TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

MAVZU

06

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Reja:

1. Kirish
2. Aylana va uning tenglamasi
3. Ellips va uning kanonik tenglamasi
4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi
5. Parabola va uning tenglamasi

1.Kirish:

Biz oldingi ma’ruzalarda har qanday tug’ri chiziqning tenglamasi X va Y o’zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali AX+BУ+C=O Tenglamadan iborat bulishligi bilan tanishdik. Bugungi ma’ruzada ikkinchi tartibli chiziqlar ya’ni tenglamasi X va Y o’zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali bulgan chiziklar bilan tanishamiz.

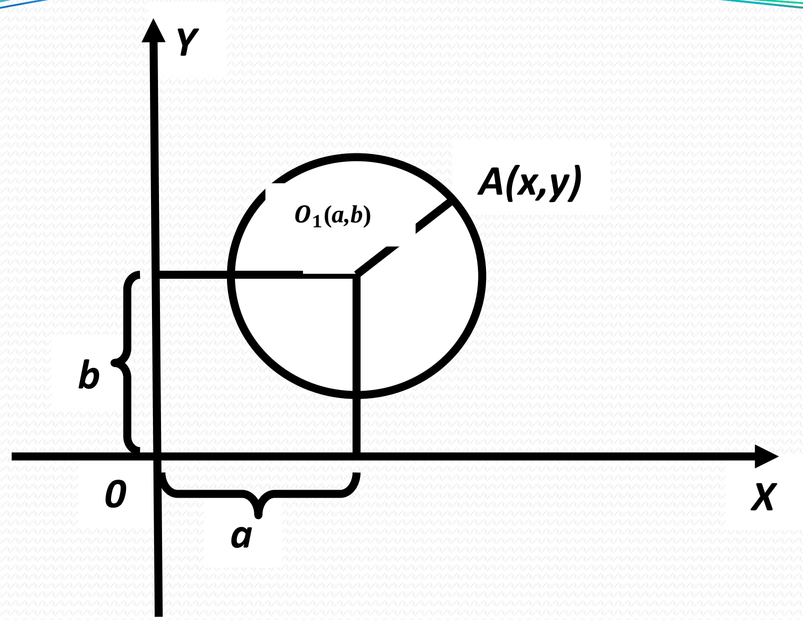
1.Kirish:

1-Ta'rif: Tug'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida tenglamasi ushbu

$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \qquad (1)$$

ko'rinishdan iborat bulgan chiziqlarga ikkinchi tartibli egri chiziqlar deyiladi. Bu yerda A, B, C, D, E, F – haqiqiy sonlar bulib A,B,C lardan kamida biri noldan farqli bulishi kerak. ITEU larning 8 turi mavjud bulib, ulardan 4 ta turi aylana, ellips, giperbola va parabolalar bilan tanishamiz.

2.Aylana va uning kanonik tenglamasi.



2-Ta'rif. Berilgan markaz deb, ataluvchi $O_1(a,b)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga (to'plamiga) aylana deyiladi.

Aylanani algebraik ya'ni, kanonik (sodda) tenglamasini tuzish talab etiladi . Berilgan nukta ya'ni markaz $O_1(a,b)$ bo'lsin.

Aylanaga tegishli ixtiyoriy *A(x,y)* nuqtani olamiz. Aylananing ta'rifiga ko'ra $|O_1\mathrm{A}|$ masofa o'zgarmas bulib, uni R bilan belgilaymiz . $|O_1\mathrm{A}| = R$ -ni aylanani radiusi deyiladi.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan :

$$|\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2} = \boldsymbol{R} => (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{R}^2\ (\mathbf{2})$$

tenglama hosil bo'ladi.

(2) tenglamani aylanani kanonik, ya'ni sodda tenglamasi deyiladi.

Xususan, *a=b=0* bo'lsa, (2) dan

$$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{R}^2 \qquad\qquad (\mathbf{3})$$

tenglama hosil bo'ladi.

(2) tenglamadagi a, b va R parametrlar orqali aylana to'liq aniqlanadi. Bu parametrlarni turli qiymatlarida turli aylanalar hosil bo'ladi.

Endi aylanani ITEU lar oilasiga tegishli ekanligini aniqlaymiz. Buning uchun (2) dagi qavslarni kvadratlarga oshiramiz: Natijada,

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0} \qquad (\mathbf{4})$$

tenglama hosil bo'ladi.

(4) tenglamani (1) ikkinchi tartibli egri chiziqlar tenglamasi bilan solishtiramiz. Agar (1) da A=C=1, B=0, D=-2a, E=-2b, F=a^2+b^2-R^2 desak, (1) dan (4) aylana tenglamasi kelib chiqadi.

1-Misol. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ aylana tenglamasi kanonik kurinishga keltirilsin, uning markazi va radiusi topilsin.

Yechish: Tenglamadagi $x^2 - 2x$ ва $y^2 + 4y$ ifodalarni to'la kvadratga keltiramiz:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

$$y^2 + 4y = y^2 + 4y + 4 - 4 = (y+2)^2 - 4$$

Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

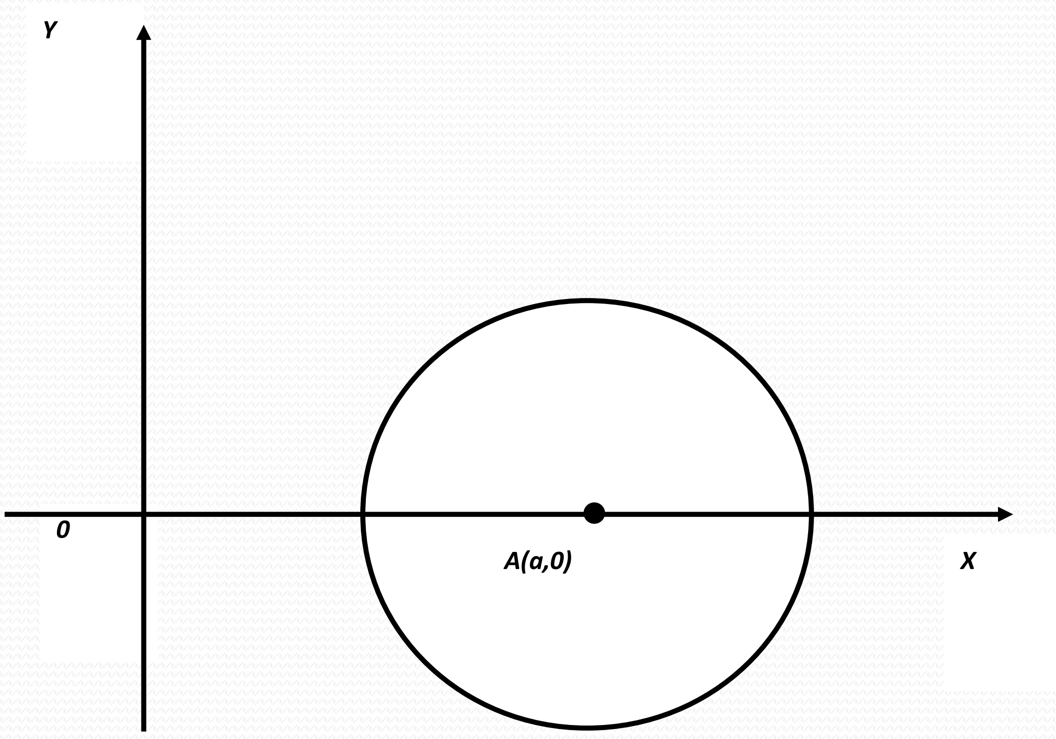
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0 \ \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 11 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16 = 4^2$$

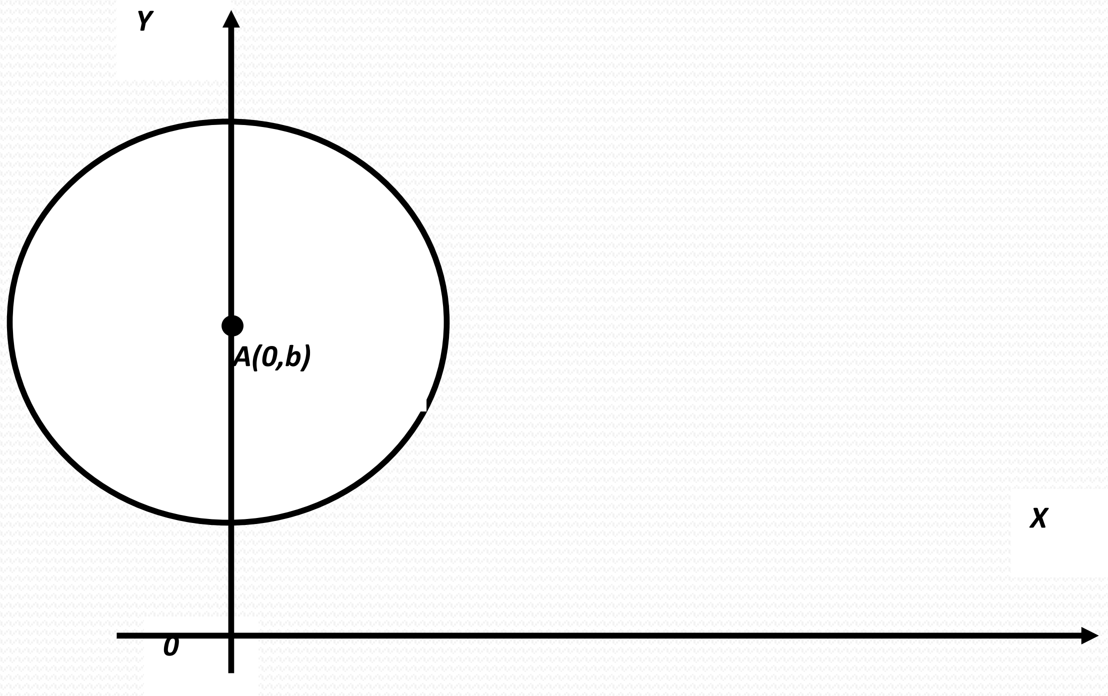
Demak, berilgan aylanani markazi $O_1(1; -2)$ nuqtada bo'lib, uning radiusi 4 ga teng bo'ladi.

Aylananing xususiy hollari

1-hol. a $\neq 0$, b=0. Bu holda (2) tenglama $(x-a)^2+y^2=R^2$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu holda aylana markazi abstsissalar o'qida joylashgan bo'ladi.



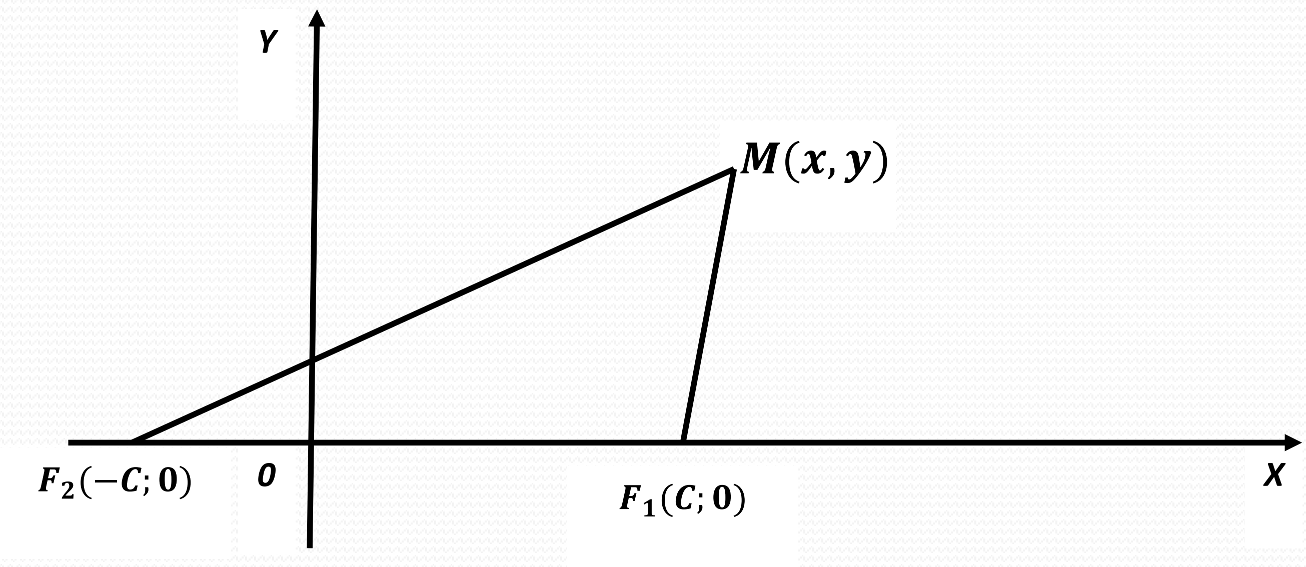
2-hol. a =0, b≠0. Bu holda (2) tenglama $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ ko'rinishda bo'lib, uning markazi ordinatalar o'qida joylashgan bo'ladi.



3.Ellips va uning kanonik tenglamasi

3-Ta'rif. Ellips deb, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ellipsni tenglamasini tuzish va uning grafigini chizish talab etiladi.



Buning uchun koordinatalar sistemasini shunday olamizki , F_1 va F_2 fokuslardan o'tuvchi tug'ri chiziqli abstsissalar o'qi, fokuslar o'rtasidan o'tuvchi tug'ri chiziqni ordinatalar uqi deb olamiz. (chizma-1).

Fokuslar orasidagi masofani $|F_1F_2| = 2C$ va ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalarning yig'indisini *2a* deb olamiz. Aytaylik, *M(x,y)* ellipsdagi ixtiyoriy nuqta bulib, fokuslari $F_1(\mathrm{C}, 0)$ va $F_2(-\mathrm{C}, 0)$ bo'lsin.

U holda ellipsning ta'rifiga ko'ra :

$$|\boldsymbol{F_1M}| + |\boldsymbol{F_2M}| = \boldsymbol{2a} \qquad (\mathbf{1})$$

bo'ladi.

Berilgan ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan quyidagi tengliklarga ega bulamiz:

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (2)$$

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (3)$$

(2) va (3)larni (1)ga qo'yamiz.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \qquad (4)$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (5)$$

(5) tenglikni har ikki tomonini ketma-ket 2 marta kvadratga oshiramiz va o’xshash hadlarni soddalashtirish natijasida

$$\boldsymbol{(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)} \quad \mathbf{(6)}$$

tenglikni hosil qilamiz.

$\boldsymbol{2a} > 2\boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{a} > c \Rightarrow \boldsymbol{a^2 - c^2 > 0}$

$b^2 = a^2 - c^2$ belgilashni kiritamiz.

$$\boldsymbol{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2} \qquad \mathbf{(7)}$$

Ko’rinishga keladi. (7) ni har ikki tomonini $a^2b^2 \neq 0$ ga bo’lamiz. Natijada,

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \mathbf{(8)}$$

tenglama xosil buladi.

(8) tenglamani ellipsning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi. a-ni ellipsning katta yarim o’qi, b-ni esa kichik yarim o’qi deyiladi.

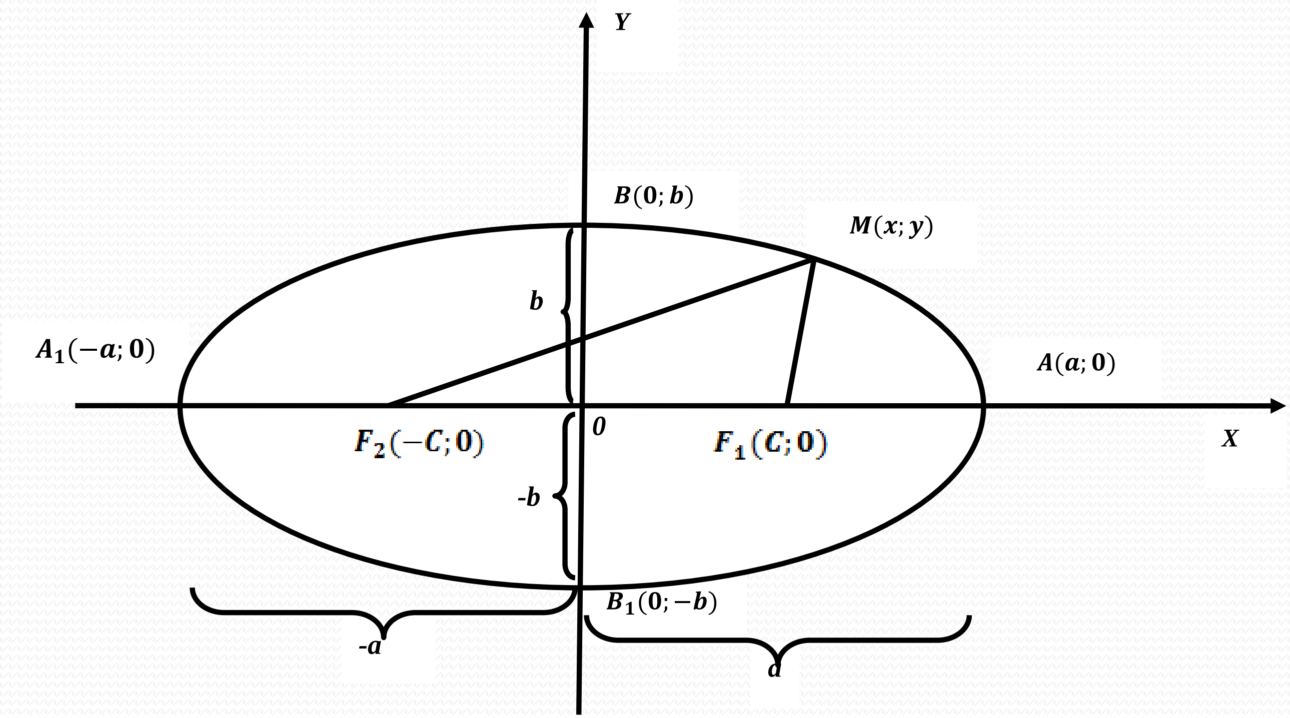
Endi (8) tenglamadan foydalanib, ellipsning shaklini (grafigini) chizamiz. Buning uchun (8) tenglamani ***y*** ga nisbatan yechamiz:

$$\boldsymbol{y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (\mathbf{9})$$

Ko'rish mumkinki, $x \in [-a; a]$ bo'lib, $y \in [-b; b]$ bo'ladi.

Demak, ellips koordinata o'qlarini 4 ta nuqtada, ya'ni Ox o'qini *A (-a;0)* bo'lib, $A_1(-a; 0)$ nuqtalarda Oy o'qini esa B(0;b), $B_1(0; -b)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Shunday qilib, Ellips chizig'i *x*=+*a*, *x*=-*a*, *y*=*b* va *y*=-*b* to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rt burchak ichida joylashgan yopiq shakldan iborat bo'ladi. Ellipsning simmetriya o'qlari $AA_1 = 2a$ uning katta o'qi va $BB_1 = 2b$ kichik o'qlaridan iborat bo'ladi.

Demak, ellipsning shakli qo'yidagicha bo'ladi.



Agar ellips tenglamasida ya'ni,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}=1$da a=b desak, $\boldsymbol{x^2+y^2=a^2}$ aylana tenglamasiga ega bo'lamiz. Demak, aylana ellipsning xususiy holi ekan.

F_1M va F_2M kesmalari M nuqtaning fokal radiuslari deyiladi va ularni r_1 va r_2 bilan belgilaymiz.

Ko'rsatish mumkinki,

$$\boldsymbol{r_1 = |MF_1| = a - \frac{c}{a}x}$$

$$\boldsymbol{r_2 = |MF_2| = a + \frac{c}{a}x}$$

$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ nisbatni ellipsning ekstsentrisiteti deyiladi.

2-misol. *2a = 10, Ɛ=0,8* bo'lsa, ellips tenglamasi yozilsin.

Yechish. 2a = 10 => a=5, Ɛ= $\frac{c}{a} = 0{,}8$ => $c = a \cdot 0{,}8 = 5 \cdot 0{,}8 = 4,$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

Demak, $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

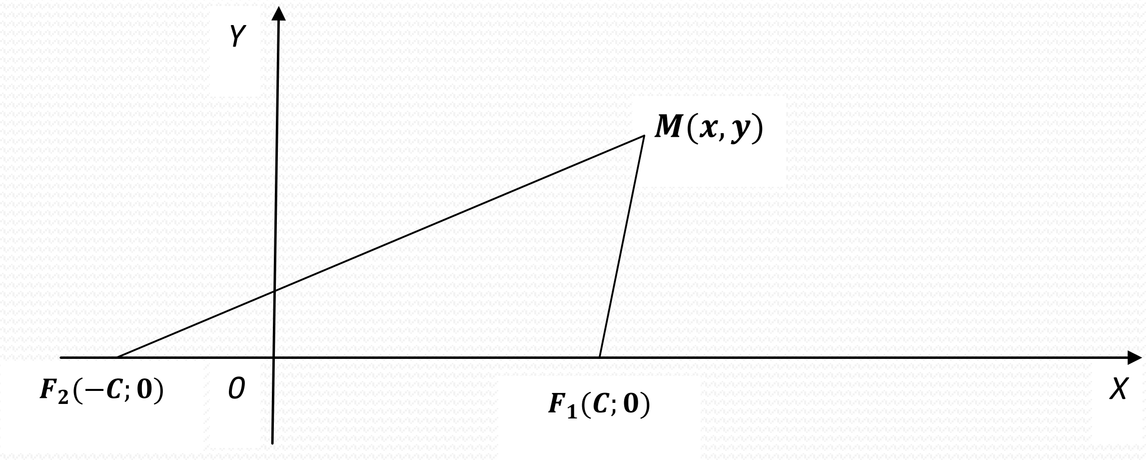
4-Ta'rif. Giperbola deb, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi ikki nuqtalari orasidagi masofalari ayirmalari o'zgarmas bulgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Giperbola tenglamasini topish va uning shaklini chizish talab etiladi. Buning uchun koordinalar sistemasini xuddi ellipsdagidek olamiz, ya'ni F_1 va F_2 fokuslardan o'tgan tug'ri chiziqni abtsissalar o'qi , ularning o'rtasidan o'tgan tik tug'ri chiziqni ordinatalar o'qi deb qabul qilamiz.

$|F_1F_2| = 2C$ bilan belgilaymiz. Bu yerda $F_1(C;0), F_2(-C;0)$

Giperbola ta'rifiga asosan:

$$\boldsymbol{F_2M - F_1M = \pm 2a} \qquad (1)$$



Chizmadan berilgan ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Bularni (1) tenglikka qo'yamiz:

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})^{2}+\boldsymbol{y}^{2}}-\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^{2}+\boldsymbol{y}^{2}}=\boldsymbol{2a} \qquad (\mathbf{2})$$

Xuddi ellipsdagidek (2) tenglikni har ikki tomonini ketma-ket ikki marta kvadratga oshirib o'xshash hadlarni ixchamlash natijasida

$$(\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{c}^{2})\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{a}^{2}\boldsymbol{y}^{2}=\boldsymbol{a}^{2}(\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{c}^{2}) \qquad (\mathbf{3})$$

$$2a<2c=>a<c=>a^{2}-c^{2}<0$$

$c^{2}-a^{2}=b^{2}$ belgilash kiritamiz.

$$-b^{2}x^{2}+a^{2}y^{2}=-a^{2}b^{2}\ /\!:-a^{2}b^{2}\neq 0$$

$$\frac{\boldsymbol{x}^{2}}{\boldsymbol{a}^{2}}-\frac{\boldsymbol{y}^{2}}{\boldsymbol{b}^{2}}=\mathbf{1} \qquad \boldsymbol{(4)}$$

(4) tenglamani giperbolani eng sodda (kanonik tenglamasi deyiladi) .

Giperbolaning shaklini uning tenglamasiga ko'ra tekshirish

(4) tenglamani ***y*** ga nisbatan yechamiz:

$$\boldsymbol{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad (\mathbf{5})$$

Bu yerda $\boldsymbol{x^2 - a^2 \geq 0}$ => $\boldsymbol{x^2 \geq a^2}$ => $\boldsymbol{|x| \geq a}$ => $\begin{cases} \boldsymbol{x \leq -a} \\ \boldsymbol{x \geq a} \end{cases}$

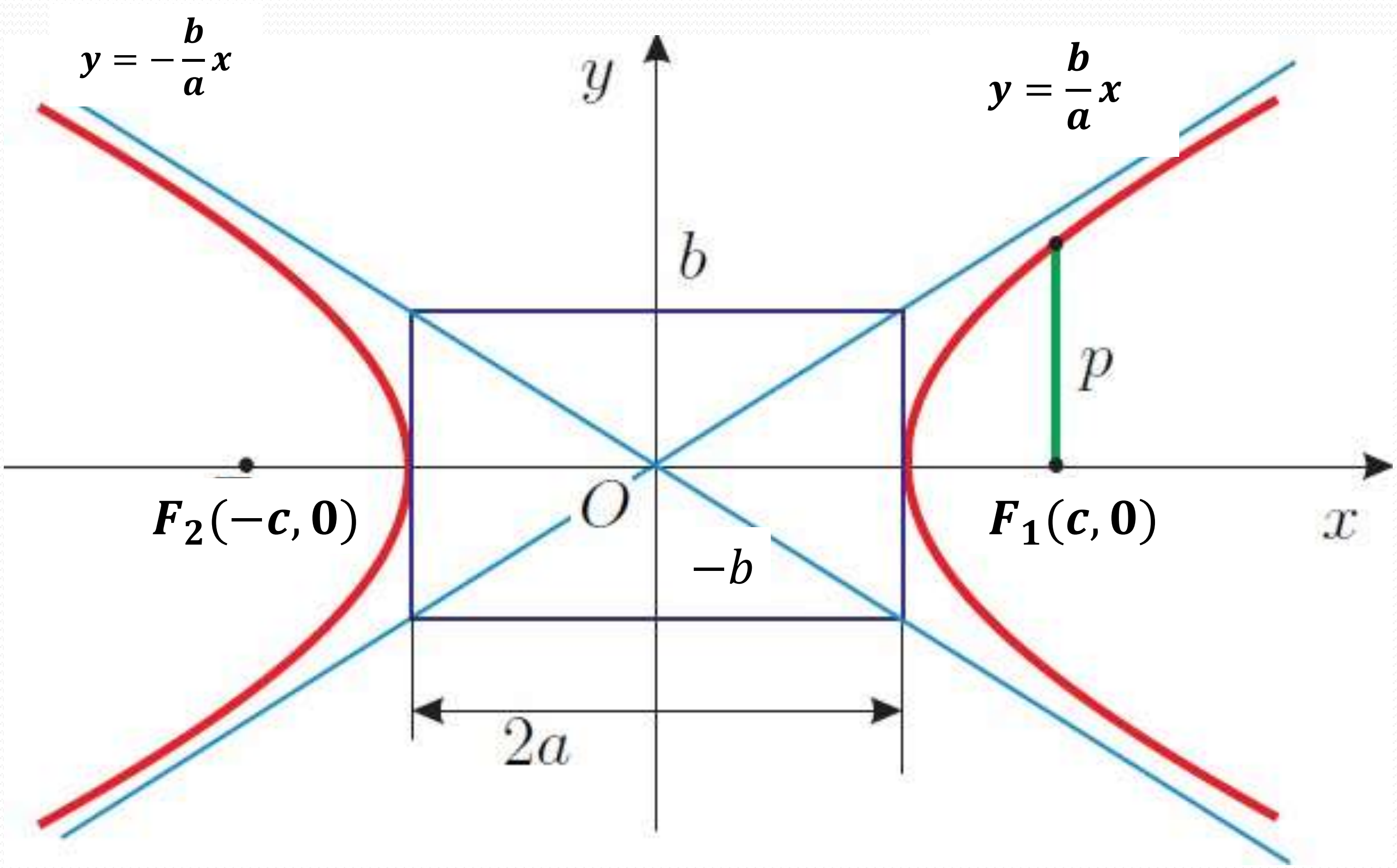
Demak, $x>a$ va $x<-a$ bulgandagi x ning har bir qiymatiga ***y*** ning ikkita qiymati (bir musbat, ikkinchisi manfiy) mos keladi ya'ni giperbolani grafigi abtsissa o'qiga nisbatan simmetrikdir.

$x=\pm a$ da $y=0$ bo'ladi. Giperbolaning uchlari $A_1(a, 0)$ va $A_2(-a, 0)$ nuqtalarda bo'ladi.

$x \in [a, \infty)$ va $x \in [-a, -\infty)$ da y ning absolyut qiymati $[0, \infty)$gacha o'zgaradi. Bu esa giperbolani ikki tomonga karab cheksiz kengayib ketgan ikki juft muntazam tarmoqlardan iborat ekanligini ko'rsatadi .

Agar x=0 bo'lsa, $\boldsymbol{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-a^2} = \pm bi}$

Bu nuqtalar giperbolaga tegishli bo’lmagani uchun 2b-ni giperbolani mavhum o’qi deyiladi. $A_1A_2 = 2a$ ni uning xaqiqiy o’qi deyiladi.



Agar (4) tenglamada a=b deb faraz qilinsa,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \;=>\; x^2-y^2=a^2$$

teng tomonli giperbola tenglamasi xosil buladi .

$y=\pm\frac{b}{a}$ tug'ri chiziqlarni giperbolani asimptotalari deyiladi .

$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ -ni giperbolani ekstsentrisiteti deyiladi. $c > a$ bo'lgani uchun $\mathcal{E}>1$ bo'ladi .

M(x,y) nuqta giperbolaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin.

F_1M va F_2M kesmalarni M nuqtaning fokal radiuslari deyiladi va ularni r_1 ва r_2 bilan belgilaymiz.

$$\tau_1=|MF_1|=-a+\frac{c}{a}x$$

$$\tau_2=|MF_2|=a+\frac{c}{a}x$$

3-Misol. $16x^2 - 25y^2 = 400$ giperbolani o'qlari, fokuslari, ekstsentrisiteti va assimptotalari topilsin.

Yechish: $16x^2 - 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow a = 5, b = 4 \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41},$

Demak,

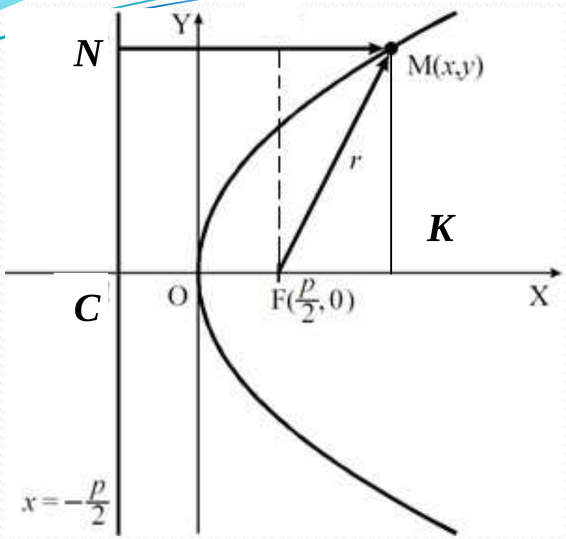
$F_1(\sqrt{41}, 0), F_2(-\sqrt{41}, 0); \ \ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5} > 1, y = \pm\frac{b}{a}x \ \Rightarrow y = \pm\frac{4}{5}x$.

5. Parabola va uning tenglamasi

5-Ta'rif. Parabola deb ixtiyoriy nuqtasidan fokus deb ataluvchi nuqtasigacha va direktrisa deb ataluvchi tug'ri chiziqqacha bo'lgan masofalar teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Parabola tenglamasini topish uchun koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz :

Fokus deb ataluvchi F nuqtadan o'tib AB direktrisaga perpendikulyar bo'lgan tug'ri chiziqni abtsissalar o'qi va AB tug'ri chiziq va F fokus o'rtasidan o'tib, OX o'qqa ⊥ bo'lgan tug'ri chiziqni OY o'qi deb olamiz . M(x,y) paraboladagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin .



Chizmadan AB-direktrisa to'g'ri chizig'i $|FC| = P,\ |CO| = |OF| = {}^{P}/_{2}$

OK=x, CN=MK=y, $F(\frac{p}{2};0),\ C\left(-\frac{p}{2};0\right), N\left(\frac{p}{2};0\right).$ **,**

Ta'rifga ko'ra , $|MN| = |MF|$ **(1)**

$$|MN| = |CK| = |C0| + |0K| = {}^{P}/_{2} + X \qquad (2)$$

$$|MF| = \sqrt{\left(x - {}^{P}/_{2}\right)^2 + (y-0)^2} \qquad (3)$$

(2) va (3) larga ko’ra (1)ni quyidagicha yozamiz:

$$\boldsymbol{x + \frac{P}{2} = \sqrt{\left(x - {}^{P}/_{2}\right)^{2} + y^{2}}} \qquad (\mathbf{4})$$

(4) ni xar ikki tarafini kvadratga oshiramiz :

$$\boldsymbol{x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2px} \qquad (\mathbf{5})$$

yoki

$$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{2px}} \qquad (\mathbf{6})$$

(5) yoki (6) tenglamani parabola tenglamasi deyiladi .

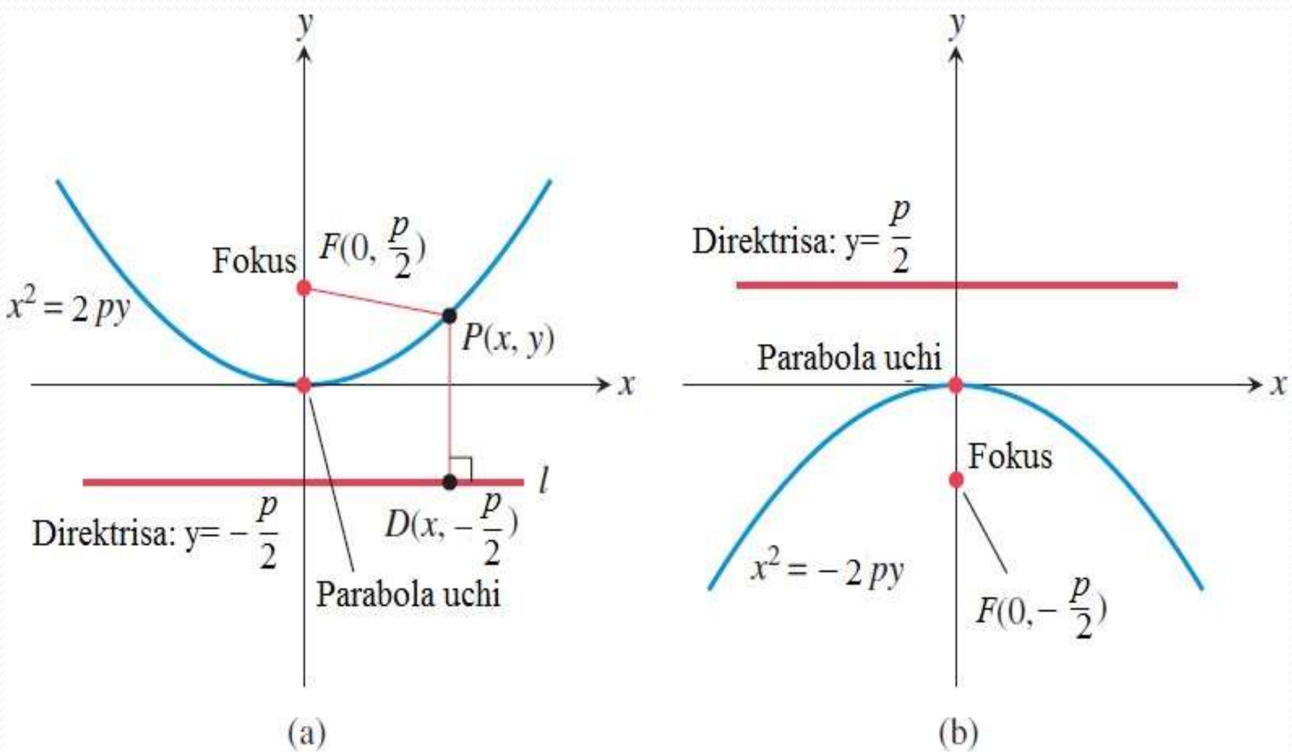
Bu yerda r-ni parabola parametri , AB- ni direktrisa chizig’i deyiladi.

Direktrisa chizig’ini tenglamasi $\boldsymbol{x = -{}^{P}/_{2}}$ buladi .

(5) tenglamadan x ning har bir qiymatiga uning 2 ta qarama qarshi ishorali qiymatlari mos keladi . Bu esa parabolaning OX o'qiga nisbatan simmetrikligini bildiradi.

Agar (5) da X va Y larni o'rni almashtirilsa u holda

$$\boldsymbol{x^2 = 2py} \qquad \text{(7) tenglama xosil buladi .}$$



Adabiyotlar:

1. Б.А.Худаяров Математика. I-қисм. Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия. Тошкент, “Фан ва технология”, 2018. -284 с.
2. Б.А.Худаяров “Математикадан мисол ва масалалар тўплами” Тошкент “Ўзбекистон” 2018 йил. 304 б.
3. Э.Ф.Файзибоев, З.И.Сулейменов, Б.А.Худаяров “Математикадан мисол ва масалалар тўплами”, Тошкент, “Ўқитувчи” 2005 й. 254 б.
4.Ф.Ражабов ва бошқ. “Олий математика”, Тошкент “Ўзбекистон” 2007 йил. 400 б.
5. Т.Жўраев ва бошқ. “Олий математика асослари” Тошкент “Ўзбекистон” 1995 йил 300 б.