



Фан: ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу

Yuqori tartibli hosilalar, funksiyaning differensialli. Funksiya differensialining taqribiy hisoblashga tadbiqi. Hosila va differensialning muhandislik masalalariga tadbiqlari.



Yuqori tartibli hosila tushunchasi.

Faraz qilaylik, biror (a,b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a,b) da aniqlangan funksiya bo'ladi. Demak, hosil bo'lgan funksiyaning hosilasi, ya'ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'' , $f''(x)$, simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha $y''(x) = (y')'$ ekan.

Shunga o'xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo'lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''' , $f'''(x)$, kabi belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha $y''' = (y'')$.

Berilgan funksiyaning to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o'xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$ -tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n -tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha n -tartibli hosila $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

Misol. $y=x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, demak $y'''(2)=24 \cdot 2=48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n - tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini hisoblash zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi bir elementar funksiyalarning n -tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y=x^\mu$ ($x>0$, $\mu\in R$) funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y'=\mu x^{\mu-1}$,
 $y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}, \dots$

Bundan

$$(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \quad (1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning $n=1$ uchun o'rinliliği yuqorida ko'rsatilgan. Endi (1) formula $n=k$ da o'rinli, ya'ni $y^{(k)}=\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo'lsin deb, uning $n=k+1$ da o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Shuning uchun

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)\dots(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (1) formulaning $n=k+1$ da ham o'rinli bo'lishini bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko'ra (1) formula $\forall n \in N$ uchun o'rinli.

(1) da $\mu=-1$ bo'lsin. U holda $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning n -tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2) \dots (-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

(2)

formula bilan topiladi.

2) $y=\ln x$ ($x>0$) funksiyaning n -tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyaning birinchi hosilasi $y' = \frac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \quad (3)$$

formula kelib chiqadi.

3) $y = \sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y' = \cos x$.

Biz uni quyidagi $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

ko'rinishda yozib olamiz.

So'ngra $y = \sin x$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(IV)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Bu ifodalardan esa $y = \sin x$ funksiyainng n -tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Xuddi shunga o'xshash

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (5)$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Masalan,

$$(\cos x)^{(115)} = \cos \left(x + 115 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = \sin x.$$

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi.

Ikkinchi tartibli hosila sodda mexanik ma'noga ega. Faraz qilaylik moddiy nuqtaning harakat qonuni $s=s(t)$ funksiya bilan aniqlangan bo'lsin. U holda uning birinchi tartibli hosilasi $v(t)=s'(t)$ harakat tezligini ifodalashi bizga ma'lum. Ikkinchi tartibli $a=v'(t)=s''(t)$ hosila esa harakat tezligining o'zgarish tezligi, ya'ni harakat tezlanishini ifodalaydi.

Misol. Moddiy nuqta $s=5t^2+3t+12$ (s metrlarda, t sekundlarda berilgan) qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning o'zgarmas kuch ta'sirida harakat qilishini ko'rsating.

Yechish. $s'=(5t^2+3t+12)'=10t+3$; $s''=(10t+3)'=10$, bundan $a=10m/s^2$ bo'lib, harakat tezlanishi o'zgarmas ekan. Nyuton qonuni bo'yicha kuch tezlanishga proporsional. Demak, kuch ham o'zgarmas ekan.

Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi

1-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n -tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya yig'indisining n -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x) + v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik $y = u + v$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$y' = u' + v',$$

$$y'' = (y')' = (u' + v')' = u'' + v''.$$

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz,

ya'ni $n=k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$

tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta'rifi, hosilaga ega bo'lgan funksiyalar xossalariidan foydalanib $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})'=(u^{(k)})'+(v^{(k)})'=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko'ra $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o'rinli deb xulosa chiqaramiz.

2-xossa. O'zgarma ko'paytuvchini n -tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi. Isbotini talabalarga qoldiramiz.

Misol. $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$. So'ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad (6)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladigan A va B koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda

$$2x+3=A(x-3)+B(x-2), \text{ yoki}$$

$$2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ikki ko‘phadning tenglik shartidan (ikki ko‘phad teng bo‘lishi uchun o‘zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo‘lishi zarur va yyetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -3A - 2B = 3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi $A=-7$, $B=9$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (1) tenglikka qo'yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning n -tartibli hosilasini quyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)} = -7 \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} + 9 \left(\frac{1}{x-3} \right)^{(n)} \quad (7)$$

Endi va funksiylarning n -tartibli hosilalarini topishimiz lozim. Buning uchun u funksiyaning n -tartibli hosilasini bilish yetarli. Bu funksiyaning $u=(x+a)^{-1}$ ko'rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda

$$u' = -(x+a)^{-2}, \quad u'' = 2(x+a)^{-3}, \quad u''' = -2 \cdot 3(x+a)^{-3} = -6(x+a)^{-4}.$$

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (x+a)^{-n-1} \quad (8)$$

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (x+a)^{-n-1} \quad (8)$$

Shunday qilib, (7) va (8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)} = -7 \cdot (-1)^n \cdot n! (x-2)^{-n-1} + 9 \cdot (-1)^n \cdot n! (x-3)^{-n-1} = (-1)^n \cdot n! \left(\frac{9}{x-3} - \frac{7}{x-2} \right)$$

natijaga erishamiz.

Savollar

1. Yuqori tartibli hosilalar qanday aniqlanadi?
2. Chekli sondagi funksiyalar yig'indisining n -tartibli hosilasi qanday hisoblanadi?
3. Ikkita funksiya ko'paytmasining n -tartibli hosilasi qanday hisoblanadi? (Leybnits formulasi)
4. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
5. n -tartibli differensial qanday hisoblanadi?
6. Agar x oraliq o'zgaruvchi bo'lsa, d^4y ni yozing.

Адабиётлар:

1. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ, Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й. 315 б.
2. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ, Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й. 336 б.
3. Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А., Функциялар назарияси, Т.: «ЎАЖБНТ» маркази, 2004 й. 148 б.
4. Turgunbayev R., Matematik analiz. 2-qism, T.TDPU, 2008 y.
5. Jo'raev T. va boshqalar, Oliy matematika asoslari. 2-q., T.: «O'zbekiston». 1999
6. Саъдуллаев А. ва бошқ. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й., 400 б.
8. www.ziyonet.uz/
9. www.pedagog.uz/ Олий математика



TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ
XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH
MUHANDISLARI INSTITUTI



ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!



+ 998 71 237

0986