TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

ФАН | ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Мавзу:

Аниқ интеграл ва уни ҳисоблаш.

Аниқ интегралнинг асосий хоссалари. Ньютон-Лейбниц формуласи

Аниқ интеграл-математик анализнинг энг муҳим тушинчаларидан биридир. Юзаларни, ёйларнинг узунликларини, ҳажмларни, ишни инерция моментларини ва ҳакозоларни ҳисоблаш масаласи у билан боғлиқ.

$[a,b]$ кесмада $y = f(x)$ узлуксиз функция берилган бўлсин. Қуйидаги амалларни бажарамиз:

1) $[a,b]$ кесмани ўуйидаги нуқталар билан n та қисмга бўламиз, уларни қисмий интерваллар деб атаймиз:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < . . . < x_{i-1} < x_i < \ . . . < x_n < b$$

2) Қисмий интервалларнинг узунликларини бундай белгилаймиз:

$$\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

3) Ҳар бир қисмий интервалнинг ичида биттадан ихтиёрий нуқта танлаб оламиз: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n$.

4) Танланган нуқталарда берилган функциянинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_i), \dots, f(\xi_n).$$

5) Функциянинг ҳисобланган қийматларининг тегишли қисмий интервалнинг узунлигига кўпайтмасини тузамиз:

$$f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2, \dots, f(\xi_i)\Delta x_i, \dots, f(\xi_n)\Delta x_n.$$

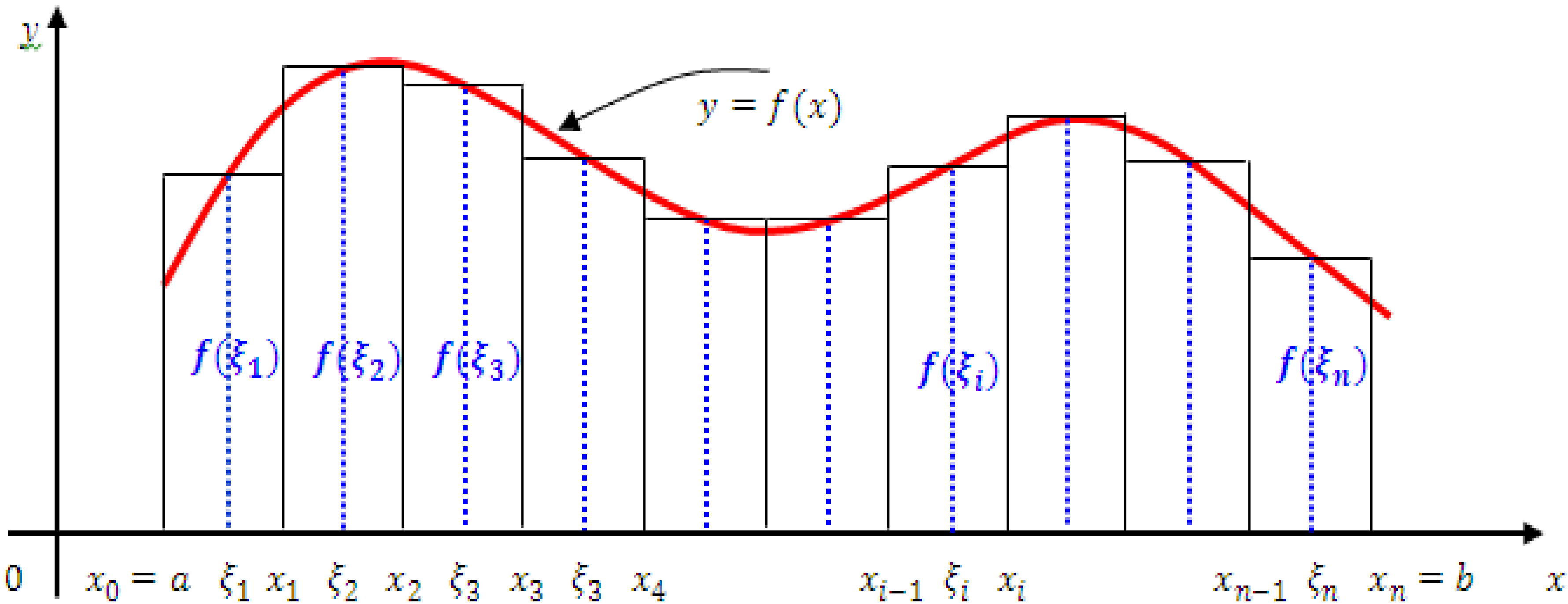
б) Тузилган кўпайтмаларни қўшамиз ва йиғиндини σ билан белгилаймиз:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

σ йиғинди $f(x)$ функция учун $[a,\ b]$ кесмада тузилган интеграл йиғинди деб аталади. σ интеграл йиғинди қисқача бундай ёзилади:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Интеграл йиғиндининг геометрик маъноси равшан: агар $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда σ-асослари $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$ ва баландликлари мос равишда $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_i), \ldots, f(\xi_n)$ бўлган тўғри тўртбурча юзларининг йиғиндисидан иборат (1-чизма)



1-чизма.

Энди бўлишлар сони n ни орттира борамиз ($n \to \infty$) ва бунда энг катта интервалнинг узунлиги нолга интилади, яъни $max\, \Delta x_i \to 0$ деб фараз қиламиз.

Ушбу таърифни беришимиз мумкин:

Таъриф. Агар σ интеграл йиғинди $[a,\ b]$ кесмани қисмий $[x_{i-1}, x_i]$ кесмаларга ажратиш усулига ва уларнинг ҳар биридан нуқтани танлаш усулига боғлиқ бўлмайдиган чекли сонга интилса, у ҳолда шу сон $[a,\ b]$ кесмада $f(x)$ функциядан олинган ***аниқ интеграл*** дейилади ва бундай белгиланади:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

(“$f(x)$ дан $\boldsymbol{x}$ бўйича $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ гача олинган аниқ интеграл” деб ўқилади). Бу ерда $f(x)$ -интеграл остидаги функция, $[a,\ b]$ кесма-интеграллаш оралиғи, $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ сонлар интеграллашнинг қуйи ва юқори чегараси дейилади.

Шундай қилиб, аниқ интегралнинг таърифидан ва белгиланишидан қуйидагича эканини ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Аниқ интегралнинг таърифидан кўринадики, аниқ интеграл ҳамма вақт мавжуд бўлавермас экан. Биз қуйида аниқ интегралнинг мавжудлик теоремасини исботсиз келтирамиз.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,\ b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у интегралланувчидир, яъни бундай функциянинг интеграли мавжуд.

1-изоҳ. Аниқ интегралнинг қиймати функциянинг кўринишига ва интеграллаш чегараларига боғлиқ, аммо интеграл остидаги ифода ҳарфга боғлиқэмас.

Масалан: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$.

2-изоҳ. Аниқ интегралнинг чегаралари алмаштирилса, интегралнинг ишораси ўзгаради:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3-изоҳ. Агар аниқ интегралнинг чегаралари тенг бўлса, ҳар қандай функция учун ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Аниқ интегралнинг асосий хоссалари

Аниқ интегралнинг асосий хоссаларини исботлашда аниқ интегралнинг таърифи ва лимитларнинг хоссаларидан фойдаланамиз.

1-хосса. Бир нечта функциянинг алгебраик йиғиндисининг аниқ интеграли қўшилувчилар интегралларининг йиғиндисига тенг.

Икки қўшилувчи бўлган ҳол билан чекланамиз:

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

2-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин: агар

$k = const$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx .$$

3-хосса. Агар $[a,\ b]$ кесмада функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда бу функция аниқ интегралнинг ишораси функция ишораси билан бир хил бўлади, яъни:

а) агар $[a,\ b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0;$$

б) агар $[a,\ b]$ кесмада $f(x) \leq 0$ бўлса, у ҳолда

4-хосса. Агар $[a,\ b]$ кесмада икки $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функция

$$f(x) \geq \varphi(x)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

5-хосса. Агар $[a,\ b]$ кесма бир неча қисимларга бўлинса, у ҳолда $[a,\ b]$ кесма бўйича аниқ интеграл ҳар бир қисм бўйича олинган аниқ интеграллар йиғиндисига тенг.

$[a,\ b]$ кесма икки қисмга бўлинган ҳол билангина чекланамиз, яъни агар $a < c < b$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

6-хосса. Агар m ва M сонлар $f(x)$ функциянинг $[a,\ b]$ кесмада энг кичик ва энг катта қиймати бўлса, у ҳолда

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a).$$

Аниқ интегрални ҳисоблаш.
Ньютон-Лейбниц формуласи

Ушбу $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интегралнинг қуйи чегараси ўзгармас a, юқори чегараси b ўзгарувчи бўлсин, у ҳолда интеграл юқори чегарасининг функцияси бўлади: $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

1-теорема. Агар *f(x)* узлуксиз функция ва $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ бўлса, у ҳолда $\Phi'(x)=f(x)$ тенглик ўринли бўлади.

2-теорема. Агар *F(x)* узлуксиз функция *f(x)* функциянинг бирор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ формула ўринли бўлади. Бу формула ***Ньтон-Лейбниц формуласи*** дейилади.

Мисол

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_2^3 = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш

Теорема. $\int\limits_a^b f(x)dx$

Интеграл берилган бўлсин, бунда $f(x)$ функция [a;b] кесмада узлуксиз функция. $x=\varphi(x)$ формула бўйича янги t ўзгарувчини киритамиз. Агар

1) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b;$

2) $\varphi(t)$ *ва* $\varphi'(t)$ *лар* $[\alpha;\beta]$ кесмада узлуксиз;

3) $f[\varphi(t)]$ *функция* $[\alpha;\beta]$ кесмада аниқланган, ҳамда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

бўлади.

Мисол

$$\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = t \\ x = 3t \\ dx = 3dt \\ t_1 = 0, t_2 = 1 \end{array} \right| = 3\int_0^1 e^t dt = 3e^t \Big|_0^1 = 3(e-1)$$

Аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш

u ва v функциялар x нинг функциялари бўлиб, дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$$

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Мисол

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x+1) & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x+1} & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{x+1} = \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$\ln 2 - \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2 - 0) = 2\ln 2 - 1$$

АДАБИЁТЛАР:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й. 315 б.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й. 336 б.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й. 148 б.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й., 400 б.
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

Эътиборингиз учун рахмат!

☎ + 998 71 237 0986