TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

Mavzu

Aniqmas integral. Asosiy xossalari. Boshlang’ich funksiya. Aniqmas integrallar jadvali. O’zgaruvchini almashtirish. Bo’laklab integrallash.

Бошлангич функция ва аниқмас интеграл. Аниқмас интегралнинг хоссалари.

Дифференциал ҳисобнинг асосий вазифаси берилган $F(x)$ функцияга кўра унинг ҳосиласи $F'(x) = f(x)$ ни ёки дифференциали $F'(x)dx = f(x)dx$ ни топишдир.

Интеграл ҳисобнинг асосий вазифаси бунинг тескариси бўлиб, $F(x)$ функцияни унинг маълум $f(x)$ ҳосилага ёки $f(x)dx$ дифференциалига кўра топишдан иборат. Бу икки амал ўзаро тескари амаллардир.

Таъриф. Бирор оралиқда аниқланган $f(x)$ функция учун бу оралиқнинг ҳамма қийматларида

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ёки} \quad dF(x) = f(x)dx \qquad (1.1)$$

шарт бажарилса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

Мисол. $F(x) = sinx$ функция бутун сонлар тўғри чизиғида $f(x) = cosx$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки x нинг исталган қийматида

$$F'(x) = (sinx)' = cosx = f(x)$$

ёки $dF(x) = d(sinx) = cosxdx = f(x)dx$

тенглик тўғри бўлади.

Лемма. Агар $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функция $f(x)$ нинг икки бошланғич функциялари бўлса, у ҳолда $\Phi(x) = F(x) + C$ бўлади, бунда C – ихтиёрий ўзгармас сон.

Аниқмас интегралнинг таърифи.

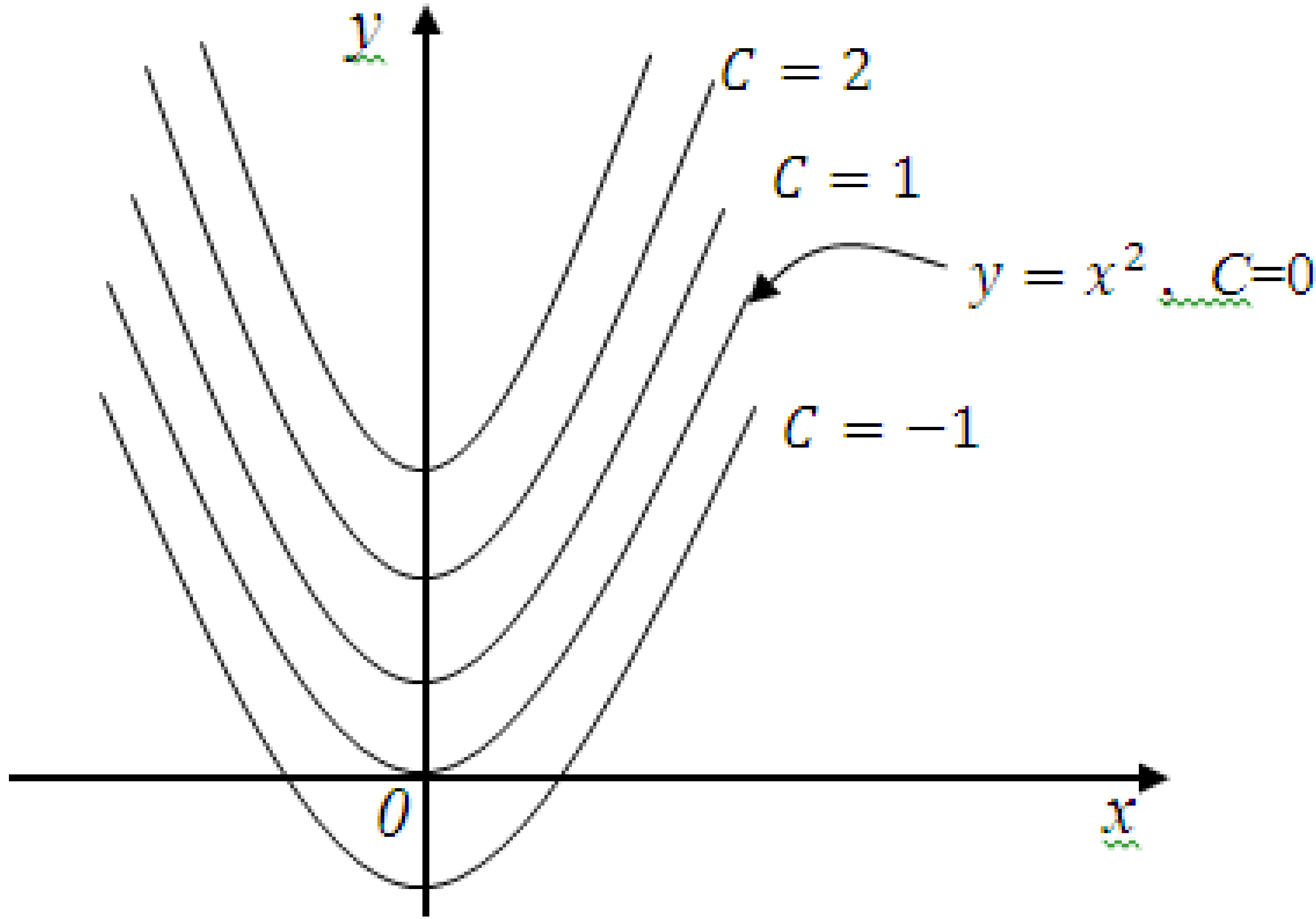
Таъриф. Агар $F(x)$ функция бирор оралиқда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, , у ҳолда $F(x) + C$ (бунда C – ихтиёрий доимий) функциялар тўплами шу кесмада $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли дейилади ва $\int f(x)dx = F(x) + C$ (1.2)

каби белгиланади. Бу ерда $f(x)$ – интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ – интеграл остидаги ифода; x - интеграллаш ўзгарувчиси, $\int$ – га интеграл белгиси дейилади.

Аниқмас интегрални топиш жараёни ёки берилган функциянинг бошланғич функция-сини топиш жараёнига интеграллаш дейилади. Кесмада узлуксиз бўлган исталган функция шу оралиқда бошланғич функцияга эга, демак аниқмас интегралга ҳам эга эканлиги келиб чиқади

Масалан. $\int cosxdx = sinx + C$, чунки $(sinx + \mathrm{C})' = cosx$. Бошланғич функциянинг графигига унинг интеграл чизиғи дейилади, шунинг учун аниқмас интеграл геометрик нуқтаи назардан ихтиёрий ***C*** ўзгармасга боғлиқ бўлган ҳамма эгри чизиқлар тўпламини ифодалайди.

1-мисол. $\int 2xdx = x^2 + C$, чунки $(x^2 + C)' = 2x$. Бунинг бошланғич функцияларидан бири $F(x) = x^2$ нинг графиги парабола бўлади, $F(x) + C = x^2 + C$ аниқмас интеграл–параболалар тўплами бўлиб, уни ихтиёрий C га турли қийматлар бериб ҳосил қилиш мумкин(1-чизма).



1-чизма.

Аниқмас интегралнинг хоссалари.

1-хосса. Аниқмас интегралнинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг, яъни

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2-хосса. Аниқмас интегралнинг дифференциали интеграл белгиси остидаги ифодага тенг, яъни

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3-хосса. Бирор функциянинг ҳосиласидан олинган аниқмас интеграл шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг, яъни

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

4-хосса. Бирор функциянинг дифференциалидан олинган аниқмас интеграл шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг, яъни

$$\int dF(x)dx = F(x) + C.$$

5-хосса. Чекли сондаги функцияларнинг алгебраик йиғиндисидан олинган аниқмас интеграл шу функцияларнинг ҳар биридан олинган аниқмас интегралларнинг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)]dx =$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx$$

6-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси ташқарисига чиқариш мумкин, яъни агар $k = const \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx .$$

7-хосса. (**Инвариантлик хоссаси**) Агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса, яъни

$$\int f(x)dx = F(x) + C ,$$

бўлса, у ҳолда

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

тенглик тўғри бўлади, бу ерда $u = u(x)$ x нинг дифференциалланувчи функцияси. Бу хосса интеграллаш формулаларининг инвариантлиги дейилади.

Масалан, агар $\int cosxdx = sinx + C$ бўлса, у ҳолда

$$\int cosx^2 \cdot dx^2 = sinx^2 + C$$

бўлади. Натижа тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун тенгламанинг чап қисмининг ва ўнг қисмининг дифференциалини ҳисоблаш етарли. Ҳақиқатан ҳам,

$$d(sinx^2) = cosx^2 \cdot dx^2$$

ва

$$d\left(\int cosx^2 \cdot dx^2\right) = cosx^2 \cdot dx^2.$$

Асосий интеграллар жадвали.

1. $\int du = u + C.$

2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1).$

3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$ 4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

5. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C;$

6. $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C;$

7. $\int e^u du = e^u + C;$

8. $\int sinudu = -cosu + C;$

9. $\int cosudu = sinu + C;$

10. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C;$

11. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C;$

12. $\int \frac{du}{sinu} = ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C;$

13. $\int \frac{du}{cosu} = ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2})\right| + C;$

14. $\int tgdu = -ln|cosu| + C;$

15. $\int ctgdu = ln|sinu| + C;$

16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{u}{a} + C;$

17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C;$

19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 + a}\right) + C.$

Misol.

1)

$$\int\left(x^3-4x+5\right)dx=\frac{x^4}{4}-2x^2+5x+C$$

2)

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1}+$$

$$+\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+C=2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$$

O’zgaruvchini almashtirish

Ushbu $\int f(x)dx$

$x=\varphi(t)$ deb olib, integral ostidagi ifodada o’zgaruvchini almashtiramiz: bu yerda $\varphi(t)$ uzluksiz funksiya bo’lib, uzluksiz hosilaga va teskari funksiyaga ega. U vaqt

$$dx=\varphi`(t)dt.$$

$$\int f(x)dx=\int f|\varphi(t)|\varphi`(t)dt$$

Misol. $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=?$ bunda $t=sinx$ almashtirishni Qilamiz, u holda $dt=cosxdx$, demak

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+C$$

Har doim ham $x = \varphi(t)$ almashtirish qulay bo'masligi mumkin. Bunday hollarda quyidagi formuladan foydalanish qulay bo'ladi

$$\int \frac{u' dx}{u} = \int \frac{d(u)}{u} = ln|u| + C$$

Misol.

$$\int \frac{2xdx}{6+x^2} = \int \frac{d(6+x^2)}{6+x^2} = ln|6+x^2| + C$$

Bo'laklab integrallash.

u va v funksiyalar x bo'yicha differentsiallanuvchi ikki funksiya bo'lsin. Unda, ma'lumki, uv ko'paytmaning defferentsiali ushbu formula bo'yicha xisoblanadi:

$$\boldsymbol{d(uv) = udv + v\,du}$$

Bundan, integrallab $uv = \int u\,dv + \int v\,du$

yoki $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

ni hosil qilamiz. Bu formula **bo'laklab integrallash** formulasi deyiladi.

Misol 1: $\int x \sin x \, dx = ?$ bunday faraz qilamiz;

u=x, dv= sinx dx;

U vaqtda *du=dx, v=-cosx*.

Demak ,

$$\int xsinxdx = -xcosx + \int cosxdx = -xcosx + sinx + C$$

Misol 2: $\int arctgx \, dx = ?$

ni hisoblash kerak. Belgilash kiritamiz

u= arctgx, dv=dx, u holda $du = \frac{dx}{1+x^2}$ *v=x*.

demak,

$$\int arctgxdx = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й. 315 б.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й. 336 б.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й. 148 б.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й., 400 б.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ
XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH
MUHANDISLARI INSTITUTI

E’TIBORINGIZ UCHUN RAXMAT!

☎ + 998 71 237 0986