Mavzu: Boshlang‘ich funksiya

Reja:

1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

2. Aniqmas integralning sodda xossalari

3. Integrallash qoidalari va asosiy integrallar jadvali

4. Integrallash usullari

4.1. Bevosita integrallash usuli.

4.2 Ozgaruvchini almashtirish metodi.

4.3 Kvadrat uchxad qatnashgan funksiyalarni integrallash.

1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

Differensial hisobning asosiy masalalaridan biri berilgan $f(x)$ funksiyaga ko‘ra uning hosilasi $f'(x)$ ni topishdan iborat edi. Bu masalaning teskarisi, yaьni hosilasiga ko‘ra funksiyaning o‘zini tiklash masalasi katta ahamiyatga ega bo‘lib, integral hisobning asosiy masalalaridan hisoblanadi.

$f(x)$ funksiya biror (a,b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar (a,b) da $f(x)$ funksiya biror $F(x)$ funksiyaning hosilasiga teng, ya’ni (a,b) intervaldan olingan ixtiyoriy x uchun $F'(x)= f(x)$ bo‘lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deyiladi.

Masalan,

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ bo‘lsin. Bu funksiyaning $(0;+\infty)$ intervalda boshlang‘ich funksiyasi $F(x)=2\sqrt{x}$ bo‘ladi, chunki $(0;+\infty)$ da $F'(x)=(2\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$;

2) $f(x)=x^2$ ning $(-\infty;+\infty)$ oraliqda boshlang‘ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ bo‘lishi ravshan.

Ravshanki, agar biror oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy o‘zgarmas C son uchun

$$F(x)+C \qquad (1)$$

funksiya ham $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi, chunki

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya biror boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lsa, u holda uning boshlang‘ich funksiyalari cheksiz ko‘p bo‘ladi.

Quyidagi savol tug‘ilishi tabiiy: biror oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalari (1) formula bilan ifodalanadimi, boshqacha aytganda $f(x)$ funksiyaning (1) formula bilan ifodalanmaydigan boshlang‘ich funksiyalari mavjudmi?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. Agar biror oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang‘ich funksiyasi C o‘zgarmasning biror qiymatida (1) formula yordamida ifodalanadi.

Isboti. Faraz qilaylik $G(x)$ funksiya qaralayotgan oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Ushbu $\varphi(x)=G(x)-F(x)$ yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun $\varphi'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ bo‘ladi, ya’ni, qaralayotgan oraliqda $\varphi(x)$ funksiya uchun funksiyaning doimiylik sharti bajariladi. Boshqacha aytganda $G(x)-F(x)=C$, ya’ni $G(x)=F(x)+C$ bo‘ladi. Demak, $G(x)$ funksiya (1) formuladan S ning biror qiymatida hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, agar oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning bitta $F(x)$ boshlang‘ich funksiyasi ma’lum bo‘lsa, u holda uning barcha boshlang‘ich funksiyalari $F(x)+C$, bu yerda C ixtiyoriy o‘zgarmas son, ko‘rinishda ifodalanar ekan.

2-ta’rif. (a,b) intervalda berilgan $f(x)$ funksiya boshlang‘ich funksiyalarning umumiy ifodasi $F(x)+C$, bu yerda C=const, shu $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi va u $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bunda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda, x – integrallash o‘zgaruvchisi deb ataladi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (2)$$

bu yerda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi.

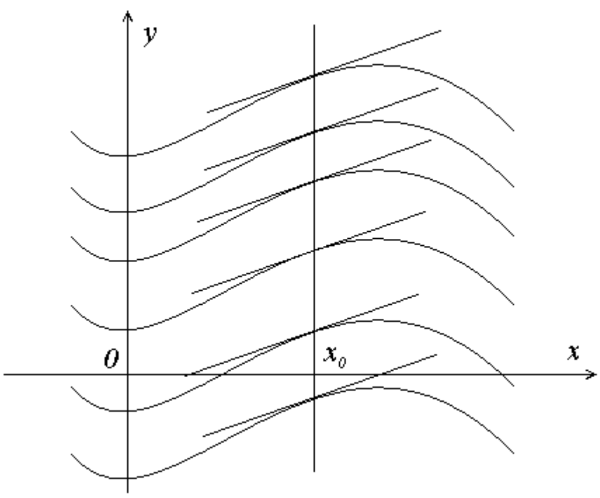
Masalan, $(-\infty;+\infty)$ da $f(x)=cosx$ bo'lsin. Bu holda $(sinx)'=cosx$ bo'lgani uchun $\int \cos x dx = sinx + C$ bo'ladi.

(2) formuladan ko'rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasini va uning aniqmas integralini topish masalalari deyarli bir xil masalalardir. Shu sababli $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topishni ham, aniqmas integralini topishni ham $f(x)$ funksiyani integrallash deb ataymiz. Integrallash differensiallashga nisbatan teskari amaldir.

Integrallash amalining to'g'ri bajarilganligini tekshirish uchun olingan natijani differensiallash yetarli: differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo'lishi lozim.

Masalan, $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ ekanligini tekshirish uchun tenglikning o'ng tomonidagi funksiyadan hosila olamiz: $(x^3+C)'=3x^2$, demak, integrallash to'g'ri bajarilgan.

Geometrik nuqtai nazardan bu teorema $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $y=F(x)+C$ bir parametrli egri chiziqlar oilasini ifodalaydi (C-parametr). Bu egri chiziqlar oilasi quyidagi xossaga ega: egri chiziqlarga abssissasi $x=x_0$ bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmalar bir-biriga parallel bo'ladi (1-rasm).



1-rasm

$F(x)+C$ egri chiziqlar oilasi integral egri chiziqlar deb ataladi. Ular bir-birlari bilan kesishmaydi, biri-biriga urinmaydi. Tekislikning har bir nuqtasidan faqat bitta integral chiziq o'tadi. Barcha integral chiziqlar biri ikkinchisidan Oy o'qiga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi.

Misol. Abssissasi x bo‘lgan nuqtasida o‘tkazilgan, urinmasining burchak koeffitsienti $k=x^3$ formula bilan ifodalanadigan va (2;5) nuqtadan o‘tuvchi egri chiziqni toping.

Yechish. Ma’lumki, $y'=k=x^3$, bu shartni qanoatlantiruvchi y funksiyaning umumiy ifodasi $y=\int x^3dx$ bo‘ladi. Bu integralni hisoblab $y=\frac{x^4}{4}+C$ ifodaga ega bo‘lamiz. Izlanayotgan egri chiziq (2;5) nuqtadan o‘tadi. Shu sababli funksiya ifodasiga berilgan nuqta koordinatalarini qo‘yamiz va S ning kerakli qiymatini topamiz. Natijada $5=\frac{2^4}{4}+C,\ C=1$ hosil bo‘ladi. Demak, izlanayotgan egri chiziq tenglamasi $y=\frac{x^4}{4}+1$ ekan.

Endi quyidagi savolga javob izlaymiz: biror oraliqda berilgan har qanday *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi mavjudmi?

Ushbu savolning javobi Darbu teoremasidan kelib chiqadi (VII bob, 1-§, 5-teorema).

Bu teoremaga asosan quyidagi

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } -2\le x<0,\\ 1, & \text{agar } 0\le x\le 2\end{cases}$$

funksiya [-2;2] da boshlang‘ich funksiyaga ega emas, chunki bu funksiya 0 va 1 qiymatlarni qabul qilib, ular orasidagi qiymatlarini qabul qilmaydi.

Har qanday funksiyaning ham boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘lavermaydi, lekin quyidagi teorema o‘rinli.

2-teorema. Agar *f(x)* funksiya biror oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda uning boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘ladi.

Bu teoremaning isboti kelgusida ko‘rsatiladi, shu sababli bu bobda uzluksiz funksiyalarni integrallash haqida gapiriladi. Uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar uchun integrallash masalasi uning u yoki bu uzluksizlik oraliqlari uchun qaraladi.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya x=0 nuqtada uzilishga ega. Bu funksiya (0;+∞) va (-∞;0) oraliqlarda uzluksiz. Birinchi oraliqda

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$$

formula o‘rinli. Ammo ikkinchi oraliq uchun bu formula ma’noga ega emas. Lekin bu oraliqda quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C.$$

Bu ikki formulani quyidagicha umumlashtirib yozish mumkin:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

2. Aniqmas integralning sodda xossalari

1^0. Aniqmas integralning differensiali (hosilasi) integral ostidagi ifodaga (funksiyaga) teng:

$d\int f(x)dx=f(x)dx$ ($(\int f(x)dx)'=f(x)$).

Isboti. Ta’rif ko‘ra $d\int f(x)dx=d(F(x)+C)=dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.

2^0. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o‘zgarmas son yig‘indisiga teng:

$\int dF(x)=F(x)+C$.

Isboti. $\int dF(x)=\int F'(x)dx=F(x)+C$.

3^0. Agar $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘lsa, u holda ixtiyoriy k ($k\neq0$) son uchun

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad (1)$$

bo‘ladi, ya’ni o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisi oldiga chiqarish mumkin.

Isboti. $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo‘lsin. U holda

$$k\int f(x)dx=k(F(x)+C)=kF(x)+kC \qquad (2)$$

bo‘ladi. $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$ va kC ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lganligi uchun $kF(x)+kC$ ifoda $kf(x)$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalarini beradi, ya’ni

$$\int kf(x)dx = kF(x)+kC \qquad (3)$$

bo‘ladi. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi.

1-izoh. k=0 bo‘lganda (1) tenglik o‘rinli emas. Haqiqatan ham, bu tenglikning chap tomoni $\int 0f(x)dx=\int 0dx=C$, C –ixtiyoriy o‘zgarmas son, o‘ng tomoni esa $0\int f(x)dx=0\cdot(F(x)+C)=0$.

2-izoh. Integrallarni topishda kC yozilmaydi. Uning o‘rniga C yoziladi, chunki ixtiyoriy o‘zgarmas sonni yozish usuli muhim emas. Bunda o‘zgarmas qo‘shiluvchining ixtiyoriy qiymat qabul qila olishi muhim hisoblanadi.

Agar C-ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda C^3, $4C$ - ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi. Lekin C^2, $\sin C$ - ixtiyoriy o‘zgarmas son emas, chunki $C^2 \geq 0$, $|\sin C| \leq 1$.

4^0. Agar $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang‘ich funksiyalari mavjud bo‘lsa, u holda

$$\int(f(x) \pm g(x))dx=\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

bo‘ladi, ya’ni ikkita funksiya algebraik yig‘indisining integrali aniqmas integrallar algebraik yig‘indisiga teng.

Isboti. Aytaylik $F(x)$ va $G(x)$ lar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang‘ich funksiyalari bo‘lsin. U holda

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx=(F(x)+C_1) \pm (G(x)+C_2) =(F(x) \pm G(x))+(C_1 \pm C_2)$$

Ammo, $F(x)\pm G(x)$ funksiya $f(x)\pm g(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi, chunki $(F(x)\pm G(x))'=F'(x)\pm G'(x)=f(x)\pm g(x)$, $C_1\pm C_2$ esa -ixtiyoriy ikkita o‘zgarmas sonlarning algebraik yig‘indisi- yana ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi.

Shu sababli $(F(x)\pm G(x))+(C_1\pm C_2)$ ifoda $f(x)\pm g(x)$ ning barcha boshlang‘ich funksiyalarini beradi, ya’ni $\int(f(x)\pm g(x))dx$ ga teng bo‘ladi.

Bu xossani chekli sondagi funksiyalar uchun ham isbotlash mumkin. Buning uchun matematik induksiya metodidan foydalanish yetarli.

3-izoh. Integrallarni topishda $C_1\pm C_2$ o‘rniga C yoziladi.

Masalan, $\int(\cos x+3x^2)dx=\int \cos xdx+\int 3x^2dx=\sin x+x^3+C$.

5^0. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. Tenglikning o‘ng tomonining hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng ekanligini ko‘rsatish yetarli. Haqiqatan ham, $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax+b))' = f(ax+b)$.

6^0. (integrallash formulasining invariantligi). Agar integrallash formulasida integrallash o‘zgaruvchisini shu o‘zgaruvchining istalgan differensiallanuvchi funksiyasi bilan almashtirsak integrallash formulasining shakli o‘zgarmaydi, ya’ni agar $\int f(x)dx = F(x)+C$ va u funksiya x ning differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsa, u holda $\int f(u)du = F(u)+C$ bo‘ladi.

Isboti. Birinchi tartibli differensialning invariantlik formasidan foydalanamiz. Bunga ko‘ra, agar *dF(x)=F’(x)dx* va *u=u(x)* differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, u holda *dF(u)=F’(u)du* bo‘ladi. $\int f(u)du = F(u)+C$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun so‘ngi tenglikning ikkala tomonidan differensial olamiz:

$$d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du, \quad d(F(u)+C) = F'(u)du = f(u)du.$$

Bu differensiallarning tengligidan 6^0 xossaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

3. Integrallash qoidalari va asosiy integrallar jadvali

Yuqorida isbotlangan aniqmas integralning sodda xossalari va aniqmas integrallar jadvali birgalikda integrallarni hisoblashning asosiy qoidalarini aniqlaydi. Integrallash amali differensiallash amaliga teskari amal bo‘lganligi sababli, quyida keltiriladigan formulalarning ko‘pchiligini hosilalar jadvalidan hosil qilish mumkin.

Quyida asosiy aniqmas integrallar jadvalini keltiramiz. Bunda har bir formula integral ostidagi funksiyalarning aniqlanish sohasida qaraladi.

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1;$ 2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ \ x \neq 0;$

3. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a}+C, \quad a>0, \ \ a\neq 1;$ $\int e^{x}dx = e^{x}+C;$

4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$ $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$, $a\neq 0$;

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a}+C \ \ (|x|<|a|);$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$ 7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

8. $\int \cos xdx = \sin x + C;$ 9. $\int \sin xdx = -\cos x + C;$

10. $\int chxdx = shx + C;$ 11. $\int shxdx = chx + C;$

12. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$ 13. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C;$

14. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a\neq 0$;

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C, \ (|x|>|a|).$

4. Integrallash usullari

4.1. Bevosita integrallash usuli. Bu usul integral ostidagi ifodani jadvaldagi biror integral ostidagi ifoda ko‘rinishiga keltirish va aniqmas integral xossalaridan foydalanishga asoslangan.

Masalan

1) $\int 2^{2x}\cdot 3^{x}dx = \int (2^2\cdot 3)^{x}dx = \int 12^{x}dx = \dfrac{12^{x}}{\ln 12}+C;$

2) $\int tg^2 xdx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tgx - x + C;$

3) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1-\sin x)dx=$

$=x+\cos x+C$;

4) $\int\cos 2xdx=\int\cos 2x\cdot\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}\int\cos(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$, bunda integrallash formulasining invariantligi xossasidan foydalanildi.

4.2. O‘zgaruvchini almashtirish usuli. Ushbu $\int f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Integralda o‘zgaruvchini almashtirish usulining mohiyati shundan iboratki, unda integrallash o‘zgaruvchisi x ni biror $x=\varphi(t)$ formula yordamida t o‘zgaruvchi bilan almashtiriladi. Bunda $\varphi'(t)$ uzluksiz va $x=\varphi(t)$ ga nisbatan teskari funksiya $t=\varphi^{-1}(x)$ mavjud deb faraz qilinadi. Endi

$$x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$$

ifodalarni $\int f(x)dx$ ga qo‘yamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Bu yerda $\varphi(t)$ ni shunday tanlash kerakki, o‘ng tomondagi integral soddaroq bo‘lsin. Agar $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri $F(t)$ bo‘lsa,

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

kelib chiqadi.

(3) formula aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish formulasi deb ataladi.

Ba’zi hollarda yangi o‘zgaruvchini $t=\varphi(x)$ formula orqali kiritish foydadan holi emas.

1-*misol*. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ ni hisoblang.

Yechish. $e^x-1=t^2$ almashtirish kiritamiz. U holda $e^x=t^2+1$, $x=\ln(t^2+1)$, $dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$ va $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{e^x-1}+C$ bo‘ladi.

2-*misol*. $\int\sin^3 x\cos xdx$ ni hisoblang.

Yechish. *t=sinx*, *dt=cosxdx* almashtirishni kiritamiz. Bu holda

$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$ bo‘ladi.

O‘zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib aniqmas integralni hisoblashda almashtirishni qo‘lay tanlab olish muhim hisoblanadi. Ixtiyoriy integralni hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirishning umumiy qoidasi yo‘q. Bunday qoidalarni ba’zi funksiyalar (trigonometrik, irratsional va boshq.) sinflari uchun keltirish mumkin.

Ko‘p hollarda integrallarni hisoblashda integral ostidagi funksiyani differensial belgisi ostiga “kiritish” usulidan foydalanadi. Funksiya differensialining ta’rifiga ko‘ra $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Bu tenglikning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tish (hosil qilish) $\varphi'(x)$ ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga “kiritish” deb aytiladi.

Aytaylik ushbu

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

ko‘rinishdagi integralni hisoblash talab qilinsin. Bu integralda $\varphi'(x)$ ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritamiz va so‘ngra $\varphi(x)=u$ almashtirish bajaramiz. U holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du .$$

3-*misol*. *I*= $\int \sqrt[3]{1+x^2}\,x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. *xdx*=$\frac{1}{2}d(1+x^2)$ ekanligidan foydalanamiz, u holda

$$I=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = |1+x^2 = u| = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x^2)^4} + C$$

bo‘ladi.

4-*misol*. *I*=$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4+3\cos x}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx=-\frac{1}{3}d(4+3\cos x)$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. $4+3\cos x=u$ deb belgilaymiz. Natijada

$$I=-\frac{1}{3}\int(4+3\cos x)^{-\frac{1}{2}}d(4+3\cos x)=-\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{4+3\cos x}+C$$

hosil bo‘ladi.

Agar integral ostidagi funksiya $\varphi'(x)/\varphi(x)$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda $\varphi'(x)$ ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritish orqali uni jadvaldagi integralga keltirish mumkin:

$$\int\frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}=\int\frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C.$$

Masalan,

$$\int tgxdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=|u=\cos x|=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

O‘z- o‘zini tekshirish uchun savollar

1. $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funksiyaning ikkita turli boshlang‘ich funksiyalari x ga farq qilishi mumkinmi?
3. Aniqmas integral nima (son, funksiya, funksiyalar to‘plami)?
4. Asosiy integrallar jadvali integralning qaysi xossasiga asoslanib tuzilgan?
5. Aniqmas integralning xossalarini ayting.
6. Qanday integrallash qoidalarini bilasiz?
7. Qanday integrallash usullarini bilasiz?
8. Bevosita integrallash usuli nimalarga asoslangan?
9. Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli differensialning qaysi xossasiga asoslangan?
10. Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli qanday bajariladi?
11. $\int\sin^n x...dx$ integralda $\sin x=t$ almashtirish maqsadga muvofiq bo‘lishi uchun ko‘p nuqta o‘rniga nima yozish kerak?

12. $\int arctg^7 x dx$ integralda $arctgx = t$ almashtirish maqsadga muvofiqmi?

$\int \frac{arctg^7 x}{1+x^2} dx$ integraldachi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi integrallarni toping.

a) $\int (x^4 - 4x^3 + 2x)dx$; b) $\int (\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2})dx$; c) $\int (\sqrt{x\sqrt{x}} + x\sqrt{x})dx$;

d) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x} dx$; e) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$; f) $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$;

g) $\int (x+1)^{14} dx$; h) $\int \sqrt{8-2x}\, dx$; i) $\int \sqrt[5]{(3x+1)^2}\, dx$;

j) $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx$; k) $\int \sin^3 x \cos x\, dx$; l) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

m) $\int e^{-x^3} x^2 dx$; n) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; o) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$;

2. O‘zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib, quyidagi integrallarni toping.

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; b) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Javoblar: 1. a) $\frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^2 + C$; b) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + C$; c) $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{3}x^2\sqrt{x} + C$;

d) $3x - 2\cdot 1{,}5^x \log_{1,5} e + C$; e) $-ctgx - tgx + C$; f) $\ln|x| + 2arctgx + C$;

g) $\frac{1}{15}(x+1)^{15} + C$; h) $-\frac{1}{3}(8-2x)\sqrt{8-2x} + C$; i) $\frac{5}{21}(3x+1)\sqrt[5]{(3x+1)^2} + C$;

j) $\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C$; k) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$; l) $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x} + C$; m) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$;

n) $0{,}5\arcsin 2x + C$; o) $0{,}5arctgx^2 + C$.

2. a) $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$; b) $\sqrt{2x+1}-3\ln(3+\sqrt{2x+1})+C$;

c) $3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C$; d) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$.