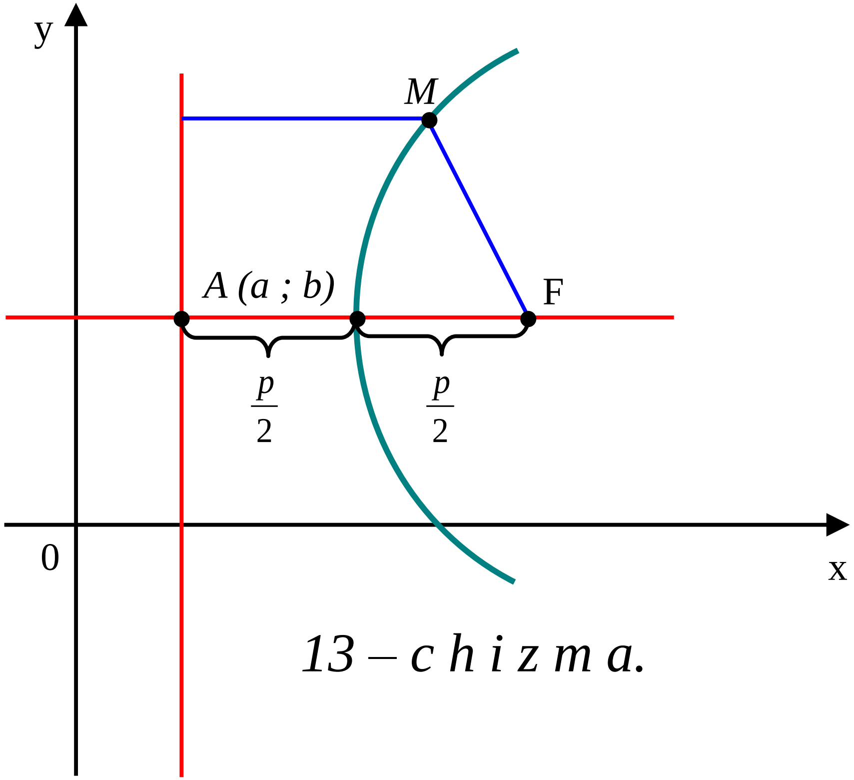
10 – chizma.

Oy o’q simmetriya o’qi bo’lgan va tarmoqlari pastga yo’nalgan, uchi koordinatalar boshida bo’lgan parabolaning (12-chizma) kanonik tenglamasi $x^2 = -2py \quad (p > 0)$ (6.1.10) ko’rinishda bo’lib, uning direktrisasi tenglamasi $y = \frac{p}{2}$ (6.1.11) bo’ladi.

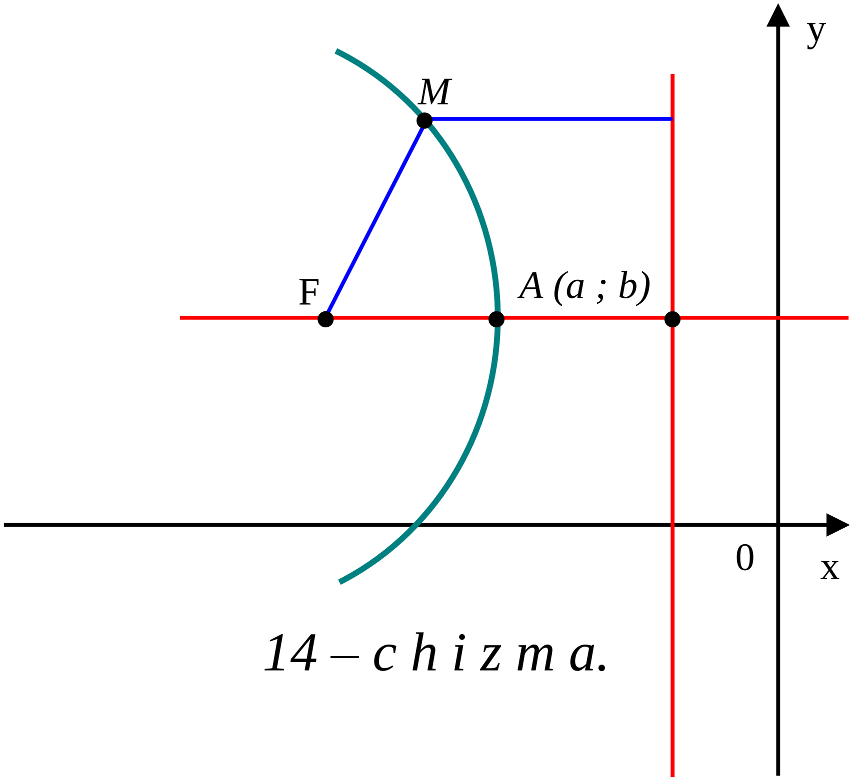
Parabolaning ekssentrisiteti: $\varepsilon = 1$, chunki $d = r$; $e = \frac{r}{d} = 1$.

6.2. Uchi siljigan parabola.

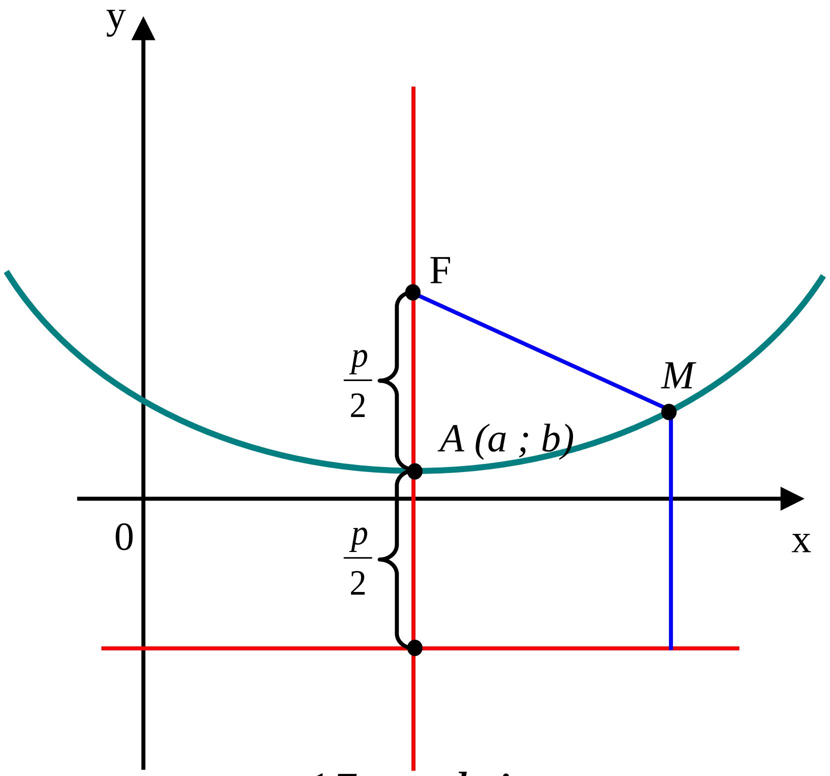
Uchi $(a;b)$ nuqtada, sim metriya o’qi Ox o’qqa parallel va tarmoqlari o’ngga yo’nalgan parabola tenglamasi *(13 – chizma)*:



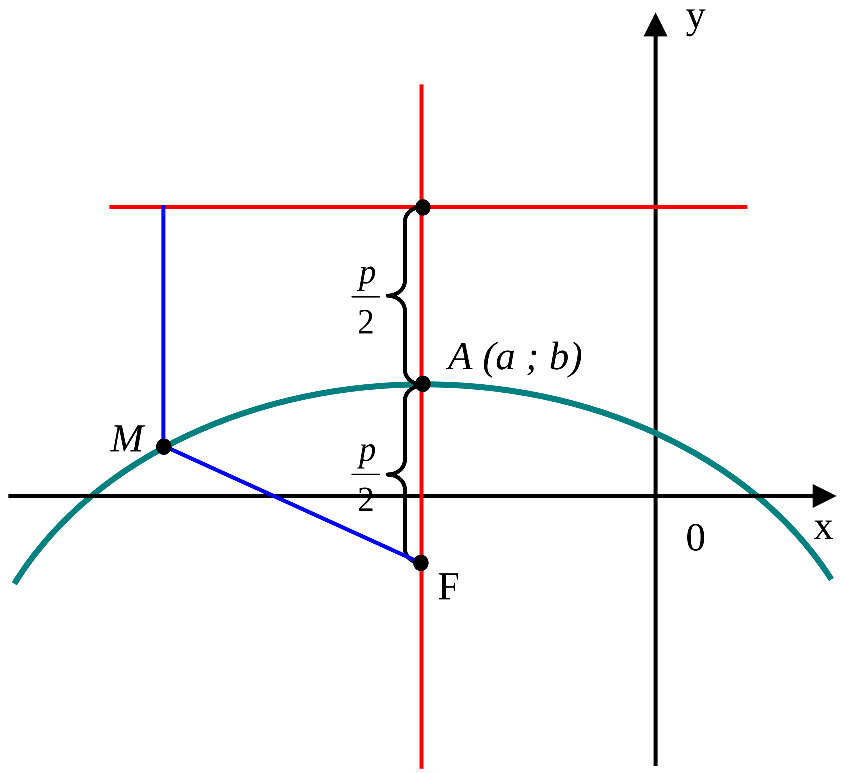
13 – chizma.



14 – chizma.



15 – c h i z m a.



16 – c h i z m a.

$(y-b)^2 = 2p(x-a)$ (6.2.1) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel va tarmoqlari chapga yo'nalgan parabola tenglamasi *(14 – chizma):*

$(y-b)^2 = -2p(x-a)$ (6.2.2) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan parabola tenglamasi *(15 – chizma):*

$(x-a)^2 = -2p(y-b)$ (6.2.3) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari pastgayo'nalgan parabola tenglamasi *(16 – chizma):*

$(x-a)^2 = -2p(y-b)$ (6.2.4) ko'rinishda bo'ladi.

Tenglamalarning har birida parabolaning parametri $p > 0$ – parabola fokusidan uning direktrisasigacha bo'lgan masofa.