РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА

Усмонов Бахтиёр Зохирович
Чирчикский Государственный педагогический университет
г. Чирчик Узбекистан, *bakhtiyer.usmanov@mail.ru*
Ассоева Насиба Миллавоевна
2. Чирчикский Государственный педагогический университет
Магистрант 2 курса. г. Чирчик, Узбекистан
https://doi.org/10.5281/zenodo.7748179

Аннотация: В статье ракрыто возможностей решение геометрических задач методом координат. Метод координат в геометрии в том и состоит, что посредством координат точек геометрические объекты задают аналитически с помощью чисел, уравнений, неравенств или их систем и тем самым при доказательстве теорем или решении геометрических задач используют аналитические методы. Это существенно упрощает рассуждение и часто позволяет доказывать теоремы или решать задачи, пользуясь определенным алгоритмом (производя те или иные вычисления), в то время, как синтетический метод в геометрии в большинстве случаев требует искусственных приемов. Овладение универсальными учебными действиями – это требование стандартов образования нового поколения.

Ключевые слова: координатный метод,геометрический метод, пирамида, трапеция,паралеллепипед и т.г.д.

Abstract: The article reveals the possibility of solving geometric problems by the method of coordinates. The method of coordinates in geometry lies in the fact that the coordinates of points are given by geometric objects for detection using numbers, properties, inequalities or their systems, and thus, when detected, they approach or explore geometric problems that are used to search for methods. This greatly simplifies reasoning and often allows one to prove theorems or solve problems according to a certain algorithm (performing certain calculations), while the synthetic method in geometry in most cases requires artificial methods. Mastering the universal educational activity is a requirement of the standards of education of the new generation.

Key words: coordinate method, geometric method, pyramid, trapezium, parallelepiped, etc.

Применение систем координат: В геометрии – для нахождения и исследования уравнений кривых и поверхностей, длин и направлений отрезков, вычисления площадей и углов; в биологии – для построения схем молекул ДНК, диаграмм и графиков, прослеживающих эволюцию развития, изучения экологических проблем и проблем биосферы; в физике – для определения взаимного расположения тел и влияющих на них сил; в географии – для описания местоположений объектов; в военном деле – для составления карт местности, разработки стратегии и тактики; в экономике - для построения графика спроса и предложения, при графическом представлении разнообразных зависимых величин; в медицине – для снятия кардиограммы, проведения флюорографии, разнообразных снимков органов, для лазерных операций; в астрономии – для составления карт звездного неба, запуска спутников и космических кораблей.

Составителем первой географической карты считается Анаксимандр Милетский (около 610 — после 547 до н. э.). Именно он впервые описал широту и долготу места, используя при этом прямоугольные проекции.

Во II веке до н. э., греческий учѐный Гиппарх предложил на всю поверхность Земли наложить параллели и меридианы и обозначить их числами.

Создателем координатного метода является Рене Декарт (1596 - 1650). Им была предложена система нумерации кресел в театре по рядам и местам. Главное достижение Декарта - построение аналитической геометрии, в которой геометрические задачи переводились на язык алгебры при помощи метода координат, который впервые был описан в труде "Рассуждение о методе" в 1637 году. Преимущества координатного метода: Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае. С помощью координатного метода некоторые задачи из школьных учебников и из ЕГЭ решаются гораздо проще, поскольку чисто геометрический метод требует интуиции, пространственного воображения, дополнительных построений. При координатном же методе обычно требуется только знание некоторых формул. Рассмотрим применение координатного метода для решения нескольких геометрических задач на плоскости и в пространстве.

Задача 1: Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. **Координатный метод:**

Введем систему координат, как показано на рисунке. Пусть нижнее основание имеет длину $2a$, верхнее – длину $2b$, а высота трапеции равна c. Тогда вершины трапеции есть $A(-a;\ 0)$, $B(-b;\ c)$, $C(b;\ c)$, $D(a;\ 0)$. Отсюда по формуле расстояния между двумя точками получаем:

$|AC| = (a + b)^2 + c^2$

$|BD| = (a + b)^2 + c^2 \Longrightarrow |AC| = |BD|$.

Геометрический метод: Известно, что в равнобедренной трапеции углы при основании равны. Тогда $\Delta ABD = \Delta ACD$ по первому признаку ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$, AD – общая). Следовательно, $AC = BD$. В данной задаче методы практически равноценны. Однако в некоторых планиметрических, а особенно в стереометрических задачах координатный метод нередко является более простым.

Задача 2: Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA1B1C1D1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$, $AA_1 = 2$. Найти угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1 .

Координатный метод: Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда $A(6; 0; 0)$, $A_1(6; 0; 2)$, $B_1(6; 3; 2)$, $C_1(0; 3; 2)$. Точка M – середина AA_1 , значит, ее координаты равны полусумме координат точек A и A_1 , т.е. $M(6; 0; 1)$. Аналогично, N – середина B_1C_1 , значит, $N(3; 3; 2)$. Тогда AB = $\{-6; 3; 2\}$, $M\ N = \{-3; 3; 1\}$. Пусть α – угол между этими векторами. Следовательно, cos α $= \frac{AC1MN}{|AC1||MN|} \Rightarrow | = \frac{18+9+2}{\sqrt{36+9+4}\sqrt{9+9+1}} = \frac{29}{7\sqrt{19}} \Rightarrow$

α = arccos $\frac{29}{7\sqrt{19}}$;

Геометрический метод: Проведем прямую NP, параллельную BB_1 . K - середина NP.

$AM||NK$, $AM = NK$, следовательно, $AMNK$ – параллелограмм, откуда $MN||AK$. Значит, искомый угол равен $\angle KAC_1$.

$AC_1{}^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1{}^2 = 4 + 36 + 9 = 49$ $AC_1 = 7$;

$C_1\text{K} = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + \text{BB}_1{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+4} = \sqrt{10}$

$AP = \sqrt{\text{AB}^2 + BP^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$;

$AK = \sqrt{\text{A}\,P^2 + \text{KP}^2} = \sqrt{18+1} = \sqrt{19}$

Тогда по теореме косинусов из ΔAKC_1 :

$$\cos\angle KAC_1 = \frac{AK^2 + AC1^2 - KC1^2}{2\,AC1\cdot \text{AK}} = \frac{19+49-10}{2\cdot 7\cdot\sqrt{19}} = \frac{58}{14\sqrt{19}} = \frac{29}{7\sqrt{19}}$$

$\Rightarrow \alpha$ = arccos $\frac{29}{7\sqrt{19}}$.

В данной задаче координатный метод является более коротким, не требующим дополнительных построений, знания геометрических теорем и пространственного воображения. Такой метод подходит даже не очень сильным ученикам, которых, как правило, пугают стереометрические задачи.

Задача 3: Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и b, $b > a$. Найдите расстояние между серединами ее диагоналей.

Введем систему координат так, как показано на рисунке. Пусть $AB = b$, $CD = a$. Обозначим высоту трапеции AD через h. Тогда ее вершины будут иметь координаты $A(0;\,0)$, $B(b;\,0)$, $C(a;\,h)$, $D(0;\,h)$. Точка M – середина AC, значит, ее координаты равны полусумме координат точек A и C, т.е.

$M(\frac{a}{2};\,\frac{h}{2})$. Аналогично, N – середина BD, значит, $N(\frac{b}{2};\frac{h}{2})$. Тогда

$$|MN| = \sqrt{(\frac{b}{2} - \frac{a}{2})^2 + (\frac{h}{2} - \frac{h}{2})^2} = \sqrt{(\frac{b}{2} - \frac{a}{2})^2} = \frac{b-a}{2}$$

Задача 4: Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB. Введем систему координат, как на рисунке. Тогда $A(4\sqrt{2};\,0;\,0)$, $C(0;\,0;\,0)$,

$S(0;\,0;\,2)$. Проведем в ΔABC высоту BH. Поскольку треугольник – равносторонний, то BH также является медианой. Значит, $CH = 2\sqrt{2}$,

$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 32 - 8 = 2\ 4$ BH=$2\sqrt{6}$. Тогда $B(2\sqrt{2};\,2\sqrt{6}\,;\,0)$. Точка M - середина BC, значит, ее координаты равны полусумме координат точек B и C, т.е. $M(\sqrt{2};\,\sqrt{6};\,0)$. Аналогично, N - середина AB, значит, $N(3\sqrt{2};\,\sqrt{6};\,0)$. Тогда $S\ M = \{\sqrt{2};\,\sqrt{6};\,-2\}$, $C\ N = \{3\sqrt{2};\,\sqrt{6};\,0\}$. Пусть α – угол между этими векторами. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{SM \cdot \mathrm{CN}}{|\mathrm{SM}| \cdot |\mathrm{CN}|} = \frac{6+6+0}{\sqrt{2+6+4}\,\sqrt{18+6}} = \frac{12}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ\ .$$

Список литературы:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10–11 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2010.

2. Погорелов А.В. Геометрия, уч. для 7 – 11 кл. общеобр. учрежд. – М.: Просвещение, 1995.

3. Я.П.Понарин "Элементарная геометрия" Москва МЦНМО,2004

4. Т.Н.Кори- Ниёзий "Аналитик геометрия асосий курси" Тошкент ,1967

5. I.Isroilov,Z.Pashayev "Geometriya" O'qituvchi Toshkent 2005

6.S.V.Baxvalov,P.S.Modenov ,A.S.Parxomenko "Analitik geometriyadan masalalar to'plami" Toshkent 2005