МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ВЕТРОВЫМИ ВОЛНАМИ

Гаппаров Ф.А., к.т.н., доцент
Кодиров С.М., ассистент
(Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан)

В данной статье рассматривается действий волновых движений происходящие водохранилища по произвольному направлению действия ветра, угол веяние ветровых волн, получение присоединённой массы и кинетическую энергию ветровых волн. В ней приводится анализ зависимостей поверхностного движения ветровых волн в водохранилищах, отражены результаты натурных исследований, уточнены факторы, влияющие на формирования береговых линии водохранилищ.

The article deals with the actions of wave motions occurring above reservoirs in an arbitrary direction of the action of the wind, the angle of wind waves, the production of an added mass and the kinetic energy of wind waves. It provides an analysis of the dependencies of the surface movement of wind waves in water reservoirs gives the results of field studies, clarifies the factors affecting the formation of the shore lines of reservoirs.

В результате исследования ветра-волнового режима Каттакурганокого, Кайраккумского, Ташкентского, Чардаринского, Южно-Сурханского водохранилищ, а также больших нагульных рыбоводных прудов Сырдарьинского рыбхоза Узбекистана, нагульно-выростных рыбных хозяйств при Капчагайском водохранилище, Сырдарьинского рыбхоза в Казахстане были составлены зависимости, которые позволяют определить высоту ветровых волн на водохранилищах. Кроме того, получена формула для вычисления суммарной энергии волн с учетом кривых распределения высот волн и скоростей ветра.

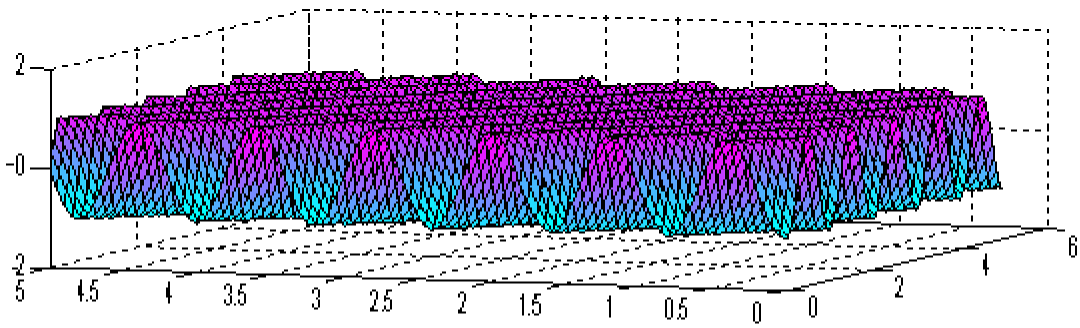

Рис.1. Движение акивного слоя жидкости в форме цилиндра со скоростью ветра по плоской зеркалы водохранилища.

Данной статье мы рассмотрим действий волновых движений происходящие водохранилища по произвольному направлению действия ветра.

При действия ветра активный слой жидкости приобретает цилиндрический вид и этот вид волны движется со скоростью ветра по плоской зеркале водохранилища. На зеркале водохранилища (рис.1): волна движется по плоской поверхности и когда престанет действия ветра, частицы жидкости по инерции продолжают движения.

Для моделирования этих процессов рассмотрим фиксированные оси Ox и Oy в тот момент времени, когда центр волны цилиндрической формы совпадает с точкой O

(рис.1).Частица, находящаяся в точке $P(x,y)$, движется со скоростью $\frac{Va^2}{r^2}$ V - скорость ветра, a - скорость волны, направленной под углом θ к радиус-вектору - r. Следовательно, касательная к траектории движение в точке P составляет с осью Ox угол $\alpha = 2\theta$. Отсюда, если R - радиус кривизны траектории в точке P, то имеем равенству [2]:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d(2\theta)}{dy}\frac{dy}{ds} = 2\frac{d\theta}{dy}\sin 2\theta \qquad (1)$$

Когда жидкость обтекает центр неподвижной волны цилиндрической формы, то частица P движется вдоль линии тока, уравнение которой имеет вид:

$$\eta = y\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = y\left(1 - \frac{a^2\sin^2\theta}{y^2}\right) \qquad (2)$$

Это соотношение между y и θ имеет место для наблюдателя, движущегося вместе с волной. Когда волна неподвижна, данное соотношение является уравнением линии тока.
Продифференцируем последнее равенство по y; после несложных преобразований получим

$$2\frac{d\theta}{dy}\sin 2\theta = \frac{4}{a^2}\left(y - \frac{1}{2}\eta\right)$$

Следовательно, для кривизны волн получим равенства:

$$\frac{1}{R} = \frac{4}{a^2}\left(y - \frac{1}{2}\eta\right)$$

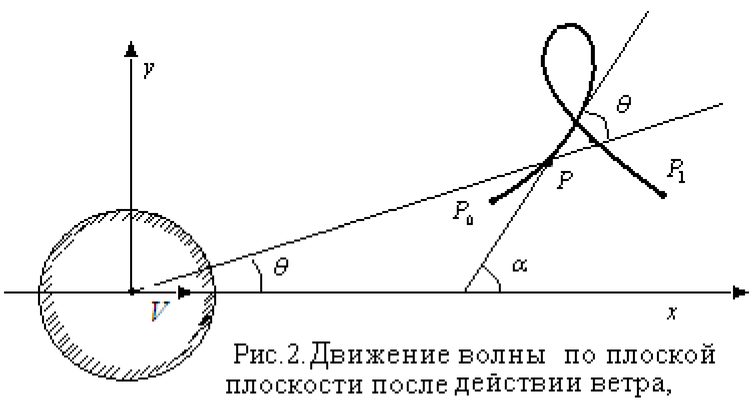

Рис.2.Движение волны по плоской плоскости после действии ветра, частицы жидкости по инерции продолжают движения.

Мы получили уравнение кривой, форму которой принимает абсолютно гибкий прут, подверженный продольному сжатию. Когда волна цилиндрической формы движется из $-\infty$ в $+\infty+$, точка P движется из точки P_0 в точку P_1, которые являются точками кривой и в которых касательная параллельна оси Ox.

Теперь вычислим дрейф точки P, т. е. длину отрезка $\xi = P_0P_1$ (рис.2.).

Далее мы будем рассматривать движение жидкости по отношению к волну цилиндрической формы, который условно будем считать неподвижным, т. е. жидкость будет двигаться справа налево со скоростью V. Используя выражение для радиальной и трансверсальной компонент скорости [2]:

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \frac{Va^2\cos\theta}{r^2} \\ V_\theta &= \frac{Va\sin\theta}{r^2} \end{aligned}\right\}$$

получаем следующие уравнения для относительного движения:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{dr}{dt} &= \cos\theta\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\\
\frac{1}{V}\frac{rd\theta}{dt} &= \sin\theta\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)
\end{aligned}\right\}
$$

Один из интегралов этих уравнений есть функция тока (2), где постоянная η задает начальное и конечное расстояние частицы от линии движения центра волнового цилиндра. Тогда из формул (1) и (2) находим величину дрейфа в виде

$$
\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dx}{dt}+V\right)dt = \int_{0}^{\pi}\frac{a^2\cos 2\theta d\theta}{\left(\eta^2+4a^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3)
$$

Это движение волны может быть описано эллиптическими функциями, если положить:

$$
m = k^2 = \frac{4a^2}{\eta^2+4a^2} \qquad (4)
$$

И $\cos\theta = -sh\vartheta$, откуда следует, что ϑ - скорость жидкой частицы изменяется от $-K$ до K, где K - полный эллиптический интеграл первого рода [3]. Тогда все движение выразится через параметр ϑ-скорость жидкой частицы, с помощью формул:

$$
\begin{aligned}
y(\vartheta) &= \frac{a}{k}\left(k'+dn\vartheta\right)\\
\xi(\vartheta) &= \frac{a}{k}\left\{\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)\vartheta - E(\vartheta)\right\} \qquad (5)\\
Vt(\vartheta) &= \frac{a}{k}sc\vartheta\left(k'+dn\vartheta\right)+\xi(\vartheta)
\end{aligned}
$$

где $\xi(\vartheta)$, $y(\vartheta)$- декартовы координаты частицы в момент времени $t(\vartheta)$ относительно первоначального невозмущенного положения частиц.

Эти уравнения дают нам возможность построить траектории и вычислить величину дрейфа:

$$
\xi = \frac{2a}{k}\left\{\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)\vartheta - E\right\} \qquad (6)
$$

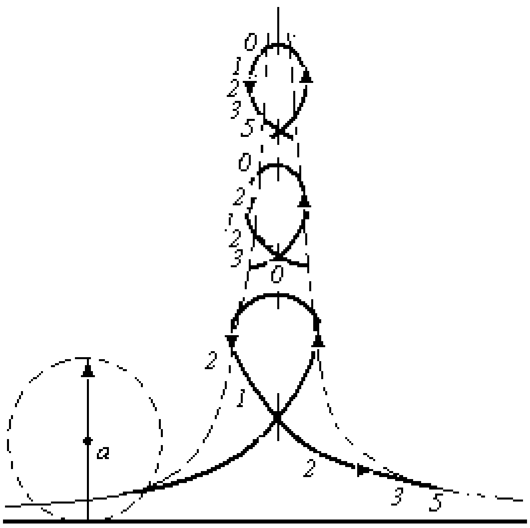

Рис.3. Траектория для вычисления величину дрейфа.

Точка на кривой, отмеченная 2, даёт положение жидкой частицы, когда цилиндр продвинулся в перед на 2 радиуса от начального положения. Для рассматриваемых частиц жидкости штриховая кривая в левой части рисунка показывает начальные положения частиц, когда волна цилиндра находился в $-\infty$, а штриховая кривая в правой части - конечные положения частиц, когда волна цилиндра ушел в $+\infty$,рис.2.

Таким образом, на самом деле существует дрейф жидкости слева направо. Масса жидкости между начальным и конечным положением частиц, берется слой жидкости единичной толщины, которая называется дрейф-массой ρD и вычисляется по формуле:

$$
\rho D = \rho\int_{-\infty}^{+\infty}\xi d\eta
$$

Непосредственным интегрированием можно показать, что

$$\rho D = \pi a^2 \rho = M' \qquad (7)$$

т. е. массе жидкости, вытесненной волновым цилиндром.

Кинетическая энергия. Если круговой волновой цилиндр радиуса, *a* движется в жидкости поступательно со скоростью V , то кинетическая энергия жидкости определяется по формуле:

$$T_f = -\frac{1}{4} i\rho \int w d\overline{w}$$

Кроме того,

$$w = \frac{Va^2}{z}, \quad \overline{w} = \frac{Va^2}{\overline{z}} \qquad d\overline{w} = -\frac{Va^2}{\overline{z}^2} d\overline{z}$$

Далее, на поверхности цилиндра движение волн может, происходит по форме [2]:

$$z = ae^{i\theta} , \quad \overline{z} = ae^{-i\theta} , \qquad d\overline{z} = -iae^{-i\theta} d\theta$$

Тогда

$$T_f = -\frac{1}{4} i\rho \int_0^{2\pi} \frac{V^2 a^4}{a^3 e^{-i\theta}} ie^{-i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \pi\rho a^2 V^2 \qquad (8)$$

Допустим $M' = \pi\rho a^2$, M' - масса жидкости приходящая на единицу толщины, вытесненная волновым цилиндром. Тогда если M - масса волнового цилиндра, приходящая на единицу толщины, то общая кинетическая энергия жидкости и волнового цилиндра равна:

$$T = \frac{1}{2}(M + M')V^2 \qquad (9)$$

Обозначим через F - внешнюю силу ветра, действующую в направление волнового цилиндра (для любого направления получится изменением направление, т.е. $F\sin\alpha$ необходимую для поддержания его движения. Тогда мощность силы F должна быть равна скорости увеличения общей кинетической энергии и, следовательно:

$$FV = \frac{dT}{dt} = (M + M')V \frac{dV}{dt}$$

$$F - M' \frac{dV}{dt} = M \frac{dV}{dt}$$

Если бы жидкость отсутствовала, второй член в левой части уравнения обратился бы в нуль. Вследствие присутствия жидкости волновой цилиндр при движении испытывает сопротивление, величина, приходящаяся на единицу толщины жидкости равна:

$$M' \frac{dV}{dt}$$

Из последнего уравнения следует, что присутствие жидкости увеличивает массу движущегося цилиндра от M до $M + M'$ где M' - масса вытесненной жидкости. Масса $M + M'$ называем виртуальной массой волнового цилиндра. Виртуальная масса получается увеличением массы волнового цилиндра M на присоединенную массу, или гидродинамическую массу, которая в случае кругового волнового цилиндра равна M'. Заметим, что эта гидродинамическая масса M' равна дрейф - массе ρD .

Все движущиеся тела, если движение происходит в некоторой сплошной среде, как бы приобретают добавочную массу, так что во всех динамических экспериментах массы проявляются как виртуальные массы типа $M + kM'$, где коэффициент k зависит от формы тела и типа движения. Дарвин в [1] доказал, что для тела, движущегося прямолинейно в неограниченной жидкости гидродинамическая масса равна дрейф-массе, т. е.

$$kM' = \rho D$$

а в случае кругового цилиндра $k = 1$.

Вывод: Дальнейшие исследования показали, что присоединённая масса действительно представляет собой массу жидкости, заключенную в цилиндр.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. 1.DarwinC., Proc. Cambr.Phil. Soc.,49 (1953), 342-354.
2. Милн – Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика «МИР». Моссва 1964.
3. Янке Е., ЭмдеФ.,Лёш Ф. «Специальные функции» Москва 1968.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ФИО	Ученая степень, звание	Должность	Контактная информация
Гаппаров Фуркат Ахматович 	Кандидат технических наук, доцент	Заведующий лабораторией «Водохранилища и их безопасность» научно-исследовательский институт ирригации и водных проблем	+998971552563, ga.furkat@gmail.com
Кодиров Собир Мамадиёрович 	Магистр	Старший преподаватель кафедры Гидрологии	+998974452572, sobir.qodirov@yandex.com