

Мардиев А. Ш. у. (2023). СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА ДВУХМЕРНОЕ РЕШЕТКЕ. GOLDEN BRAIN, 1(17), 182–196

GOLDEN BRAIN (ISSN: 2181-4120)

CERTIFICATE

THIS CERTIFICATE IS PROUDLY PRESENTED TO

Мардиев Азамат Шакар угли

in recognition of the paper publication of research paper on:

SCIENTIFIC JOURNAL “GOLDEN BRAIN”
with the title:

*СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО
ГАМИЛЬТОНИАНА НА ДВУХМЕРНОЕ РЕШЕТКЕ*

Vol.1 No.17 (2023): GOLDEN BRAIN

PKP | INDEX

JUNE 2023
DATE



EDITORIAL SECRETARY:
J. ESHONKULOVA



<https://researchedu.org/index.php/goldenbrain/article/view/4066>

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТониАНА НА ДВУХМЕРНОЕ РЕШЕТКЕ

Мардиев Азамат Шакар угли

Национальный исследовательский университет “Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства”

herr.azamat7@gmail.com

Аннотация: Рассматривается система произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специальными дисперсионными функциями (описывающими перенос частицы с узла на узел), взаимодействующих с помощью выбранного потенциала притяжения. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов $h(k)$ от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in T^2$ (T^2 – двухмерный тор) зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых левее существенного спектра существует многократное собственное значение оператора.

Ключевые слова: двухчастичный гамильтониан на двухмерной решетке, собственное значение, многократное собственное значение.

Abstract: We consider a system of arbitrary quantum particles on a one-dimensional lattice with special dispersion functions (describing the transfer of a particle from site to site) interacting with the help of a chosen attraction potential. The dependence of the number of eigenvalues of a family of operators $h(k)$ on the particle interaction energy and the total quasi-momentum $k \in T^2$ (T^2 – two-dimensional torus) depending on the interaction energy of particles, conditions are found under which a multiple eigenvalue of the operator exists to the left of the essential spectrum.

Keywords: two-particle Hamiltonian on a two-dimensional lattice, eigenvalue, multiple eigenvalues.

ВВЕДЕНИЕ

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шредингера с помощью выделения энергии движения центра масс так, что одночастичные "связанные состояния" суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом (при этом такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса) [1]. На решетке "выделению центра масс" системы отвечает реализация гамильтониана как "расслоенного оператора т. е. "прямого интеграла" семейства операторов $h(k), k \in T^2$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса $k \in T^2$ (T^2 – двухмерный тор) [2, 3].

Решетчатые двухчастичные гамильтонианы исследованы в работах [4, 5]. В работе [4] показано появление уровней связанных состояний, отстоящих от непрерывного спектра на определенном расстоянии, при некоторых значениях полного квазиимпульса системы. Спектральные свойства двухчастичного оператора, зависящие от полного квазиимпульса, изучены в [5].

В работе [3] доказано, что в случае, когда оператор $h(0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае существенного спектра, дискретный спектр оператора $h(k)$, лежащий левее существенного спектра, всегда является не пустым при всех $k \in T^d \setminus \{0\}$. В работе [6], предполагая дисперсионные соотношения частиц $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$ линейно зависимыми функциями, доказано, что из положительности $h(0)$ следует положительность $h(k)$ при всех $k \in T^3 \setminus \{0\}$.

В [7] исследована система двух частиц на трёхмерной решетке с некоторой дисперсионной функцией, описывающей перенос частицы с узла на соседний узел, взаимодействующих с помощью потенциала притяжения только на ближайших соседних узлах. Изучены спектральные свойства семейства операторов $h(k)$, в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in T^2$ (T^2 – двухмерной тор)

В работе рассматривается двухчастичный оператор Шредингера $h(k)$, $k \in T^2$, соответствующий системе двух частиц на одномерной решетке, где в качестве потенциала берется некоторый $4N + 1$ – мерный интегральный оператор, и в зависимости от N выбирается дисперсионная функция. Изучено существование собственных значений семейства операторов $h(k)$, в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса k .

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть Z^2 – одномерная целочисленная решетка, $(Z^2)^2 = Z^2 \times Z^2$ декартова степень Z^2 и $l_2((Z^2)^2)$ гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определенных на Z^2 .

Рассмотрим координатное представление гамильтониана системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с парным короткодействующим потенциалом $\hat{v}(\cdot)$ на одномерной решетке, действующего в пространстве $l_2(Z^2)^2$ по формуле:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где \hat{h}_0 и \hat{v} действуют по правилам:

$$(\hat{h}_0 \hat{\psi})(n_1, n_2) = \sum_{s \in Z^2} [\hat{\varepsilon}_1(s) \hat{\psi}(n_1 + s, n_2) + \hat{\varepsilon}_2(s) \hat{\psi}(n_1, n_2 + s)],$$

$$(\hat{v} \hat{\psi})(n_1, n_2) = \hat{v}(n_1 - n_2) \hat{\psi}(n_1, n_2).$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_1$ и $\hat{\varepsilon}_2$ – вещественнозначные четные функции, описывающие перенос частицы с узла на соседний узел, определенные по формуле

$$\hat{\varepsilon}_i = \begin{cases} \frac{2}{m_i} & \text{при } s = 0, \\ -\frac{1}{2m_i} & \text{при } s = \pm 2ne_\alpha \quad \alpha = 1,2 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

И

$$\hat{v}(s) = \begin{cases} 2\pi\mu_0 & \text{при } s = 0 \\ 2\pi^2\mu_{l\alpha} & \text{при } s = \pm le_\alpha, \alpha = 1,2 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $m_i > 0$ – масса i – ой частицы, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$, $\mu_0, \mu_{l\alpha} > 0$, e_α –единичные орты.

Отметим, что рассматриваемый оператор \hat{h} является ограниченным, самосопряженным в $l_2(Z^2)^2$.

Пусть $T^2 = (-\pi, \pi]^2$, $L_2(T^2)$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^2 . С помощью преобразования Фурье [3], [6]

$$\mathfrak{F}: l_2(Z^2)^2 \rightarrow L_2(T^2)^2$$

$$(\mathfrak{F}\hat{f})(p) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s \in (Z^2)^2} \hat{f}(s) e^{-i(p,s)}$$

получим импульсное представление h оператора \hat{h} , т. е. $h = \mathfrak{F}\hat{h}\mathfrak{F}^{-1}$. Далее оператор h разложим в прямой операторный интеграл

$$h = \int_{T^2} \oplus h(k) dk,$$

где $h(k)$, $k \in T^2$ – самосопряженный оператор, действующий в $L_2(T^2)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathfrak{v}$$

здесь $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_k(p) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(p - k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{s \in Z^2} \hat{\varepsilon}(s) e^{ips} = \sum_{i=1}^2 (1 - \cos 2np_i)$$

и \mathfrak{v} – интегральный оператор с ядром

$$\begin{aligned}
v(p - q) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \hat{v}(s) e^{-i(p-q)s} = \\
&= \mu_0 + \frac{\mu_{li}}{2} \sum_{s=l}^2 \sum_{i=1}^2 e^{-i(p_i - q_i)l} + \frac{\mu_{li}}{2} \sum_{s=-l}^2 \sum_{i=1}^2 e^{i(p_i - q_i)l} = \\
&= \mu_{li} \sum_{s=l}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-i(p_i - q_i)l} + e^{i(p_i - q_i)l}}{2} = \sum_{l=0}^N \sum_{i=1}^2 \mu_{li} \cos l(p_i - q_i).
\end{aligned}$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [8] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении \mathfrak{v} и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ состоит из области значения функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

$$\text{Где } m(k) = \min_{p \in T^2} \mathcal{E}_k(p), M(k) = \max_{p \in T^2} \mathcal{E}_k(p).$$

Поскольку $\mathfrak{v} \geq 0$, то

$$\sup(h(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \quad f \in L_2(T^2),$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma(h(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$n = \begin{cases} 2 \cdot \text{НОК} \{1, 2, \dots, N - 1\} & \text{при } N > 1, \\ 1, & \text{если } N = 1. \end{cases}$$

где НОК — наименьшее общее кратное. Следует отметить, что если N представляется

в виде степени некоторого простого числа, то число $\frac{n}{2N}$ является дробным. В противном случае число $\frac{n}{2N}$ является натуральным.

Введем следующие обозначения:

$$d(k, z) = \int_{T^2} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \quad c_{Ni}(k, z) = \int_{T^2} \frac{\cos^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z},$$

$$s_{Ni}(k, z) = \int_{T^2} \frac{\sin^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \quad (1)$$

$$\mu_i^0(k) = \frac{1}{s_{Ni}(k; m(k))} \quad (2)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2np_i} \right).$$

Предположение 1. Предположим, что $m = m_1 = m_2$ *va*

$$\Pi = \left\{ k = (k_1, k_2) \in T^2: k_\alpha \text{ хотя бы один равно } k_\alpha = \pm \frac{\pi}{2n} \quad \alpha = 1, 2 \right\}$$

$$\Pi_1 = \left\{ k = (k_1, k_2) \in T^2: k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} \text{ или } k_2 = \pm \frac{\pi}{2n} \right\}$$

$$\Pi_2 = \left\{ k = (k_1, k_2) \in T^2: k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} \text{ и } k_2 = \pm \frac{\pi}{2n} \right\}$$

Теорема 1. Пусть выполняется предположение 1.

1. Если $\frac{n}{2N}$ – натуральное число и $k \in \Pi_1$ то для любого

$$\mu = (\mu_0, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}, \mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2}) \text{ оператор } h(k) \text{ имеет ровно}$$

$$4N + \beta$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{если } \mu_{Ni} \in (0, \mu^0(k)] \\ 1 & \text{если } \mu_{Ni} \in (\mu^0(k), \infty) \end{cases}$$

2. Если $\frac{n}{2N}$ – натуральное число и $k \in \Pi_2$ то для любого

$$\mu = (\mu_0, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}, \mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2}) \text{ оператор } h(k) \text{ имеет ровно}$$

$$4N + 1$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, собственных значений, которые имеют вид $z_0 = \frac{4}{m} - 4\pi^2\mu_0$, $z_{l\alpha} = \frac{4}{m} - 2\pi^2\mu_{l\alpha}$ $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}$, $\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$. При этом z_0 – простое, а $z_{l\alpha}$, $l \geq 1$, $\alpha = 1, 2$ двукратное собственное значение.

Теорема 2. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\frac{n}{2N}$ – натуральное число, то для любого

$$\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1},$$

$\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ оператор $h(k)$ имеет ровно

$$4N + 1$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

2. Если $\frac{n}{2N}$ – дробное число, то для любого $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \in R_+^{2N+1}$,

$\mu^{(l)} = (\mu_{l1}, \mu_{l2})$ оператор $h(k)$ имеет ровно

$$4N - 1 + \sum_{i=1}^2 \alpha(Ni)$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где

$$\alpha(Ni) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_{Ni} \in (0, \mu^0(k)] \\ 1 & \text{при } \mu_{Ni} \in (\mu^0(k), \infty) \end{cases}$$

Замечание. Следует отметить, что если $1 - \mu^* d(k, z^*) = 0$, $z < m(k)$, $\mu^* > 0$ и $\mu_l = \mu^*$ для всех $l \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ то число $z = z^*$ является не менее

$$4N - 2$$

кратным собственным значением оператора $h(k)$.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $h(k)$

Введем оператор $\tilde{h}(k)$, действующий в $L_2(T^2)$ по формуле:

$$\tilde{h}(k) = \tilde{h}_0(k) - \mathbb{V},$$

Где $\tilde{h}_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\tilde{\varepsilon}_k(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2np_i} \right).$$

Пусть унитарный оператор $U: L_2(T^2) \rightarrow L_2(T^2)$ определен по формуле:

$$(Uf)(p) = f\left(p - \frac{1}{2n}\theta(k)\right),$$

где

$$\theta_i(k_i) = \arccos \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \cos 2nk_i}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2}}}.$$

Тогда

$$(U^{-1}f)(p) = f\left(p + \frac{1}{2n}\theta(k)\right), \quad f \in L_2(T^2).$$

Лемма 1. Оператор $h(k)$ является унитарно эквивалентным оператору $\tilde{h}(k)$, т.е.

$$\tilde{h}(k) = U^{-1}h(k)U.$$

Доказательство. Поскольку имеет место представление

$$\varepsilon_k(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos(2np_i - \theta_i(k_i))} \right)$$

то

$$\begin{aligned} & (h_0(k)Uf)(p) = \\ & = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos(2np_i - \theta_i(k_i))} \right) \times \\ & \times f\left(p - \frac{1}{2n}\theta(k)\right) \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$(U^{-1}h_0(k)Uf)(p) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2nk_i + \frac{1}{m_2^2} \cos 2np_i} \right) f(p)$$

т. е.

$$U^{-1}h_0(k)U = \tilde{h}_0(k)$$

Ясно, что

$$(U^{-1}\mathbb{V}Uf)(p) = U^{-1} \left(\int_{T^2} v(s-p) f \left(s - \frac{1}{2n} \theta(k) \right) ds \right) = \int_{T^2} v \left(s - \left(p + \frac{1}{2n} \theta(k) \right) \right) f \left(s - \frac{1}{2n} \theta(k) \right) ds.$$

В последнем интеграле произведя замену $s - \frac{1}{2n} \theta(k) = t$, имеем

$$(U^{-1}\mathbb{V}Uf)(p) = \int_{T^2} v(t-p) f(t) dt$$

т.е.

$$U^{-1}\mathbb{V}U = \mathbb{V}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Число z , ($z < m(k)$) является собственным значением оператора $\tilde{h}(k)$ тогда

и только тогда, когда $\Delta(k; z) = 0$, где

$$\Delta(k; z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z) \right)^2 \quad \text{при натуральном } \frac{n}{2N}$$

$$\Delta(k; z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z) \right)^2 (1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; z)) \times (1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; z))$$

при дробном $\frac{n}{2N}$. При этом кратность нуля функции $\Delta(k; \cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $h(k)$.

Доказательство. Пусть $z < m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ и f – соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение

$$\tilde{h}(k)f = zf$$

имеет нетривиальное решение f . Тогда

$$f = r_0(z)\nabla f, \quad (3)$$

где $r_0(z)$ – оператор умножения на функцию $\frac{1}{\tilde{\xi}_k(p)-z}$. Введя обозначения

$$\varphi_{l\alpha} = \int_{T^2} \cos ls_\alpha f(s) ds \quad \alpha = 1, 2 \quad (4)$$

$$\psi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sin ls_\alpha f(s) ds \quad (5)$$

перепишем равенство (3) в виде

$$f(p) = \frac{1}{\tilde{\xi}_k(p) - z} \sum_{l=0}^N \sum_{\alpha=1}^2 \mu_{l\alpha} (\varphi_{l\alpha} \cos lp_\alpha + \psi_{l\alpha} \sin lp_\alpha). \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в (4) и (5), пользуясь четностью функции $\tilde{\xi}_k(\cdot)$ получим систему линейных уравнений

$$\varphi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sum_{r=1}^N \sum_{\beta=1}^2 \mu_{r\beta} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\beta ds}{\tilde{\xi}_k(s) - z} \varphi_{r\beta} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2 \quad (7)$$

$$\psi_{l\alpha} = \int_{T^2} \sum_{r=1}^N \mu_{r\alpha} \frac{\sin ls_\alpha \sin rs_\alpha ds}{\tilde{\xi}_k(s) - z} \psi_{r\alpha} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2 \quad (8)$$

Из определения числа n следует, что число $\frac{n}{2l}$ является натуральным для всех $l = 1, \dots, N - 1$. Отсюда следует, что функция $\tilde{\xi}_k(\cdot)$ является периодической, с периодом $\frac{\pi}{2l}$ для всех $l = 1, \dots, N - 1$. Покажем, что при всех $l = 1, \dots, 2N - 1$ имеет место равенство

$$\int_{T^2} \frac{\cos ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0, \quad l = 1, \dots, 2N - 1. \quad (9)$$

Действительно, если l – нечетное (четное) число, то, заменяя переменную $s_\alpha = t_\alpha + \pi$ ($s_\alpha = t_\alpha + \frac{\pi}{l}$), $s_\beta = t_\beta$, $s_\gamma = t_\gamma$ в интеграле в левой части равенства (9), имеем

$$I_l(z) = - \int_{T^2} \frac{\cos lt_\alpha dt}{\tilde{\mathcal{E}}_k(t) - z} = -I_l(z).$$

Отсюда следует равенство (9). Из элементарных равенств

$$\begin{aligned} \cos ls_\alpha \cos rs_\alpha &= \frac{1}{2} [\cos(l+r)s_\alpha + \cos(l-r)s_\alpha], \\ \sin ls_\alpha \sin rs_\alpha &= \frac{1}{2} [\cos(l-r)s_\alpha - \cos(l+r)s_\alpha] \end{aligned}$$

и из равенства (9) получим, что

$$\begin{aligned} \int_{T^2} \frac{\cos ls_\alpha \cos rs_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds &= 0, \\ \int_{T^2} \frac{\sin ls_\alpha \sin rs_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds &= 0 \end{aligned} \quad l \neq r. \quad (10)$$

В силу (10) равенства (7) и (8) приобретают вид

$$\begin{aligned} \varphi_{l\alpha} &= \int_{T^2} \mu_{l\alpha} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha}, \\ \psi_{l\alpha} &= \int_{T^2} \mu_{l\alpha} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \end{aligned} \quad l = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2$$

Определитель системы линейных уравнений относительно неизвестных $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ ψ_1, \dots, ψ_N имеет вид

$$\Delta(k, z) = \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha} \right] \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \right]$$

При этом, если $z < m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ то,

$$\begin{aligned} \Delta(k, z) &= \\ (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha} \right] &\left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Легко показать, что согласно (10) для всякого $l \leq N$ при натуральном $\frac{n}{2N}$ имеет место равенство

$$\int_{T^2} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \int_{T^2} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \frac{1}{2} \int_{T^2} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\Delta(k, z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z) \right)^2 = 0$$

Обратно, пусть $\Delta(k, z) = 0$. Тогда для некоторых $l \in \{0, \dots, N\}$ и $z < m(k)$ хотя бы один из множителей $\Delta(k, z)$ обращается в нуль, т.е. либо

$$1 - \mu_0 \int_{T^2} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0, \text{ либо } \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z) \right)^2 = 0.$$

При этом легко проверить, что число $z < m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ и

$$\text{либо } \frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \text{ либо } \frac{\cos lp_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z} \text{ и } \frac{\sin lp_\alpha}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}$$

соответствующие собственные функции.

При дробном $\frac{n}{2N}$ применимы точно такие же рассуждения.

Заметим также, что кратность нуля функции $\Delta(k; \cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $\tilde{h}(k)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняется предположение 1. Тогда $\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \frac{4}{m}$ и

$$\begin{aligned} \Delta(k, z) &= \\ (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 &\left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\cos^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \varphi_{l\alpha} \right] \left[1 - \mu_{l\alpha} \int_{T^2} \frac{\sin^2 ls_\alpha ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \psi_{l\alpha} \right] \\ &= \left(1 - \frac{4\pi^2 \mu_0}{\frac{4}{m} - z} \right) \prod_{l=1}^N \prod_{\alpha=1}^2 \left(1 - \frac{\mu_{l\alpha} 2\pi^2}{\frac{4}{m} - z} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда легко находим нули функции $\Delta(k; \cdot)$: $z_0 = \frac{4}{m} - 4\pi^2 \mu_0$ — однократный нуль, $z_{l\alpha} = \frac{4}{m} - 2\pi^2 \mu_{l\alpha}$ — двукратный нуль, $\mu = (\mu_0, \mu^{(1)} \dots, \mu^{(N)}) \in \mathbb{R}_+^{2N+1}$, $\mu^{(1)} = (\mu_{11}, \mu_{12})$. Согласно леммам 2 и 1 эти числа являются собственными значениями $h(k)$. Легко проверить, что этим собственным значениям соответствуют следующие собственные функции:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi^2 \mu_0}, \quad \varphi_{l\alpha}^+ = \frac{\cos lp}{2\pi^2 \mu_{l\alpha}}, \quad \varphi_{l\alpha}^- = \frac{\sin lp}{2\pi^2 \mu_{l\alpha}}, \quad l = \overline{1, N} \quad \alpha = 1, 2.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда для всякого $k \in T^2$ число $\mu^0(k)$, определенное по формуле (2), является конечным.

Имеют место соотношения

$$1 - \mu_0 d(k; z) = \begin{cases} \text{монотонно убывает для всякого} & z \in (-\infty, m(k)], \\ -\infty & \text{при } z \rightarrow m(k), \\ 1 & \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$1 - \frac{\mu_{l\alpha}}{2} d(k; z) = \begin{cases} \text{монотонно убывает для всякого} & z \in (-\infty, m(k)], \\ -\infty & \text{при } z \rightarrow m(k), \\ 1 & \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; z) = \begin{cases} \text{монотонно убывает для всякого} & z \in (-\infty, m(k)], \\ -\infty & z \rightarrow m(k), \\ 1 & \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; z) = \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu^0(k)] \text{ для всякого } z \in (-\infty, m(k)], \\ < 0 & \text{при } \mu_{N\alpha} > \mu^0(k), z = m(k), \\ 1 & \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

Заметим, что функции $d(k; \cdot)$, $c_{N\alpha}(k; \cdot)$, $s_{N\alpha}(k; \cdot)$ определенные по формуле (1), являются положительными, монотонно возрастающими на $(-\infty, m(k)]$. Поэтому из последних соотношений имеем

$$\begin{aligned} 1 - \mu_0 d(k; \cdot) & \text{ имеет единственный нуль для любого } \mu_0 > 0, \\ 1 - \mu_{l\alpha} d(k; \cdot) & \text{ имеет единственный нуль для любого } \mu_{l\alpha} > 0, \\ 1 - \mu_{N\alpha} c_{N\alpha}(k; \cdot) & \text{ имеет единственный нуль для любого } \mu_{N\alpha} > 0, \\ 1 - \mu_{N\alpha} s_{N\alpha}(k; \cdot) & = \begin{cases} \text{не имеет нулей при } \mu_{N\alpha} \in (0, \mu^0(k)], \\ \text{имеет единственный нуль при } \mu_{N\alpha} \in (\mu^0(k); \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда и согласно леммам 2 и 1 получим доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Труды матем. инс-та. АН СССР. 1963. 122 с.
2. D.C. Mattis The few-body problem on lattice // Rev. mod. Phys. 58. 1986. P. 361–379.
3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov The threshold effects for the two-particle Hamiltonians // Commun. Math. Phys. 262. 2006. P. 91–115.
4. E.L. Lakshtanov, R.A. Minlos The spectrum of two-particle bound states of transfer matrices of Gibbs fields (fields on a two-dimensional lattice: adjacent levels) // Funct. Anal. Appl. Vol. 39, №. 1. 2005. P. 31–45.

5. P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti and M. O'Carroll Energy momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonians // Physical review E, Vol. 66:1, 6130. 2002.

6. Муминов М.Э. О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. Т. 153, №. 3. 2007. С. 381–387.

7. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерной решетке // Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 102-110.

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики М.: Мир. Т. 4. Анализ операторов. 1982.

REFERENCES

1. Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Труды матем. инс-та. АН СССР. 1963. 122 с.

2. D.C. Mattis The few-body problem on lattice // Rev. mod. Phys. 58. 1986. P. 361–379.

3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov The threshold effects for the two-particle Hamiltonians // Commun. Math. Phys. 262. 2006. P. 91–115.

4. E.L. Lakshtanov, R.A. Minlos The spectrum of two-particle bound states of transfer matrices of Gibbs fields (fields on a two-dimensional lattice: adjacent levels) // Funct. Anal. Appl. Vol. 39, №. 1. 2005. P. 31–45.

5. P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti and M. O'Carroll Energy momentum spectrum of some two-particle lattice Schrodinger Hamiltonians // Physical review E, Vol. 66:1, 6130. 2002.

6. Муминов М.Э. О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. Т. 153, №. 3. 2007. С. 381–387.

7. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерной решетке // Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 102-110.

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики М.: Мир. Т. 4. Анализ операторов. 1982.