MAVZU:

Funksiya hosilasi va uning tadbiqlari. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi, hosilaning geometrik va mexanik ma’nolari. Funksiyaning grafigiga berilgan nuqtada o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalari. Murakkab, parametrik, teskari va oshkormas funksiyalarning hosilalari.

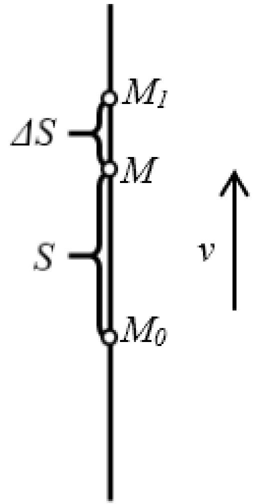
R E J A:

- **1.Harakat tezligi.**
- **2.Hosilaning ta’rifi.**
- **3.Hosilaning geometrik ma’nosi.**
- **4.Elementar funksiyalarning hosilasi.**
- **5.Murakkab funksiyaning hosilasi.**

Harakat tezligi.

Biror qattiq jismning to’g’ri chiziqli harakatini masalan, yuqoriga vertikal holda otilgan toshning harakatini, yoki dvigatel tsilindridagi porshen harakatini va shunga o’xshash harakatlarni tekshiramiz. Jismning aniq o’lchamlarini va shaklini e’tiborga olmay, bundan buyon uni harakat qiluvchi M nuqta shaklida tasavvur qilamiz. Harakat qiluvchi nuqtani uning biror boshlang’ich M_0 holatidan hisoblanadigan *s* masofa *t* vaqtga bog’liq bo’ladi, yani *s* masofa *t* vaqtning funksiyasi bo’ladi:

$$S=f(t). \qquad (1)$$



Faraz qilaylik, harakat qiluvchi M nuqta t vaqtning biror momentida M_0 boshlang'ich holatdan holatdan s masofada bo'lsin, undan keyingi biror $t + \Delta t$ momentda esa nuqta boshlang'ich holatdan holatdan $s + \Delta s$ masofada bo'lib,M_1 holatni olgan bo'lsin.

Shunday qilib, Δt vaqt oralig'ida s masofa Δs miqdorda o'zgaradi. Bu holda Δt vaqt oralig'ida s miqdor Δs orttirmani oldi deyiladi.

Endi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatni tekshiraylik, u bizga nuqta harakatining Δt vaqtdagi o'rtacha tezligini beradi:

$$V_{o\prime rt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,. \qquad (2)$$

O’rtacha tezlik M nuqta harakatining t momentdagi tezligini hamma holda ham aniq xarakterlayvermaydi. Masalan, jism Δt oraliqning boshida juda tez, oxirida esa juda sekin harakatlangan bo’lsa , u holda o’rtacha tezlik nuqta harakatining ko’rsatilgan xususiyatlarini aks ettira olmasligi va bizga nuqta harakatining t momentdagi haqiqiy tezligi haqida tasavvur bera olmasligi ravshan. Bu haqiqiy tezlikni o’rtacha tezlik yordami bilan aniqroq ifodalash uchun Δt kichik vaqt oralig’ini olish kerak. Nuqta harakatining t momentdagi tezligini $\Delta t \to 0$ dagi o’rtacha tezlikning intilgan limiti to’la xarakterlaydi. Bu limit harakatning ***berilgan momentdagi tezligi*** deyiladi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t.} \qquad (3)$$

Shunday qilib, vaqt orttirmasi Δt nolga intilgan holda yo'l orttirmasi Δs ning vaqt orttirmasi Δt ga nisbatining limiti ***harakatning berilgan momentdagi tezligi*** deyiladi.

Biz (3) tenglikni yoyilgan shaklda yozamiz. Masofaning orttirmasi $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ bo'gani uchun

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Buning o'zi notekis harakatning tezligi bo'ladi. Shunday qilib, notekis harakat tezligi tushunchasi limit tushunchasi bilan uzviy ravishda bog'langanligini ko'ramiz. Faqat limit tushunchasi yordami bilan notekis harakat tezligini topish mumkin.

Hosilaning ta'rifi

Biror oraliqda aniqlangan $y = f(x)$ (1) funksiyaga x argumentning shu oraliqdagi har bir qiymatida $y = f(x)$ funksiya ma'lum qiymatga ega.

Argument x biror (musbat yoki manfiy) Δx *orttirmani* olsin. U vaqtda y funksiya biror Δy *orttirmani* oladi. Shunday qilib:

argumentning x qiymatida $y = f(x)$ga,

argumentning $x + \Delta x$ qiymatida $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ga ega bo'lamiz.Funksiyaning orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bu nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz. Agar bu limit mavjud bo'lsa, u berilgan $f(x)$ funksiyaning ***hosilasi*** deyiladi va $f'(x)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

yoki

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Demak, berilgan $y = f(x)$ funksiyaning argument *x* bo'yicha ***hosilasi*** deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilgan holda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda *x* ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, yani hosila ham *x* ning *funksiyasi* bo'lishini takidlab o'tamiz.

Hosila uchun $f'(x)$ belgi qatorida boshqacha belgilar ham ishlatiladi, masalan,

$$y', \; y'_x, \; \frac{dy}{dx}.$$

Hosilaning *x*=*a* dagi aniq qiymati $f'(a)$ yoki $y' /_{x=a}$ bilan belgilanadi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan hosila olish amali shu funksiyani ***differensiallash*** deyiladi.

1-misol. $y = x^2$ funksiya berilgan, uning: 1) ixtiyoriy x nuqtadagi va 2) x=3 nuqtadagi y' hosilasi topilsin.

Yechish. 1)Argumentning x ga teng qiymatida $y = x^2$ ga egamiz. Argumentning $x + \Delta x$ ga teng qiymatida $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$ ga egamiz. Funksiya orttirmasini topamiz:

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Limitga o'tib, berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Demak, $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi $y' = 2x$.

2) x=3 da quyidagini hosil qilamiz:

$$y'/_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Izoh. O’tgan paragrafda, agar harakatlanuvchi nuqta *s* masofasining *t* vaqtga bog’lanishi *s*=*f(t)* formula bilan ifodalansa, u holda *t* momentdagi *v* tezlik

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

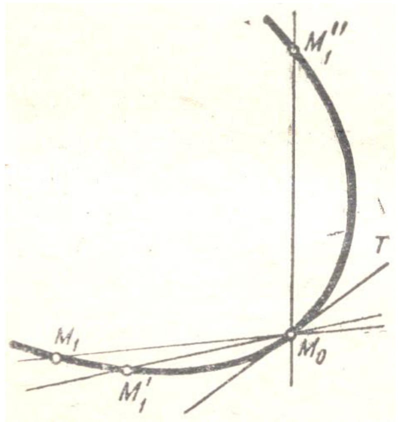
formula bilan ifodalanishi aniqlangan edi. Demak,

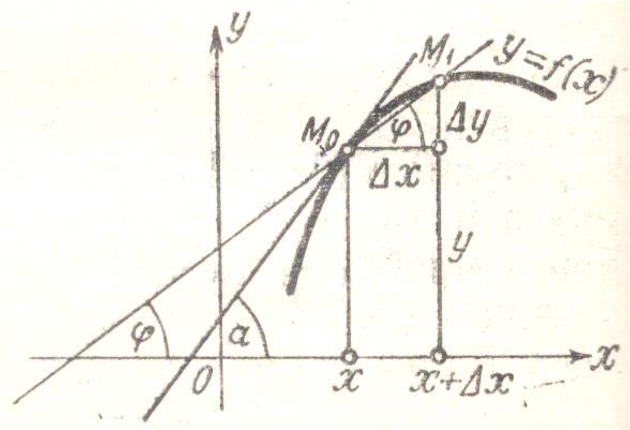
$$v = s'_t = f'(t)$$

yani tezlik yo’ldan *t* vaqt bo’yicha olingan hosilaga teng.

Hosilaning geometrik ma’nosi.

Endi hosilaning geometrik ma’nosini o’rganamiz. Buning uchun avval egri chiziqqa uning berilgan nuqtasida o’tkazilgan ***urinmaning*** ta’rifini kiritamiz.

1-chizma 

2-chizma 

Bir egri chiziq va unda tayin M_0 nuqta berilgan bo'lsin.Egri chiziqda bir M_1nuqtani olamiz va M_0M_1kesuvchini o'tkazamiz (1-chizma). Agar M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borsa, u holda M_0M_1, kesuvchi $M_0M_1{}'$, $M_0M_1{}''$ va hokazo turli vaziyatlarni ishg'ol qiladi.

Agar M_1nuqta egri chiziq bo'yicha *istalgan tomondan* M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borganda kesuvchi ma'lum M_0T to'g'ri chiziq vaziyatini egallashga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq M_0 nuqtada egri chiziqqa ***urinma*** deyiladi.

Biz *f(x)* funksiyani va to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida unga mos $y = f(x)$ egri chiziqni ko'rib chiqamiz(2-chizma). x ning biror qiymatida funksiya $y = f(x)$ qiymatga ega. Egri chiziqda *x va y* ning bu qiymatlariga $M_0(x, y)$ nuqta to'g'ri keladi. Argument *x* ga Δx orttirmani beramiz. Argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning "orttirilgan" $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati to'g'ri keladi. Egri chiziqning bunga mos nuqtasi $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nuqta bo'ladi. M_0M_1 kesuvchini o'tkazamiz va uning *Ox* o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini φ bilan belgilaymiz. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz. 2-chizmadan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \varphi \qquad (1)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar endi Δx nolga intilsa, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha harakat qilib, M_0 nuqtaga yaqinlasha boradi. M_0M_1 kesuvchi M_0 nuqta atrofida aylanadi va Δx o'zgarishi bilan φ burchak o'zgaradi. Agar $\Delta x \to 0$ da φ burchak biror α limitga intilsa, u holda M_0 nuqtadan o'tuvchi va abssisalar o;qining musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq izlangan urinma bo'ladi. Uning burchak koeffitsiyentini topish qiyin emas.

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Demak,

$$f'(x) = tg\,\alpha, \qquad (2)$$

Yani *argument x ning berilgan qiymatida* $f'(x)$ *hosilaning qiymati f(x) funksiyaning grafigiga uning* $M_0(x, y)$ *nuqtasidagi urinmasining Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng.*

2-misol. $y = x^2$ egri chiziqqa $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$; $M_2(-1,1)$ nuqtalardagi urinmalar og'malik burchaklarining tangenslari topilsin.

Yechish. Ma'lumki $y' = 2x$, demak,

$$tg\alpha_1 = y'_{x=\frac{1}{2}} = 1;\ tg\alpha_2 = y'_{x=-1} = -2.$$

Elementar funksiyalarning hosilalari.

1.$y = x^n$ funksiyaning hosilasi $y' = nx^{n-1}$ ga teng.

Isbot. Agar *x* o'ziga Δx orttirma olsa, u holda $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$.

Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n$$

yoki $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}$$

Bu nisbatning limitini topamiz:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] = n x^{n-1}.$$

Demak, $y = x^n$ funksiyaning hosilasi $y' = n x^{n-1}$ ga teng.

2.$\boldsymbol{y = sinx}$ bo'lsa $\boldsymbol{y' = cosx}$ bo'ladi.

Isbot. Agar *x* o'ziga Δx orttirma olsa, u holda $y + \Delta y = sin(x + \Delta x)$;

$$\Delta y = sin(x + \Delta x) - sinx = 2sin\frac{x + \Delta x - x}{2} cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2sin\frac{\Delta x}{2} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2sin\frac{\Delta x}{2} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

ammo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$ shuning uchun

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = cosx.$$

3.$y = cosx$ bo'lsa $y' = -sinx$ bo'ladi.

4.Agar *y=C (C=const)* bo'lsa, $y' = 0$ bo'ladi.

Isbot. *y*=*C* o'zi *x* ning shunday funksiyasiki, barcha *x* lar uchun uning qiymatlari C ga teng.

Demak, *x* ning istalgan qiymatida $y = f(x) = C$.

Argument *x* ga $\Delta x(\Delta x \neq 0)$ orttirmani beramiz. Argumentning barcha qiymatlarida funksiya *y* o'zining C qiymatini saqlaydi, shuning uchun

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C,$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0,$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,\quad y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$ yani $y' = 0$.

Murakkab funksiyaning hosilasi.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ murakkab funksiya, yani shunday funksiya berilganki, uni $y = F(u),\ u = \varphi(x)$ yoki $y = F[\varphi(x)]$ ko’rinishida tasvirlash mumkin bo’lsin. $y = F(u)$ ifodada *u o’zgaruvchi oraliq argument* deyiladi.

T e o r e m a. *Agar* $u = \varphi(x)$ *funksiya biror x nuqtada* $u'_x = \varphi'(x)$ *hosilaga ega bo’lsa,* $y = F(u)$ funksiya esa *u* ning mos qiymatida $y'_x = F'(u)$ *hosilaga ega bo’lsa,* *u holda ko’rsatilgan x nuqtada* $y = F[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham $y'_x = F'_u(u)\varphi'(x)$ ga teng hosilaga ega bo’ladi, bu yerda *u* o’rniga $u = \varphi(x)$ ifodani qo’yish zarur. Qisqacha $y'_x = y'_u u'_x$, yani *murakkab funksiyaning hosilasi berilgan funksiyaning oraliqdagi argument u bo’yicha hosilasining oraliqdagi argumentning x bo’yicha hosilasi bilan ko’paytmasiga teng.*

Isbot. Argument x ning ma'lum qiymatida $u = \varphi(x)$, $y = F(u)$.

Argumentning o'stirilgan $x + \Delta x$ qiymatida

$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x)$, $y + \Delta y = F(u + \Delta u)$.

Shunday qilib, Δx orttirmaga Δu orttirma mos keladi, bunga esa Δy orttirma mos keladi, buning ustiga $\Delta x \to 0$ da $\Delta u \to 0$ va $\Delta y \to 0$. Shartga muvofiq

$$\lim_{\Delta u \to o} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u .$$

Bu munosabatdan, limit ta’rifidan foydalanib, $(\Delta u \neq 0 da)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \qquad (1)$$

tenglikni hosil qilamiz,bu yerda $\Delta u \to 0$ da $\alpha \to 0$. Bundan (1) tenglikni

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u \qquad (2)$$

ko’rinishida yozamiz.Bu (2) tenglik ixtiyoriy α da $\Delta u = 0$ bo’lganda ham to’g’riligicha qoladi, chunki u 0=0 ayniyatga aylanadi. $\Delta u = 0$ da $\alpha = 0$ deb hisoblaymiz. (2) tenglikning barcha hadlarini Δx ga bo’lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Shartga ko’ra

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \qquad \lim_{\Delta x \to o} \alpha = 0.$$

(3) tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o’tib, shuni hosil qilamiz:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Misol. $y = (lnx)^3$ funksiya berilgan, y'_x ni toping.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1.N.S.Piskunov, Differensial va integral hisob., “O’qituvchi” nashriyoti, o’zbek tiliga tarjima, 1974 yil, 1-tom.

2.T.Soatov, Oliy matematika., “O’qituvchi” nashriyoti, Toshkent, 1985 yil.

E’tiboringiz uchun rahmat!