

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 5(52) 2023

Журнал основан в 2015 году.

Издается 6 раз в год.

Учредитель:

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и
искусственного интеллекта.

Главный редактор:

Равшанов Н.

Заместители главного редактора:

Азамов А.А., Арипов М.М., Шадиметов Х.М.

Ответственный секретарь:

Ахмедов Д.Д.

Редакционный совет:

Азамова Н.А., Алоев Р.Д., Бурнашев В.Ф., Загребина С.А. (Россия),
Задорин А.И. (Россия), Игнатъев Н.А., Ильин В.П. (Россия),
Исмагилов И.И. (Россия), Кабанихин С.И. (Россия), Карачик В.В. (Россия),
Курбонов Н.М., Маматов Н.С., Мирзаев Н.М., Мухамедиева Д.Т., Назирова Э.Ш.,
Нормуродов Ч.Б., Нуралиев Ф.М., Опанасенко В.Н. (Украина), Раджабов С.С.,
Расулов А.С., Садуллаева Ш.А., Самаль Д.И. (Беларусь),
Старовойтов В.В. (Беларусь), Хаётов А.Р., Хамдамов Р.Х., Хужаев И.К.,
Хужаеров Б.Х., Чье Ен Ун (Россия), Шабозов М.Ш. (Таджикистан),
Шадиметов Х.М., Dimov I. (Болгария), Li Y. (США), Mascagni M. (США),
Min A. (Германия), Rasulev V. (США), Schaumburg H. (Германия), Singh D. (Южная
Корея), Singh M. (Южная Корея).

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при
Администрации Президента Республики Узбекистан.

Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

За точность фактов и достоверность информации ответственность несут авторы.

Адрес редакции:

100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Тел.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: journals@airi.uz.

Сайт: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:

Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.

Подписано в печать 31.10.2023 г.

Формат 60x84 1/8. Заказ №5. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 5(52) 2023

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

Editor-in-Chief:

Ravshanov N.

Deputy Editors:

Azamov A.A., Aripov M.M., Shadimetov Kh.M.

Executive Secretary:

Akhmedov D.D.

Editorial Council:

Azamova N.A., Alov R.D., Burnashev V.F., Zagrebina S.A. (Russia),
Zadorin A.I. (Russia), Ignatiev N.A., Ilyin V.P. (Russia), Ismagilov I.I. (Russia),
Kabanikhin S.I. (Russia), Karachik V.V. (Russia), Kurbonov N.M., Mamatov N.S.,
Mirzaev N.M., Mukhamedieva D.T., Nazirova E.Sh., Normurodov Ch.B., Nuraliev F.M.,
Opanasenko V.N. (Ukraine), Radjabov S.S., Rasulo A.S., Sadullaeva Sh.A.,
Samal D.I. (Belarus), Starovoitov V.V. (Belarus), Khayotov A.R., Khamdamov R.Kh.,
Khujaev I.K., Khujayorov B.Kh., Chye En Un (Russia), Shabozov M.Sh. (Tajikistan),
Shadimetov Kh.M., Dimov I. (Bulgaria), Li Y. (USA), Mascagni M. (USA),
Min A. (Germany), Rasulev B. (USA), Schaumburg H. (Germany), Singh D. (South
Korea), Singh M. (South Korea).

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the
Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.

The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

At a reprint of materials the reference to the journal is obligatory.

Authors are responsible for the accuracy of the facts and reliability of the information.

Address:

100125, Tashkent, Buz-2, 17A.

Tel.: +(99871) 231-92-45.

E-mail: journals@airi.uz.

Web: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Design and desktop publishing:

Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.

Signed for print 31.10.2023

Format 60x84 1/8. Order No. 5. Print run 100 copies.



**К 100-летию академика
Академии наук Республики Узбекистан
БОРИСА АНИСИМОВИЧА БОНДАРЕНКО**

19 октября 2023 года исполнилось 100 лет со дня рождения одного из крупнейших отечественных ученых, заслуженного деятеля науки Узбекистана, академика Академии наук Республики Узбекистан, доктора физико-математических наук, профессора Бориса Анисимовича Бондаренко.

Имя Бориса Анисимовича Бондаренко широко известно не только в Узбекистане, но и за рубежом. Как ученый Б.А. Бондаренко внес значительный вклад в математический анализ и теорию функций, дифференциальные уравнения и математическую теорию упругости, дискретную математику и комбинаторный анализ.

Борис Анисимович родился в 1923 году в г. Давлеканово Башкирской АССР, а в 1928 году семья Бондаренко переехала в Ташкент. После окончания в 1942 году средней школы № 7 города Ташкента, Б.А. Бондаренко был призван в армию и зачислен в Ташкентское военное пехотное училище. Участвовал в боях на различных фронтах Второй Мировой войны. После демобилизации в 1948 году Б.А. Бондаренко поступил на физико-математический факультет Среднеазиатского государственного университета, который успешно окончил в 1953 году по специальности «Математика».

Свою трудовую деятельность Б.А. Бондаренко начал в 1953 г. в Институте математики и механики (ныне Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз). Работая в должностях младшего научного сотрудника, ученого секретаря института, старшего научного сотрудника, он на основе плодотворных научных исследований в области специальных функций математической физики и их приложений к решению

классических задач математической теории упругости в 1962 г. защитил кандидатскую, а в 1970 г. докторскую диссертации.

В 1972 г. Б.А. Бондаренко перешел на педагогическую работу в Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, где до 1980 г. заведовал кафедрой «Теоретическая механика», продолжая наряду с успешной преподавательской, плодотворную научную работу по актуальным проблемам математики и механики, а также читал не только Учебные, но и специальные циклы лекций по теоретической механике и ее приложениям. В 1974 г. Б.А.Бондаренко был утвержден в ученом звании профессора.

В 1980 г. Б.А. Бондаренко был приглашен на работу в Узбекское научно-производственное объединение «Кибернетика» Академии наук Узбекистана. В Институте кибернетики он занимал должности заведующего лабораторией «Численные методы», заместителя директора института по науке, а также заместителя генерального директора УзНПО «Кибернетика». В том же НИИ с 1993 по 2012 годы Б.А. Бондаренко являлся ведущим научным сотрудником лаборатории «Алгоритмизация».

Научная деятельность Б.А. Бондаренко многообразна и охватывает несколько направлений современной математики, механики и кибернетики. Значителен его вклад в математический анализ и теорию функций, дифференциальные уравнения и математическую теорию упругости, дискретную математику и комбинаторный анализ. Результаты научных исследований, полученные за многие годы, опубликованы им в отечественной и зарубежной печати. Свыше 200 научных работ, в том числе 12 монографий и учебно-методических пособий, содержат принципиально новые результаты в перечисленных выше направлениях математики, механики и кибернетики.

Первая из монографий Б.А. Бондаренко «Полигармонические полиномы» (1968) составила основу его докторской диссертации и посвящена теории нового класса специальных полиномов и специальных функций и их приложениям к решению классических задач математической теории упругости. В монографии «Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости» (1978) изучены основы теории нового класса специальных функций, названных квазиполиномиальными, и разработаны эффективные методы их применения к решению сложных и практически важных задач статики и динамики теории упругости.

Большой цикл научных исследований Б.А.Бондаренко связан с изучением полигармонических, полуволновых и других полилинейных дифференциальных уравнений. Обосновав важность рассмотрения полилинейных уравнений, Б.А.Бондаренко поставил и исследовал аналоги задач Коши, Ринье, Гурса, Николеску и новых задач для таких уравнений. Им были разработаны операторные методы и дискретные алгоритмы построения точных и приближенных решений указанных уравнений содержатся в книгах Б.А.Бондаренко «Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях» (1984) и «Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных» (1987).

Многие из результатов Б.А.Бондаренко получены на основе методов дискретной математики, в том числе методов комбинаторного анализа и теории чисел. Путем введения нормализованных -латинских квадратов он изучил теоретико-числовые и комбинаторные свойства так называемых арифметических фрактальных структур, составленных из вычетов классических и новых комбинаторных чисел по простым, степеням простых и составным модулям. Этим вопросам посвящен ряд основополагающих работ Б.А.Бондаренко, в том числе монография «Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля» (1990) и книга «Generalized Pascal Triangles and Pyramids, their

Fractals, Graphs, and Applications» (USA, Santa Clara: Fibonacci Association, 1993), трижды переизданная в США Фибоначчиевой Ассоциацией.

В последние два десятилетия Б.А.Бондаренко ввел в рассмотрение новый класс полилинейных уравнений, преобразовав системы линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричные дифференциальные уравнения, содержащие степени матриц-операторов. Наиболее полно изучены полилинейные векторно-матричные уравнения статики и динамики теории упругости, полилинейные векторно-матричные уравнения движения вязкопластичных сред и другие полилинейные уравнения, обобщающие классические математические модели, связанные с задачами механики и математической физики. Для введенных уравнений Б.А. Бондаренко построил векторно-матричные представления их точных решений и разработал эффективные комбинаторные алгоритмы точного и приближенного решения конкретных задач. Полученные результаты были опубликованы в оригинальных и обзорных статьях, в том числе в престижных зарубежных изданиях.

Научные исследования Б.А. Бондаренко, опубликованные в его книгах и статьях, широко использовались аспирантами и соискателями ученых степеней, а также специалистами для решения конкретных задач. Под его руководством защищено 10 кандидатских диссертаций, а по ряду докторских он являлся научным консультантом. Книги и научные статьи Б.А. Бондаренко получили признание зарубежных ученых, причем многие из его основополагающих результатов включены в книги зарубежных ученых, в том числе в учебные пособия по специальным функциям математической физики, комбинаторному анализу и механике деформируемого твердого тела. С 1972 г. Б.А. Бондаренко – член Американского математического общества, с 1993 г. сотрудничает с Фибоначчиевой Ассоциацией США, является рецензентом и референтом ряда зарубежных научных журналов. Б.А. Бондаренко выступал с лекциями в университетах Германии, Румынии, Болгарии, Югославии и Кипра, а также с докладами на многих научных международных съездах и конференциях.

О Б.А.Бондаренко и его научной деятельности опубликованы обзорные статьи в отечественной и зарубежной печати. Так, Международный Биографический центр в Кембридже (Англия) включил Б.А. Бондаренко в число 100 наиболее выдающихся ученых мира за 2008-2012 годы. В книге «The Golden Fond of Science of Uzbekistan» (Ташкент, 2011) он включен в число ученых золотого фонда Узбекистана. Краткие описания его научной деятельности содержатся в различных энциклопедических и других изданиях.

За плодотворную научную деятельность и подготовку научных кадров Б.А. Бондаренко в 1983 г. присуждено почетное звание «Заслуженный деятель науки Узбекистана», в 1984 г. он был избран членом- корреспондентом, а в 2000 г. – академиком Академии наук Республики Узбекистан. Будучи ветераном войны и ветераном-выпускником Ташкентского высшего общевойскового командного училища, Б.А.Бондаренко был награжден двумя орденами и двадцатью медалями, в том числе медалью «Жасорат».

Коллектив редколлегии журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» посвящает настоящий выпуск светлой памяти Бориса Анисимовича Бондаренко – выдающегося ученого с мировым именем, заслуженного деятеля науки Республики Узбекистан, заботливого наставника и прекрасного скромного человека.

Содержание

<i>Макаров Д.В., Паровик Р.И.</i> Дробная математическая модель С.В. Дубовского и экономические циклы	8
<i>Кабильджанов А.С.</i> Алгоритмизация параметрической идентификации модели массопередачи кислорода в колонном биореакторе	26
<i>Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э., Зиядуллаева Ш.С.</i> Математическая модель задачи фильтрации структурированных флюидов в трехслойном пласте	37
<i>Хабибуллаев И., Муродуллаев Б.Т., Хакназарова Д.О.</i> Численное моделирование процесса фильтрации подземных вод на орошаемых территориях	44
<i>Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А.</i> Математическая модель деформации трёхслойных стержней при пространственных нагрузках	56
<i>Нормуродов Ч.Б., Тилолов М.А., Турсунова Б.А., Джураева Н.Т.</i> Численное моделирование неоднородных сингулярно-возмущенных краевых задач четвертого порядка спектральным методом	83
<i>Равшанов Н.</i> Многомерная математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса фильтрации водогазовой смеси в пористой среде	90
<i>Юсупов М., Каршиев Д.К., Шарипов Х.Д.</i> Вертикальные нелинейные колебания вязкоупругих систем с тремя степенями свободы	115
<i>Нуралиев Ф.А.</i> Об одной оптимальной интерполяционной формуле в пространстве Соболева	123
<i>Турсунмуротов Д.Х.</i> Отбор информативных признаков по мере компактности	133

Contents

Makarov D.V., Parovik R.I.

Fractional mathematical model S.V. Dubovsky and economic cycles 8

Kabildjanov A.S.

Algorithmization of parametric identification of the model of oxygen mass transfer in a columned bioreactor 26

Kayumov Sh., Bekchanov Sh.E., Ziyadullaeva Sh.S.

Mathematical model of the problem of filtration of structured fluids in a three-layer formation 37

Khabibullayev I., Murodullayev B.T., Khaknazarova D.O.

Three-dimensional mathematical model of groundwater level changes in irrigated land 44

Anarova Sh.A., Ismoilov Sh.M., Shokirov D.A.

Mathematical model of deformation of three-layer rods under spatial loads . . . 56

Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Tursunova B.A., Djurayeva N.T.

Numerical modeling of inhomogeneous singularly perturbed fourth-order boundary value problems using the spectral method 83

Ravshanov N.

Mathematical model and numerical algorithm for studying the filtration process of a water-gas mixture in porous media 90

Yusupov M., Karshiev D.K., Sharipov Kh.D.

Vertical nonlinear oscillations of viscoelastic systems with three degrees of freedom 115

Nuraliev F.A.

About one optimal interpolation formula in Sobolev space 123

Tursunmurotov D.Kh.

Selection of informative features in terms of compactness 133

УДК 517.938

ДРОБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С.В. ДУБОВСКОГО И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ*

^{1,2}Макаров Д.В., ^{1,2}Паровик Р.И.

danil.makarov.pk@yandex.ru; romanparovik@gmail.com

¹Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга,
683032, Россия, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4;

²Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 4.

В работе предложена и исследуется эредитарная математическая модель для описания экономических циклов (длинных волн Н.Д. Кондратьева). Математическая модель является обобщением известной классической модели С.В. Дубовского, которая характеризует взаимодействие эффективности новых технологий и эффективности основных фондов (фондоотдачи). Это взаимодействие дается с помощью системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с производными дробных порядков. Обобщение включает в себя учет эффектов наследственности (памяти), внешнего воздействия (приход инвестиций в основные фонды и новых управленческих технологий в инновации), зависимость нормы накопления от эффективности фондоотдачи. Предложенная обобщенная математическая модель в силу нелинейности исследовалась с помощью численного метода Адамса-Башфорта-Мултона из семейства предиктор-корректор. Численный алгоритм был реализован в среде компьютерной алгебры Matlab, были построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров математической модели, а также функции нормы накопления от эффективности. Показано, что динамическая система может обладать хаотическими и регулярными режимами. Очень важно, что в большинстве случаев регулярные режимы представляют собой на фазовой плоскости предельные циклы, которые можно сопоставить с экономическими циклами. Наличие эффектов памяти в рассматриваемой динамической системе указывает на то, что выход на предельные циклы может оказаться достаточно долгим.

Ключевые слова: К-волны, численное моделирование, экономические циклы и кризисы, осциллограммы, фазовые траектории.

Цитирование: Макаров Д.В., Паровик Р.И. Дробная математическая модель С.В. Дубовского и экономические циклы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 8-25.

1 Введение

В работе В.Е. Тарасова [1] был проведен обзор литературы, около 260 источников, который был посвящен приложению дробного исчисления в экономике. Там же были рассмотрены работы различных авторов, которые использовали дробное исчисление для описания дифференциальных моделей экономики с учетом наследственности или памяти. Эффекты памяти в динамической системе указывают на то, что текущее ее состояния зависит от предыдущих состояний или предыстории. Такие эффекты могут быть учтены при исследовании экономических кризисов и циклов, которые возникают при определенных условиях в зависимости от предыстории. Не

*Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ №МД-758.2022.1.1

исключением являются длинные волны Н.Д. Кондратьева или К-волны [2]. Они хорошо описывают инновационные системы, которые характеризуют взрывной технологический рост (прорыв) экономики при внедрении инноваций, стадию замедления и выхода инновации из экономики [3].

Существуют, на наш взгляд, несколько математических моделей для описания экономических циклов Кондратьева, которые получили наибольшее распространение и приведены в работах [4, 5]. В настоящей работе мы остановимся на математической модели С.В. Дубовского [4]. Такой выбор связан с тем, что несмотря на свою нелинейность, дает более простое понимание в вопросе о формировании экономических циклов и кризисов. Это позволяет дать более понятную интерпретацию результатов моделирования.

2 Постановка задачи

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x(t) = -\lambda n(y(t)) x(t) (x(t) - 1) (y(t) - y^*) + \delta_1 \cos(\omega_1 t), x(0) = a, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} y(t) = n(y(t)) (1 - n(y(t))) y^2(t) (x(t) - x^*) + \delta_2 \cos(\omega_2 t), y(0) = b, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ — эффективность новых технологий, коэффициент трудозатрат производительности на новых рабочих местах к средней производительности, $y(t)$ — эффективность основных фондов (фондоотдачи или капиталотдача) организации, n — функция от фондоотдачи имеет смысл нормы накопления, валовое накопление в долях валового внутреннего продукта (ВВП), λ — параметр, определяющий из статистики временного ряда, a, b — положительные константы, определяющие начальные условия, $t \in [0, T]$ — текущее время рассматриваемого процесса, $T > 0$ — время моделирования, (x^*, y^*) — координаты точки равновесия системы (1), $\delta_1, \delta_2, \omega_1, \omega_2$ заданные положительные константы, которые определяют внешние воздействия на систему (1). Операторы дробных производных в системе (1) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha_1} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha_1}}, 0 < \alpha_1 < 1, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha_2}}, 0 < \alpha_2 < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Операторы дробного дифференцирования (2) понимаются в смысле Герасимова-Капуто [6, 7] и их свойства можно изучить в книгах [8, 9].

Заметим, что в случае, когда в системе (1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, а также когда $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и норма накопления n является постоянной, то мы получаем математическую модель С.В. Дубовского, которая была изучена в его работе [4]. Эта модель с математической точки зрения описывает длинные волны Н.Д. Кондратьева (К-волны) экономических кризисов и циклов. Случай, когда в системе (1) α_1, α_2 произвольные, $\delta_1 = 0$ и норма накопления n являлась постоянной был рассмотрен в работе авторов [10] и была разработана для ее исследования компьютерная программа на языке Python [11].

Дробная динамическая система (1) является обобщением ранее известной модели С.В. Дубовского, которое включает следующие особенности:

- 1) норма накопления n — функция от эффективности фондоотдачи $y(t)$;
- 2) учет внешнего периодического воздействия для эффективности новых технологий $x(t)$ и эффективности фондоотдачи $y(t)$.
- 3) учет эффектов наследственности (памяти) с помощью производных дробных порядков (2).

Дадим некоторые пояснения к перечисленным выше особенностям модели (1).

В работе [12] показано, что норма накопления или доля чистых инвестиций зависит от фондоотдачи. Причем такая зависимость носит обратно пропорциональный характер. В частности, увеличение нормы накопления оказывает угнетающее воздействие на фондоотдачу, приводит к замораживанию ее роста и усугубляет падение. В настоящей работе мы будем использовать следующую зависимость нормы накопления от фондоотдачи:

$$n(y(t)) = \frac{l_1(l_2 - 1)}{y(t)}, \quad (3)$$

где $l_1 > 0, l_2 > 0$ – коэффициенты, которые определяются из статистических данных.

Внешнее периодическое воздействие на систему (1) обусловлено тем, что она получает новые технологии и инвестиции из вне, что, на наш взгляд, отражает более реалистичную картину в рассматриваемом экономическом процессе. В настоящей работе мы выбрали в качестве внешнего воздействия периодические функции с амплитудами δ_1, δ_2 и частотами φ_1, φ_2 соответственно.

Учет эффектов наследственности указывает, на то, что система (1) может помнить оказанное на нее воздействие. Это означает, что изменения эффективности новых технологий и фондоотдачи происходит не мгновенно, а с некоторой задержкой (ситуация отложенного эффекта). С точки зрения математики, эффект памяти можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений. В случае, когда ядро интегро-дифференциального уравнения представляет собой степенную функцию, то мы можем перейти к понятию дробной производной [8, 9]. Наличие степенной функции означает, что система постепенно забывает об оказанном на нее воздействии.

3 Методика решения

В силу того, что система (1) является нелинейной, то в качестве методики решения необходимо выбрать численный метод. В работе [10] был предложен численный алгоритм, основанный на нелокальной явной конечно разностной схеме. Однако, такая численная схема сходится условно и имеет ограничение на шаг расчетной сетки. Поэтому был выбран многошаговый метод Адамса-Бэшфорта-Моултона (АБМ), который был адаптирован для решения систем дробных дифференциальных уравнений с дробными производными вида с учетом формул (2) и был реализован в статье авторов [13]. Более подробно изучить метод АБМ и его свойства можно в следующих работах [14–16].

Метод АБМ относится к типу численных методов семейства предиктор-корректор и применяется для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Предположим, что искомые функции $x(t), y(t)$ обладают необходимой гладкостью. На равномерной сетке с шагом $\tau = T/N$ введем сеточные функции $x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, k = 0, \dots, N - 1$, которые будут определяться по формуле Адамса-Башфорта (предиктору):

$$\begin{cases} x_{k+1}^p = x_0 + \frac{\tau^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} \sum_{j=0}^k \theta_{j,k+1}^1 (-\lambda n_j x_j (x_j - 1) (y_j - y^*) + \delta_2 \cos(\omega_2 j \tau)), \\ y_{k+1}^p = y_0 + \frac{\tau^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)} \sum_{j=0}^k \theta_{j,k+1}^2 (n_j (1 - n_j) y_j^2 (x_j - x^*) + \delta_2 \cos(\omega_2 j \tau)), \\ \theta_{j,k+1}^i = (k - j + 1)^{\alpha_i} - (k - j)^{\alpha_i}, i = 1, 2. \end{cases} \quad (4)$$

Для корректора (формула Адамса-Моултона) получим:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_0 + K_1 \left(\begin{aligned} &(-\lambda n_{k+1} x_{k+1}^p (x_{k+1}^p - 1) (y_{k+1}^p - y^*) + \delta_1 \cos(\omega_1 \tau (k+1))) + \\ &+ \sum_{j=0}^k \rho_{j,k+1}^1 (-\lambda n_j x_j (x_j - 1) (y_j - y^*) + \delta_1 \cos(\omega_1 j \tau)) \end{aligned} \right), \\ y_{k+1} = y_0 + K_2 \left(\begin{aligned} &(n_{k+1} (1 - n_{k+1}) (y_{k+1}^p)^2 (x_{k+1}^p - x^*) + \delta_2 \cos(\omega_2 \tau (k+1))) + \\ &+ \sum_{j=0}^n \rho_{j,k+1}^2 (n_j (1 - n_j) y_j^2 (x_j - x^*) + \delta_2 \cos(\omega_2 j \tau)) \end{aligned} \right), \end{cases} \quad (5)$$

$K_1 = \frac{\tau^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 2)}$, $K_2 = \frac{\tau^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 2)}$, весовые коэффициенты в (4) определяются по формуле:

$$\rho_{j,k+1}^i = \begin{cases} k^{\alpha_i+1} - (k - \alpha_i) (k+1)^{\alpha_i}, & j = 0, \\ (k - j + 2)^{\alpha_i+1} + (k - j)^{\alpha_i+1} - 2(k - j + 1)^{\alpha_i+1}, & 1 \leq j \leq k, \\ 1, & j = k + 1, \\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Для метода АБМ справедлива следующая теорема [15].

Теорема. Если $\partial_{0t}^{\alpha_i} x_i(t) \in C^2[0, T]$, $(x_1 = x(t), x_2 = y(t), i = 1, 2)$ тогда

$$\max_{1 \leq j \leq k} |x_i(t_j) - x_{i,j}| = O\left(\tau^{1+\min_i \alpha_i}\right). \quad (6)$$

Доказательство теоремы основано на методе математической индукции и приведено в статье [15].

Заметим, что в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ с учетом (6) получаем классический метод АБМ второго порядка точности. В работе авторов [13] были подтверждены результаты по оценке вычислительной точности метода АБМ согласно условию (6), а также второй порядок точности в классическом случае при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

4 Результаты и их обсуждение

Результаты численного анализа дробной динамической системы (1), а также их визуализация была получена в среде компьютерной математики Matlab. Рассмотрим, некоторые различные случаи, которые могут возникнуть в рамках модели (1).

Пример 1. Классическая модель С.В. Дубовского ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \delta_1 = \delta_2 = 0$ и n – положительная константа [4]). Возьмем значения параметров модели (1) из работы С.В. Дубовского [4]: $n = 0.2, x^* = 1.3, y^* = 0.5, T = 100, \tau = 0.2$.

С помощью численного алгоритма АБМ (4), (5) построим осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях $\lambda = [2.25, 2.5, 2.75]$ и начальных значениях $x_0 = [1.35, 1.4, 1.45]$ при фиксированном значении $y_0 = 0.5$.

Численный алгоритм АБМ приведен ниже в виде функции `ABMDubovskiyClas.m` на языке Matlab.

```
function [x,y]=ABMDubovskiyClas(T,tau,lambda,n,Init)
N=round(T/tau); a=zeros(N,N); b=zeros(N,N); xp=zeros(1,N); yp=zeros(1,N);
x=zeros(1,N); y=zeros(1,N); x1=1.3; y1=0.5; xp(1)=Init(1); yp(1)=Init(2);
x(1)=xp(1); y(1)=yp(1); a(1,1)=1,b(1,1)=1;
for i=1:N
    a(1,i+1)=i^2-(i-1)*(i+1); b(1,i+1)=i^2-(i-1)*(i+1);
    a(i+1,i+1)=1; b(i+1,i+1)=1;
```

```

for j=2:i
    a(j,i+1)=(i-j+2)^2+(i-j)^2-2*(i-j+1)^2;
    b(j,i+1)=(i-j+2)^2+(i-j)^2-2*(i-j+1)^2;
end
end
for k=1:N-1
    p=1:k;
    xp(k+1)=xp(1)+tau*sum((-lambda*n*xp(p).*(xp(p)-1).*(yp(p)-y1)));
    yp(k+1)=yp(1)+tau*sum((n*(1-n)*yp(p).^2.*(xp(p)-x1)));
    x(k+1)=x(1)+tau/2*(-lambda*n*xp(k+1).*(xp(k+1)-1).*(yp(k+1)-y1)+...
    sum(-lambda*n*x(p).*(x(p)-1).*(y(p)-y1)*a(p,k+1)));
    y(k+1)=y(1)+tau/2*(n*(1-n)*yp(k+1).^2.*(xp(k+1)-x1)+...
    sum(n*(1-n)*y(p).^2.*(x(p)-x1)*b(p,k+1)));
end
end

```

Результат работы функции `ABMDubovskiyClas.m` приведен в следующем коде на языке Matlab.

```

[x1,y1]=ABMDubovskiyClas(100,0.2,2.25,0.2,[1.35 0.5]);
[x2,y2]=ABMDubovskiyClas(100,0.2,2.5,0.2,[1.4 0.5]);
[x3,y3]=ABMDubovskiyClas(100,0.2,2.75,0.2,[1.45 0.5]);
t=0.01:0.2:100;
figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(t,x1,'b',t,x2,'r',t,x3,'g')
xlabel('t'); ylabel('x');
title('a')
legend(['\lambda=2.25,x_0=1.35'],['\lambda=2.5,x_0=1.4'],
['\lambda=2.45,x_0=1.45'])
subplot(2,2,2)
plot(t,y1,'b',t,y2,'r',t,y3,'g')
xlabel('t'); ylabel('y');
title('б')
legend(['\lambda=2.25,x_0=1.35'],['\lambda=2.5,x_0=1.4'],
['\lambda=2.45,x_0=1.45'])
subplot(2,2,[3,4])
plot(x1,y1,'b',x2,y2,'r',x3,y3,'g')
xlabel('x'); ylabel('y');
title('с')
legend(['\lambda=2.25,x_0=1.35'],['\lambda=2.5,x_0=1.4'],
['\lambda=2.45,x_0=1.45'])

```

Визуализация результатов моделирования приведены на рис. 1.

На рис. 1а и б приведены осциллограммы для классической модели С.В. Дубовского, которые были им получены в статье [4]. Мы здесь можем наблюдать колебания с постоянной амплитудой, а точка покоя (x^*, y^*) для соответствующей замкнутой фазовой траекторией называется центром (рис.1с).

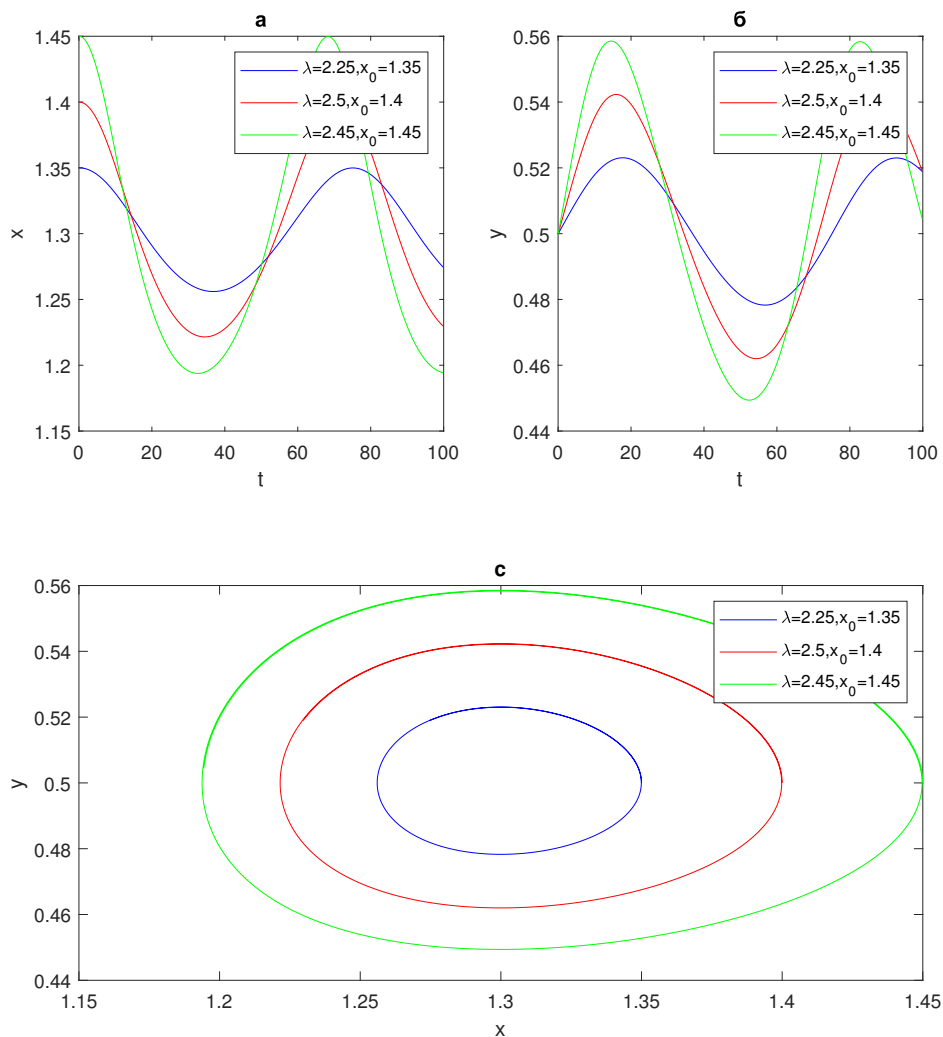


Рис. 1 Результаты моделирования в рамках классической модели С.В. Дубовского: а) осциллограмма $(x(t), t)$; б) осциллограмма $(y(t), t)$; в) фазовая траектория $(x(t), y(t))$

Одной из главных целей работы — выяснить при каких значениях параметров дробной системы (1) возможно существования замкнутых фазовых траекторий, которые приводят либо к траекториям типа центр либо к предельным циклам. Рассмотрим сначала пример дробной системы (1), когда отсутствует внешнее взаимодействие $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Пример 2. Дробная модель С.В. Дубовского. Возьмем параметры модели (1) следующими: $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $n = 0.2$, $\lambda = 2.25$, $x^* = 1.3$, $y^* = 0.5$, $T = 500$, $\tau = 0.04$.

Для численного анализа дробной модели (1) с помощью алгоритма АБМ была разработана на языке Matlab функция `ABMDubovskiyFrac.m`:

```
function [x,y]=ABMDubovskiyFrac(T,tau,alpha,delta,phi,par,Init)
alpha1=alpha(1); alpha2=alpha(2); delta1=delta(1); delta2=delta(2);
phi1=phi(1); phi2=phi(2); n=par(1); lambda=par(2);
N=round(T/tau); a=zeros(N,N); b=zeros(N,N); x=zeros(1,N); y=zeros(1,N);
xp=zeros(1,N); yp=zeros(1,N); x1=1.3; y1=0.5; xp(1)=Init(1); yp(1)=Init(2);
x(1)=xp(1); y(1)=yp(1);
for i=0:N
a(1,i+1)=i^(alpha1+1)-(i-alpha1)*(i+1)^(alpha1);
```

```

b(1,i+1)=i^(alpha2+1)-(i-alpha2)*(i+1)^(alpha2);
end
for i=1:N
a(i+1,i+1)=1;
b(i+1,i+1)=1;
for j=2:i
a(j,i+1)=(i-j+2)^(alpha1+1)+(i-j)^(alpha1+1)-2*(i-j+1)^(alpha1+1);
b(j,i+1)=(i-j+2)^(alpha2+1)+(i-j)^(alpha2+1)-2*(i-j+1)^(alpha2+1);
end
end
for k=1:N-1
p=1:k;
xp(k+1)=xp(1)+tau^(alpha1)/gamma(alpha1+1)*...
sum(((k-p+1).^alpha1-(k-p).^alpha1).*(delta1*cos(phi1*p*tau)-...
lambda*n*xp(p).*(xp(p)-1).*(yp(p)-y1)));
yp(k+1)=yp(1)+tau^(alpha2)/gamma(alpha2+1)*...
sum(((k-p+1).^alpha2-(k-p).^alpha2).*(delta2*cos(phi2*p*tau)+...
n*(1-n)*yp(p).^2.*(xp(p)-x1)));
x(k+1)=x(1)+tau^(alpha1)/gamma(alpha1+2)*...
(delta1*cos(phi1*(k+1)*tau)-lambda*n*xp(k+1).*(xp(k+1)-1).*(yp(k+1)-y1)+...
sum((delta1*cos(phi1*p*tau)-lambda*n*x(p).*(x(p)-1).*(y(p)-y1))*a(p,k+1)));
y(k+1)=y(1)+tau^(alpha2)/gamma(alpha2+2)*...
(delta2*cos(phi2*(k+1)*tau)+n*(1-n)*yp(k+1).^2.*(xp(k+1)-x1)+...
sum((delta2*cos(phi2*p*tau)+n*(1-n)*y(p).^2.*(x(p)-x1))*b(p,k+1)));
end
end

```

Далее будем изменять сначала значения параметра α_1 при фиксированном α_2 , а затем на оборот: будем менять значения параметра α_2 при фиксированном значении α_1 .

В первом случае применение функции `ABMDubovskiyFrac.m` представлено в виде кода программы на языке Matlab:

```

[x1,y1]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[1 1],[0 0],[0 0],[0.2 2.25],[1.35 0.5]);
[x2,y2]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[0.9 1],[0 0],[0 0],[0.2 2.25],[1.35 0.5]);
[x3,y3]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[0.8 1],[0 0],[0 0],[0.2 2.25],[1.35 0.5]);
t=0.001:0.04:500;
figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(t,x1,'k',t,x2,'-k',t,x3,'--k')
xlabel('t'); ylabel('x');
title('a')
legend(['\alpha_1=1, \alpha_2=1'],['\alpha_1=0.9, \alpha_2=1'],
['\alpha_1=0.8, \alpha_2=1'])
subplot(2,2,2)
plot(t,y1,'k',t,y2,'-k',t,y3,'--k')
xlabel('t'); ylabel('y');
title('6')
legend(['\alpha_1=1, \alpha_2=1'],['\alpha_1=0.9, \alpha_2=1'],

```

```

['\alpha_1=0.8, \alpha_2=1']
subplot(2,2,[3,4])
plot(x1,y1,'k', x2,y2,'-k',x3,y3,'--k')
xlabel('x'); ylabel('y');
title('c')
legend(['\alpha_1=1, \alpha_2=1'],['\alpha_1=0.9, \alpha_2=1'],
['\alpha_1=0.8, \alpha_2=1'])

```

Визуализация результатов моделирования приведено на рис.2.

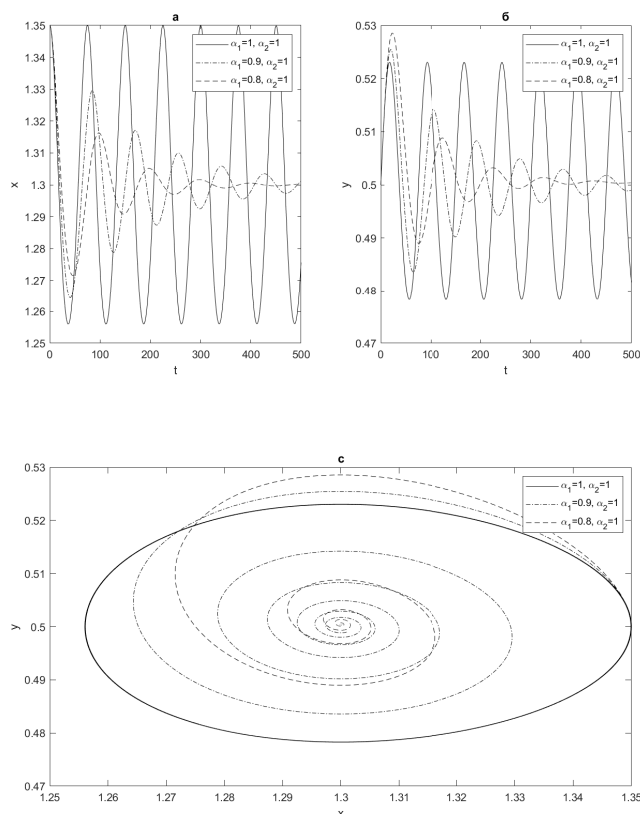


Рис. 2 Результаты моделирования в рамках дробной модели С.В. Дубовского: а) осциллограмма $(x(t), t)$; б) осциллограмма $(y(t), t)$; в) фазовая траектория $(x(t), y(t))$

На рис.2 мы видим, что в случае, когда система испытывает собственный колебания и значения параметра α_1 уменьшаются, то колебательный режим имеет затухающий характер рис.2а,б, а на фазовой плоскости точке покоя (x^*, y^*) называется устойчивым фокусом.

Рассмотрим другой случай. Зафиксируем значение параметра α_1 , а значения параметра α_2 будем изменять. Код на языке Matlab приведен ниже, а визуализация результатов моделирования приведена на рис.3.

```

[x1,y1]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[1 1],[0 0],[0 0],[0.2 2.25],[1.35 0.5]);
[x2,y2]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[1 0.9],[0 0],[0 0],[0.2 2.25],[1.35 0.5]);
[x3,y3]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[1 0.8],[0 0],[0 0],[0.2 2.25],[1.35 0.5]);
t=0.001:0.04:500;
figure(1)
subplot(2,2,1)

```

```

plot(t,x1,'k',t,x2,'-.k',t,x3,'--k')
xlabel('t'); ylabel('x');
title('a')
legend(['\alpha_1=1, \alpha_2=1'], ['\alpha_1=1, \alpha_2=0.9'],
['\alpha_1=1, \alpha_2=0.8'])
subplot(2,2,2)
plot(t,y1,'k',t,y2,'-.k',t,y3,'--k')
xlabel('t'); ylabel('y');
title('б')
legend(['\alpha_1=1, \alpha_2=1'], ['\alpha_1=1, \alpha_2=0.9'],
['\alpha_1=1, \alpha_2=0.8'])
subplot(2,2,[3,4])
plot(x1,y1,'k', x2,y2,'-.k',x3,y3,'--k')
xlabel('x'); ylabel('y');
title('в')
legend(['\alpha_1=1, \alpha_2=1'], ['\alpha_1=1, \alpha_2=0.9'],
['\alpha_1=1, \alpha_2=0.8'])

```

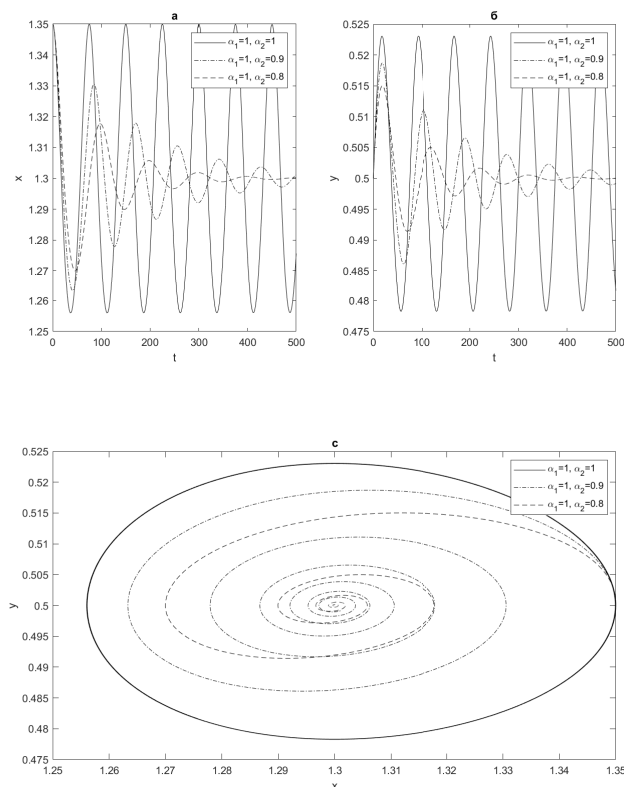


Рис. 3 Результаты моделирования в рамках дробной модели С.В. Дубовского: а) осциллограмма $(x(t), t)$; б) осциллограмма $(y(t), t)$; в) фазовая траектория $(x(t), y(t))$

На рис.3, также как на рис.2 мы видим затухающие колебания, точка покоя также является устойчивым фокусом. Исходя из затухающего колебательного режима, мы можем сделать вывод о том, что наличие памяти в системе (1) при условии отсутствия внешнего воздействия не приводит к замкнутой фазовой траектории, т.е. в системе отсутствует автоколебательный режим. Поэтому существование замкнутой

траектории возможно лишь при внешнем воздействии. Рассмотрим теперь пример, взятый из работы авторов [10].

Параметры выберем следующими: $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0.5, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 1.5, n = 0.2, \lambda = 2.25, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$. На рис.4 приведена фазовая траектория для этого случая.

```
[x1,y1]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[0.1 0.1],[0 0.5],[0 1.5],[0.2 2.25],
[1.35 0.5]); plot(x1,y1,'k')
xlabel('x'); ylabel('y'); title('Фазовая траектория')
legend(['\alpha_1=0.1, \alpha_2=0.1, x_0=1.35, y_0=0.5'])
```

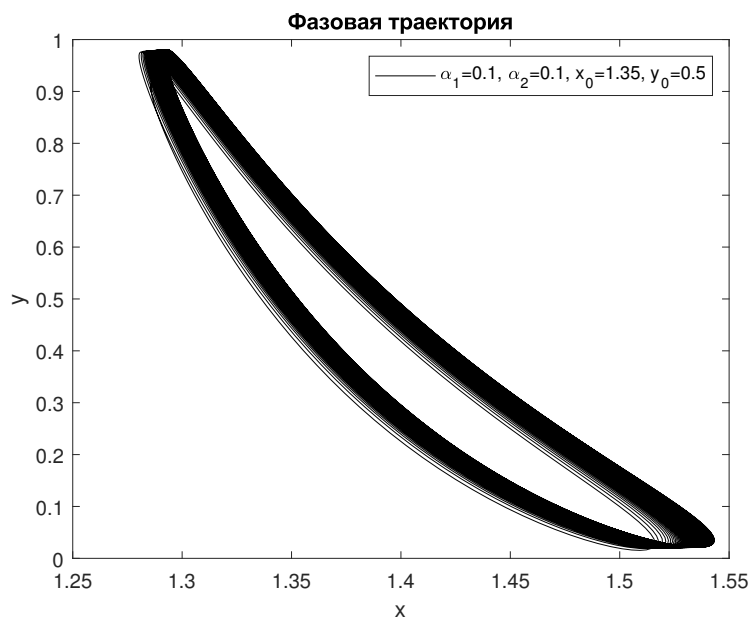


Рис. 4 Фазовая траектория $(x(t), y(t))$ для дробной модели (1).

Можно заметить, что фазовая траектория здесь выходит на предельный цикл.

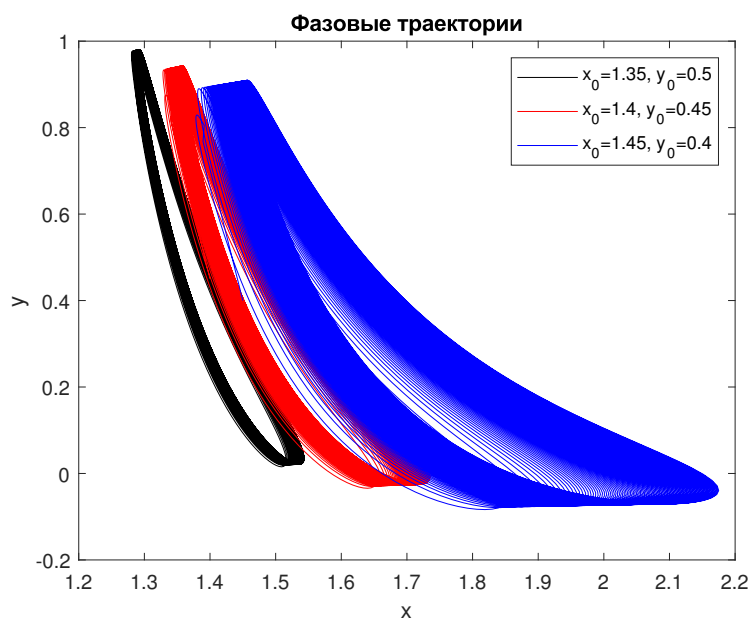


Рис. 5 Фазовые траектории, полученные при различных значениях начальных условий.

На рис.5 приведено семейство фазовых траекторий, полученных при различных начальных значениях. Эти фазовые траектории показывают, что предельный цикл представленный на рис.4 не является устойчивым. Если взять начальные значения внутри это предельного цикла, например, значение $(x_0 = 1.4, y_0 = 0.45)$, то фазовая траектория выходит на другой предельный цикл с большей орбитой — красная фазовая траектория на рис.5. Отметим, что эффективность новых технологий $x(t)$ и эффективность основных фондов $y(t)$ ведут себя разнонаправлено.

Далее мы можем увидеть, что при дальнейшем увеличении начального значения по оси абсцисс и уменьшении начального значения по оси ординат, мы получим другой предельный цикл опять с более большой орбитой — синяя фазовая траектория на рис.5. Можно также отметить, что эти предельные циклы касаются друг друга, заполняя плотно фазовую плоскость.

Рассмотрим другой пример, программный код для которого приведен ниже.

```
[x1,y1]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[0.4 0.4],[0 0.5],[0 1.5],[0.2 2.25],
[1.35 0.5]);
[x2,y2]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[0.6 0.6],[0 0.5],[0 1.5],[0.2 2.25],
[1.35 0.5]);
[x3,y3]=ABMDubovskiyFrac(500,0.04,[0.8 0.8],[0 0.5],[0 1.5],[0.2 2.25],
[1.35 0.5]);
t=0.001:0.04:500;
figure(1)
subplot(2,2,1)
plot(t,x1,'k',t,x2,'r',t,x3,'b')
xlabel('t'); ylabel('x');
title('a')
legend(['\alpha_1=0.4, \alpha_2=0.4'],['\alpha_1=0.6, \alpha_2=0.6'],
['\alpha_1=0.8, \alpha_2=0.8'])
subplot(2,2,2)
plot(t,y1,'k',t,y2,'r',t,y3,'b')
xlabel('t'); ylabel('y');
title('б')
legend(['\alpha_1=0.4, \alpha_2=0.4'],['\alpha_1=0.6, \alpha_2=0.6'],
['\alpha_1=0.8, \alpha_2=0.8'])
subplot(2,2,[3,4])
plot(x1,y1,'k', x2,y2,'r',x3,y3,'b')
xlabel('x'); ylabel('y');
title('с')
legend(['\alpha_1=0.4, \alpha_2=0.4'],['\alpha_1=0.6, \alpha_2=0.6'],
['\alpha_1=0.8, \alpha_2=0.8'])
```

На рис.6 приведена визуализация результатов моделирования при различных значениях параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.4, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.6, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.8$. Мы видим выход всех фазовых траекторий на предельные циклы рис.6. При уменьшении значений параметров α_1 и α_2 предельные циклы имеют все большую орбиту.

Кроме того, мы видим, что при уменьшении значений параметров α_1 и α_2 также увеличивается время выхода на предельный цикл. Это указывает на то, что в системе (1) возникает эффект памяти, т.е. для стабилизации колебательных режимов необходимо время.

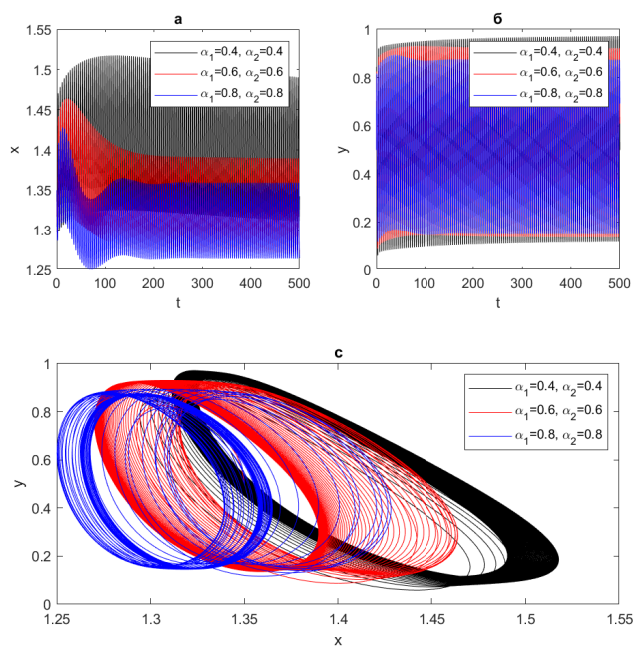


Рис. 6 Фазовые траектории, полученные при различных значениях параметров α_1 и α_2 .

Рассмотрим следующий более общий пример (рис.7). Значения параметров выберем: $\delta_1 = 1, \varphi_1 = 3$ и $\delta_2 = 0.5, \varphi_2 = 1.5$, а остальные параметры оставим без изменения.

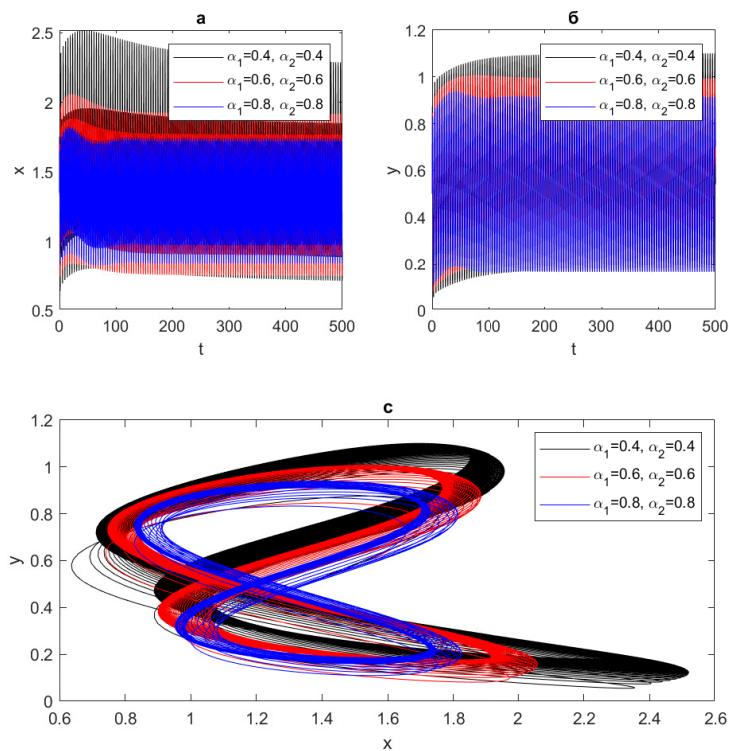


Рис. 7 Фазовые траектории, полученные при различных значениях параметров: α_1 и α_2 .

Наличие внешнего воздействия в виде гармонических функций с учетом наследственности значительно усложняют характер колебаний (рис.7а,б) и форму фазовых траекторий (рис.7с). Форма фазовых траекторий более похожа на фигуры Лиссажу, которые встречаются в технике. Однако за счет эффекта памяти эти фигуры довольно сильно деформированы. Также мы видим, что сохраняется тенденция из предыдущих примеров — при уменьшении значений α_1 и α_2 увеличивается время выхода на предельный цикл, а также его орбита.

Пример 3. Рассмотрим дробную модель С.В. Дубовского с учетом зависимости нормы накопления от фондоотдачи согласно соотношению (3). Для численного решения системы (1) в этом случае была разработана функция `ABMDubovskiyFracny.m` в Matlab:

```
function [x,y]=ABMDubovskiyFracny(T,tau,alpha,delta,phi,par,Init)
N=round(T/tau); alpha1=alpha(1); alpha2=alpha(2); delta1=delta(1);
delta2=delta(2); phi1=phi(1); phi2=phi(2); l1=par(1); l2=par(2);
lambda=par(3); tau=T/N; a=zeros(N,N); b=zeros(N,N); xp=zeros(1,N);
yp=zeros(1,N); x=zeros(1,N); y=zeros(1,N); x1=1.3; y1=0.5;
xp(1)=Init(1); yp(1)=Init(2); x(1)=xp(1); y(1)=yp(1);
for i=0:N
a(1,i+1)=i^(alpha1+1)-(i-alpha1)*(i+1)^(alpha1);
b(1,i+1)=i^(alpha2+1)-(i-alpha2)*(i+1)^(alpha2);
end
for n=1:N
a(i+1,i+1)=1; b(i+1,i+1)=1;
for j=2:i
a(j,i+1)=(i-j+2)^(alpha1+1)+(i-j)^(alpha1+1)-2*(i-j+1)^(alpha1+1);
b(j,i+1)=(i-j+2)^(alpha2+1)+(i-j)^(alpha2+1)-2*(i-j+1)^(alpha2+1);
end
end
for k=1:N-1
p=1:k;
xp(k+1)=xp(1)+tau^(alpha1)/gamma(alpha1+1)*...
sum(((k-p+1).^alpha1-(k-p).^alpha1).*(delta1*cos(phi1*p*tau)-...
lambda*(l1*(l2-1)./yp(p)).*xp(p).*(xp(p)-1).*(yp(p)-y1)));
yp(k+1)=yp(1)+tau^(alpha2)/gamma(alpha2+1)*...
sum(((k-p+1).^alpha2-(k-p).^alpha2).*(delta2*cos(phi2*p*tau)+...
(l1*(l2-1)./yp(p)).*(1-(l1*(l2-1)./yp(p))).*yp(p).^2.*(xp(p)-x1)));
x(k+1)=x(1)+tau^(alpha1)/gamma(alpha1+2)*...
(delta1*cos(phi1*(k+1)*tau)-lambda*(l1*(l2-1)./yp(k+1)).*...
xp(k+1).*(xp(k+1)-1).*(yp(k+1)-y1)+...
sum((delta1*cos(phi1*p*tau)-lambda*(l1*(l2-1)./yp(p)).*...
x(p).*(x(p)-1).*(y(p)-y1))*a(p,k+1)));
y(k+1)=y(1)+tau^(alpha2)/gamma(alpha2+2)*...
(delta2*cos(phi2*(k+1)*tau)+(l1*(l2-1)./yp(k+1)).*...
(1-(l1*(l2-1)./yp(k+1))).*yp(k+1).^2.*(xp(k+1)-x1)+...
sum((delta2*cos(phi2*p*tau)+(l1*(l2-1)./yp(p)).*...
(1-(l1*(l2-1)./yp(p))).*y(p).^2.*(x(p)-x1))*b(p,k+1)));
end
end
```

Рассмотрим частный случай (классическая модель С.В. Дубовского), а именно когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \delta_1 = \delta_2 = 0$ и построим с помощью функции `ABMDubovskiyny.m`, приведенной выше, фазовые траектории в зависимости от различных значений l_1 и l_2 . Результаты моделирование приведены на рис.8.

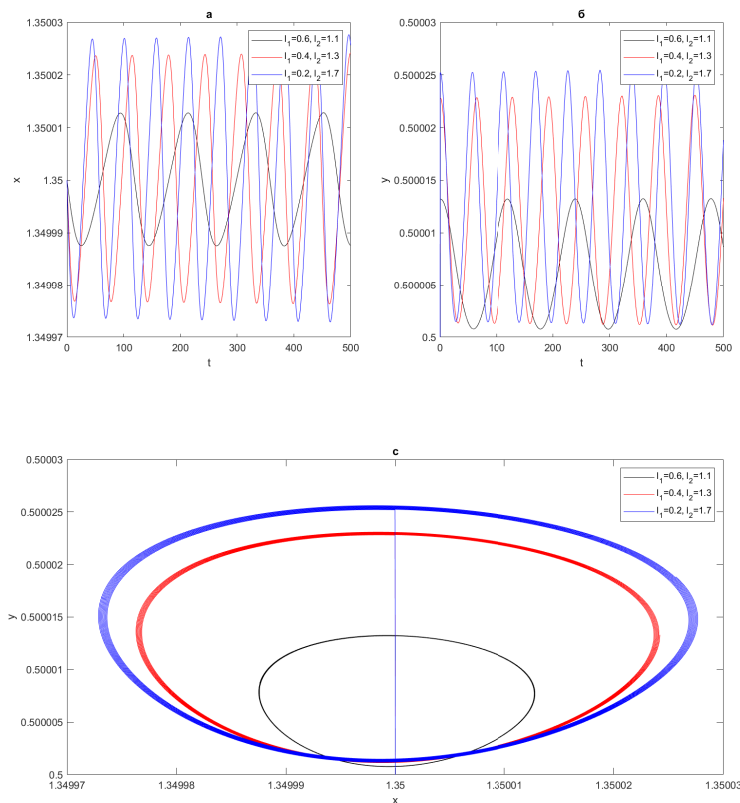


Рис. 8 Фазовые траектории, полученные при различных значениях параметров: l_1 и l_2 .

На рис.8с мы видим замкнутые фазовые траектории, точка покоя (x^*, y^*) — центр. Можно отметить следующее, что при изменении значений l_1 и l_2 , которые приводят к увеличению числителя в соотношении (3) наблюдается рост амплитуд колебаний и увеличение орбит фазовых траекторий. Этот случай соответствует росту нормы накопления.

Рассмотрим случай дробной модели С.В. Дубовского (1). Значения параметров приведены в следующем программном коде.

```
[x1,y1]=ABMDubovskiyny(500,0.04,[1 1],[3 0.5],[1 1],[0.6, 1.1, 2.25],
[1.35 0.5]);
[x2,y2]=ABMDubovskiyny(500,0.04,[0.9 0.9],[3 0.5],[1 1],[0.6, 1.1, 2.25],
[1.35 0.5]);
[x3,y3]=ABMDubovskiyny(500,0.04,[0.8 0.8],[3 0.5],[1 1],[0.6, 1.1, 2.25],
[1.35 0.5]);
t=0.001:0.04:500;
plot(x1,y1,'k', x2,y2,'r',x3,y3,'b')
xlabel('x'); ylabel('y');
title('Фазовые траектории')
```

```
legend(['\alpha_1=1, \alpha_2=1'], ['\alpha_1=0.9, \alpha_2=0.9'],
['\alpha_1=0.8, \alpha_2=0.8'], 'Location', 'southeast')
```

Визуализация результатов приведена на рис.9.

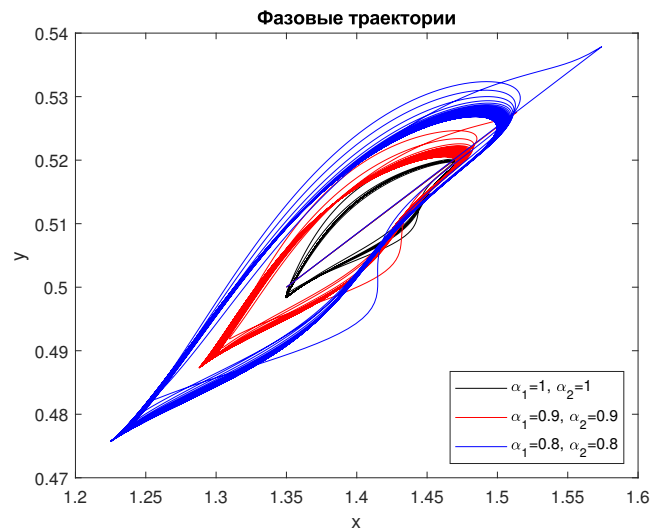


Рис. 9 Фазовые траектории, полученные при различных значениях параметров α_1 и α_2 при фиксированных значениях $l_1 = 0.6$ и $l_2 = 1.1$.

Мы видим, что при включение внешнего воздействия со значениями параметров $\delta_1 = 3, \delta_2 = 1, \varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 1$ наблюдается выход фазовых траекторий на предельный цикл. Отметим, что форма предельных циклов отличается от ранее полученных, это связано с влиянием нормы накопления как функции от фондоотдачи. Причем эта обратно пропорциональная зависимость (3), чем больше фондоотдача, тем меньше норма накопления. Здесь также можно заметить, что эффективность новых технологий $x(t)$ и эффективность основных фондов $y(t)$ ведут себя одинаково: либо вместе возрастают, либо вместе убывают.

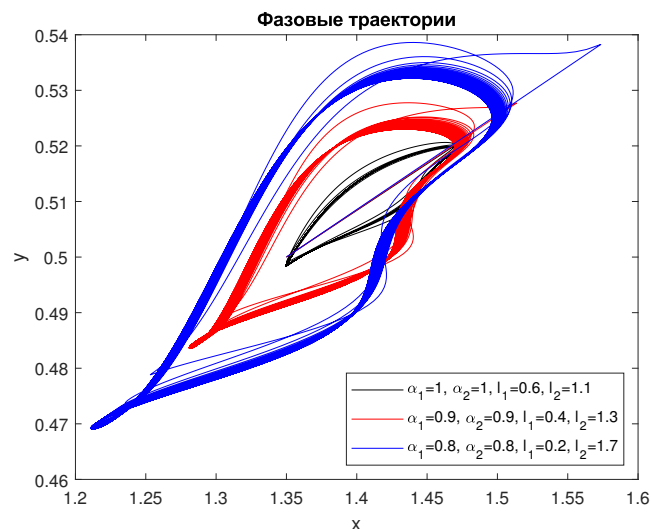


Рис. 10 Фазовые траектории, полученные при различных значениях параметров α_1 и α_2 , а также $l_1 = 0.6$ и $l_2 = 1.1$.

На рис.10 приведены фазовые траектории при различных значениях параметров α_1 и α_2 , а также $l_1 = 0.6$ и $l_2 = 1.1$. Остальные значения параметров возьмем из предыдущего примера. Видно, что в этом случае общая тенденция сохраняется как и в предыдущем случае. Однако мы видим, что фазовые траектории здесь отличаются: более деформированы и орбиты более увеличены. На рис.9 и рис.10 с точки зрения экономики можно заметить следующее: сначала некоторое время необходимо системе выйти на предельный цикл; на предельном цикле происходит одновременный рост эффективности новых технологий и эффективности основных фондов; через некоторое время происходит одновременный спад этих показателей, который усиливается в результате увеличения нормы накопления; последнее означает, что тормозится рост фондоотдачи и ускоряется ее падение.

5 Заключение

В работе проведено исследование дробной модели С.В. Дубовского (1), которая учитывает эффекты памяти, внешнее воздействие и обратную зависимость нормы накопления от фондоотдачи (3). Необходимо отметить, что дробная модель С.В. Дубовского (1) без внешнего воздействия, т.е. в условиях собственных колебаний не обладает автоколебательными режимами. Поэтому замкнутые траектории могут возникать в дробной системе (1) в случае внешнего воздействия, например, периодического воздействия. Здесь возникают предельные циклы, которые не всегда являются устойчивыми. Эффект памяти увеличивает время выхода на предельный цикл, т.е. выход на предельный цикл происходит с некоторой задержкой. Наличие обратной зависимости нормы накопления от фондоотдачи приводит к деформации предельных циклов и изменению размеров их орбит. С точки зрения экономической интерпретации результатов моделирования можно отметить следующее: увеличение новых технологий или управленческих решений, а также дополнительных инвестиций приводит к стабилизации процесса; наличие факторов, препятствующих к получению моментального эффекта от внедрения новых технологий и дополнительных инвестиций, приводит к ситуации отложенного экономического эффекта; увеличение нормы накопления приводит к стагнации фондоотдачи и к ее падению. Все перечисленные закономерности не противоречат известным экономическим процессам. Предложенная математическая модель может быть применена к описанию различных экономических циклов и кризисов.

Необходимо отметить, что следующим этапом продолжения настоящей работы является задача определения периода соответствующего экономического цикла с учетом экспериментальных данных экономических циклов. Оценить период экономического цикла можно с помощью сечений Пуанкаре. Здесь также возможны появления обратных задач для уточнения значений важных параметров модели по имеющимся экспериментальным данным. Далее имеет определенный смысл обобщить дробную модель С.В. Дубовского (1) на случай зависимости порядков дробной производной от времени. Это будет означать, что эффект памяти изменяется во времени. Методом исследования такой дробной системы, также может являться метод АБМ (4), (5), который может быть адаптирован для решения подобных систем.

Отдельный интерес может представлять качественное исследование дробной модели С.В. Дубовского (1), например, исследования, связанные с вопросами устойчивости предельных циклов, построения их фрактальной размерности, исследование бифуркационных диаграмм или построение более детальных карт и атласов динамических режимов, по аналогии с работой [17].

Литература

- [1] *Tarasov V.E.* On history of mathematical economics: Application of fractional calculus // Mathematics, – 2019. – vol. 7. – №6. – 509 p. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math7060509>.
- [2] *Alexander M.A.* The Kondratiev cycle: A generational interpretation Bloomington: IUniverse, – 2002. – 314 p.
- [3] *Makarov D.V.* Economic and mathematical modeling innovation systems // Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki, – 2014. – vol. 7. – no6. – P. 66–70. doi: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2014-8-1-66-70>.
- [4] *Дубовский С.В.* Объект моделирования–цикл Кондратьева // Математическое моделирование, – 1995. – Т.7. – №6. – С. 65–74.
- [5] *Акаев А.А.* Анализ решений общего уравнения макроэкономической динамики // Экономика и математические методы, – 2008. – Т.44. – №6. – С. 62–78.
- [6] *Герасимов А.Н.* Обобщение законов линейного деформирования и их применение к задачам внутреннего трения // АН ССР. Прикладная математика и механика, – 1948. – Т. 44. №6. – С. 62–78.
- [7] *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II // Geophysical Journal International, – 1967. – №13. – P. 529–539.
- [8] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение – М.: Физматлит, – 2003. – 272 с.
- [9] *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam – Amsterdam: Elsevier, – 2006. – 523 p.
- [10] *Makarov D.V., Parovik R.I.* Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // Journal of Internet Banking and Commerce, – 2016. – vol. 21. – №21.
- [11] *Makarov D.V., Parovik R.I.* A computer program for the numerical analysis of economic cycles within the framework of the Dubovsky generalized model // AIP Conference Proceedings, – 2022. vol. 2467. 060015. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0092376>.
- [12] *Гребенников В.Г.* Некоторые проблемы взаимосвязи темпов роста национального дохода, фондоотдачи и норм накопления // Экономика и математические методы, – 1968. – №12. – С. 529–539.
- [13] *Makarov D.V., Parovik R.I.* Numerical modeling of Kondratyevs long waves taking into account heredity // AIP Conference Proceedings, 2021. vol. 2365. 070005. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0056847>.
- [14] *Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D.* A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations // Nonlinear Dynamics, – 2002. vol. 29. no. 1-4. – P. 3–22. doi: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1016592219341>.
- [15] *Yang C., Liu F.* A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system // ANZIAM Journal, – 2005. vol. 47. – P. 168–184. doi: <http://dx.doi.org/10.21914/anziamj.v47i0.1037>.
- [16] *Garrappa R.* Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial // Mathematics, 2018. vol. 6. no. 2. 016. doi: <http://dx.doi.org/10.3390/math6020016>.
- [17] *Parovik R.I., Yakovleva T.P.* Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package // Journal of Physics: Conference Series, – 2022. – vol. 2373. 52022. doi: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2373/5/052022>.

UDC 517.938

**FRACTIONAL MATHEMATICAL MODEL S.V. DUBOVSKY
AND ECONOMIC CYCLES***^{1,2}*Makarov D.V.*, ^{1,2}*Parovik R.I.*

danil.makarov.pk@yandex.ru; romanparovik@gmail.com

¹ Vitus Bering Kamchatka State University,
683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Pogranichnaya str., 4, Russia;²National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
100174, Tashkent, st. Universitetskaya, 4, Uzbekistan.

Background: The paper proposes and studies a hereditary mathematical model for describing economic cycles (long waves of N.D. Kondratiev). The mathematical model is a generalization of the well-known classical model of S.V. Dubovsky, which characterizes the interaction between the efficiency of new technologies and the efficiency of fixed assets (capital productivity). This interaction is given by a system of nonlinear ordinary differential equations with derivatives of fractional orders. The generalization includes taking into account the effects of heredity (memory), external influences (the arrival of investments in fixed assets and new management technologies in innovation), and the dependence of the rate of accumulation on the efficiency of capital productivity. The effects of heredity are characterized by a property of a dynamic economic system, in which its current state depends on previous ones and, from a mathematical point of view, is described using the apparatus of fractional calculus. Memory effects here manifest themselves in the fact that changes in the efficiency of new technologies and capital productivity do not occur instantly, but with some delay, characterizing a delayed effect. External influence on the system is described using harmonic functions, which give the arrival of investments into the system with some frequency, as well as the arrival of new management technologies.

Methods: The proposed generalized mathematical model, due to nonlinearity, was studied using the Adams-Bashforth-Moulton numerical method from the predictor-corrector family. The numerical algorithm was implemented in the computer algebra environment Matlab; oscillograms and phase trajectories were constructed for various values of the parameters of the mathematical model, as well as functions of the accumulation rate on efficiency.

Results: It is shown that a dynamic system can have chaotic and regular modes. It is very important that in most cases regular regimes represent limit cycles on the phase plane that can be compared with economic cycles. The presence of memory effects in the dynamic system under consideration indicates that reaching limit cycles may take quite a long time.

Concluding Remarks: It should be noted that the numerical ABM method, which was used in the article, can be applied to a more general mathematical model when the orders of fractional derivatives are functions of time.

Keywords: K-waves, numerical modeling, economic cycles and crises, oscillograms, phase trajectories.

Citation: Makarov D.V., Parovik R.I. 2023. Fractional mathematical model S.V. Dubovsky and economic cycles. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52):8-25.

*The work was carried out within the framework of a grant from the President of the Russian Federation №MD-758.2022.1.1.

УДК 519.6

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕДАЧИ КИСЛОРОДА В КОЛОННОМ БИОРЕАКТОРЕ

Кабильджанов А.С.

kabildjanov@yandex.ru

Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»,
100000, Узбекистан, Ташкент, ул. Кари Ниязий 39.

Рассмотрен метод определения объемного коэффициента массопередачи кислорода в прямоточном колонном биореакторе, основанный на анализе первого момента кривой отклика на ступенчатое возмущение и использовании диффузионной модели по газовой и квазижидкой фазе. Приводятся результаты вычислительного эксперимента определения объемного коэффициента массопередачи кислорода в среде пакета MATLAB 2023. Осуществлена оценка степени адекватности математической модели прямоточного колонного биореактора для установившегося режима работы при найденном объемном коэффициенте массопередачи кислорода.

Ключевые слова: биотехнологические процессы, диффузионная модель, объемный коэффициент массопередачи, первый момент, коэффициент параметрической чувствительности, минимизация.

Цитирование: *Кабильджанов А.С.* Алгоритмизация параметрической идентификации модели массопередачи кислорода в колонном биореакторе // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 26-36.

1 Введение

Широкое распространение в микробиологической промышленности получили аэробные процессы микробиологического синтеза, осуществляемые в прямоточных колонных биореакторах [1–3]. Структурная схема потоков в прямоточном колонном биореакторе приведена на рис. 1. Жидкой фазой, поступающей на вход биореактора, является питательный субстрат, а газовой фазой-воздух, содержащий газообразный кислород. В биореакторе находятся квазижидкая фаза, содержащая питательный субстрат, продукты микробиологического синтеза и одноклеточные микроорганизмы, а также газовая фаза-воздух в диспергированном виде. Между квазижидкой и газовой фазами происходит массообмен, на который влияет гидродинамическая обстановка в биореакторе. Так, часть кислорода из газовой фазы абсорбирует в жидкую, а некоторые продукты метаболизма (например, углекислый газ) десорбируют в газовую фазу и вместе с ней выводятся из биореактора.

Вместе с гидродинамикой, массообменные процессы составляют часть макрокинетического уровня биореактора. Определение оптимальных режимов и управление работой биореактора предусматривает наличие математической модели, описывающей процессы, происходящие, в том числе, и на макрокинетическом уровне его функционирования [4–6].

Одной из задач, возникающих при построении модели макрокинетики биореактора применительно к аэробным биотехнологическим процессам, является определение объемного коэффициента массопередачи кислорода в жидкость по экспериментальным данным.

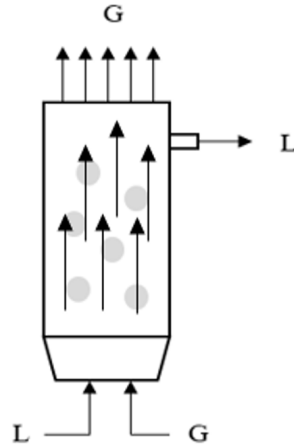


Рис. 1 Схема прямого колонного биореактора L - жидкая фаза; G - газовая фаза

2 Постановка задачи

Наиболее полно гидродинамику прямого колонного биореактора описывает диффузионная модель [4, 5]. Применительно к двухфазной системе «газ-жидкость» с учетом гидродинамики, абсорбции кислорода и скорости потребления растворенного кислорода микроорганизмами диффузионная модель для газовой и жидкой фаз биореактора имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}_G}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 \bar{C}_G}{\partial Z^2} - \frac{\partial \bar{C}_G}{\partial Z} - a_2 (\bar{C}_G - \bar{C}_L) \\ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{C}_L}{\partial t} &= a_3 \frac{\partial^2 \bar{C}_L}{\partial Z^2} + a_4 \frac{\partial \bar{C}_L}{\partial Z} + a_5 (\bar{C}_G - \bar{C}_L) - a_6 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $a_1 = \frac{D_G}{W_G L}$, $a_2 = \frac{k_L a L}{\varphi_G W_G \Psi}$, $a_3 = \frac{D_L}{W_L L}$, $a_4 = -1$, $a_5 = \frac{k_L a L}{W_L \varphi_L}$, $a_6 = q_{O_2}^* x \Psi L / W_L C_G^0$, $\alpha = W_L / W_G$, $Z = z / L$, $\bar{C}_L = \frac{C_L \Psi}{C_G^0}$, $\bar{C}_G = \frac{C_G}{C_G^0}$, $t = \beta \tau$ - безразмерные величины; C_G, C_L - концентрации кислорода в газовой и жидкой фазах; D - коэффициенты осевой диффузии; Ψ - константа фазового равновесия; L - высота биореактора; W - скорость потока; φ - содержание фазы в биореакторе; $q_{O_2}^* x$ - потребление кислорода микроорганизмами; z - осевая координата; $\beta = W_G / L$ - время пребывания газа; τ - время, с; G, L - индексы, относящиеся к газовой и жидкой фазам соответственно; C^0 - концентрация кислорода на входе биореактора.

Граничные и начальные условия для прямого движения фаз в колонном биореакторе имеют вид:

- граничные условия

$$\left. \begin{aligned} Z = 0 \quad & \bar{C}_L(0, t) = \bar{C}_L^0 + a_3 \frac{d\bar{C}_L}{dZ} \\ & \bar{C}_G(0, t) = 1 + a_1 \frac{d\bar{C}_G}{dZ} \\ Z = 1 \quad & \frac{d\bar{C}_L(1, t)}{dZ} = \frac{d\bar{C}_G(1, t)}{dZ} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

- начальные условия

$$\bar{C}_G(Z, 0) = \bar{C}_L(Z, 0) = 0. \quad (3)$$

Концентрация кислорода в жидкой фазе на входе биореактора принимается равной нулю.

Уравнения, описывающие динамику кислородного датчика, используемого для определения концентрации кислорода в биореакторе, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{C}_{DF}}{dt} &= \frac{\bar{C}_L(Z, t) - \bar{C}_{DF}}{\beta\tau_{DF}} \\ \frac{d\bar{C}_{EM}}{dt} &= \frac{\bar{C}_{DF} - \bar{C}_{EM}}{\beta\tau_{EM}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\bar{C}_{DF}(0) = \bar{C}_{EM}(0) = 0, \quad (5)$$

где $\bar{C}_{DF} = \frac{C_{DF}}{C_G^0}$; $\bar{C}_{EM} = \frac{C_{EM}}{C_G^0}$; C_{DF} - концентрация кислорода в диффузионной пленке датчика; C_{EM} - концентрация кислорода в мембране датчика; τ_{EM} - запаздывание, вызванное мембраной датчика; τ_{DF} - запаздывание, вызванное диффузионной пленкой датчика.

Метод определения $k_L a$ может быть основан на анализе первого момента кривой отклика на ступенчатое возмущение.

Первый момент кривой отклика модели (1) определяется путем использования преобразования Лапласа и, затем, дифференцирования относительно комплексного переменного s . Определение $k_L a$ сводится к решению задачи

$$F(k_L a) = (\mu_1^{\exists} - \mu_1^T(k_L a))^2 \rightarrow \min_{k_L a \in \Omega}, \quad (6)$$

где μ_1^{\exists} - первый момент экспериментальной кривой отклика; $\mu_1^T(k_L a)$ - первый момент кривой отклика теоретической модели; $\Omega = \{k_L a \in R \mid k_L a_{\min} \leq k_L a \leq k_L a_{\max}\}$ - множество допустимых решений.

3 Метод решения

Применив преобразование Лапласа к модели (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{d^2 \bar{C}_G}{dZ^2} - \frac{d\bar{C}_G}{dZ} - (a_2 + s)\bar{C}_G + a_2 \bar{C}_L &= 0 \\ \alpha a_3 \frac{d^2 \bar{C}_L}{dZ^2} - \alpha \frac{d\bar{C}_L}{dZ} - (\alpha a_5 + s)\bar{C}_L + \alpha a_5 \bar{C}_G - \alpha a_6 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где s - переменная Лапласа.

Общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (7) с граничными (2) условиями может быть получено в виде суммы общего решения однородной системы дифференциальных уравнений ($\alpha a_6 = 0$) и частного решения

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_G &= \bar{C}_{GO} + \bar{C}_G \\ \bar{C}_L &= \bar{C}_{LO} + \bar{C}_L \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где индексы «о» и «ч» означают общее и частное решение неоднородной (индекс н) системы дифференциальных уравнений.

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{GO} &= \sum_{i=1}^4 A_i e^{\lambda_i Z} \\ \bar{C}_{LO} &= \sum_{i=1}^4 B_i e^{\lambda_i Z} \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где λ_i - корни характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} a_1\lambda_i^2 - \lambda_i - (a_2 + s) & a_2 \\ \alpha a_5 & \alpha a_3\lambda_i^2 - \alpha\lambda_i - (\alpha a_5 + s) \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Используя граничные условия (2), можно получить константы интегрирования $A_i, B_i; i = \overline{1, 4}$ из решения системы уравнений

$$Hb - \theta = 0, \quad (11)$$

где

$$H = \begin{bmatrix} M_1(1 - a_1\lambda_1) & M_2(1 - a_1\lambda_2) & M_3(1 - a_1\lambda_3) & M_4(1 - a_1\lambda_4) \\ 1 - a_3\lambda_1 & 1 - a_3\lambda_2 & 1 - a_3\lambda_3 & 1 - a_3\lambda_4 \\ \lambda_1 M_1 e^{\lambda_1} & \lambda_2 M_2 e^{\lambda_2} & \lambda_3 M_3 e^{\lambda_3} & \lambda_4 M_4 e^{\lambda_4} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1} & \lambda_2 e^{\lambda_2} & \lambda_3 e^{\lambda_3} & \lambda_4 e^{\lambda_4} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}; \quad \theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_i = \frac{A_i}{B_i} = \frac{\alpha a_5 + s + \alpha\lambda_i - \alpha a_3\lambda_i^2}{\alpha a_5}; \quad i = \overline{1, 4}.$$

При определении частного решения $\bar{C}_{GЧ}$ и $\bar{C}_{LЧ}$ использовался метод исключения неизвестных [7]. Из первого уравнения системы (7) определялись выражения для $\bar{C}_L, \frac{d\bar{C}_L}{dZ}, \frac{d^2\bar{C}_L}{dZ^2}$

$$\bar{C}_L = -\frac{a_1}{a_2} \frac{d^2\bar{C}_G}{dZ^2} + \frac{1}{a_2} \frac{d\bar{C}_G}{dZ} + \frac{(a_2 + s)}{a_2} \bar{C}_G; \quad (12)$$

$$\frac{d\bar{C}_L}{dZ} = -\frac{a_1}{a_2} \frac{d^3\bar{C}_G}{dZ^3} + \frac{1}{a_2} \frac{d^2\bar{C}_G}{dZ^2} + \frac{(a_2 + s)}{a_2} \frac{d\bar{C}_G}{dZ}; \quad (13)$$

$$\frac{d^2\bar{C}_L}{dZ^2} = -\frac{a_1}{a_2} \frac{d^4\bar{C}_G}{dZ^4} + \frac{1}{a_2} \frac{d^3\bar{C}_G}{dZ^3} + \frac{(a_2 + s)}{a_2} \frac{d^2\bar{C}_G}{dZ^2}, \quad (14)$$

которые подставлялись во второе уравнение системы (7). После преобразований окончательно было получено дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$-\alpha a_1 a_3 \frac{d^4\bar{C}_G}{dZ^4} + \alpha(a_1 + a_3) \frac{d^3\bar{C}_G}{dZ^3} + (\alpha a_2 a_3 + \alpha a_3 s - \alpha + \alpha a_1 a_5 + a_1 s) \frac{d^2\bar{C}_G}{dZ^2} -$$

$$-(\alpha a_2 + \alpha s + \alpha a_5 + s) \frac{d\bar{C}_G}{dZ} - (\alpha a_5 s + a_2 s - s^2) \bar{C}_G = \alpha a_2 a_6. \quad (15)$$

Подставив $s = 0$ в уравнение (15), можно записать

$$-a_1 a_3 \frac{d^4\bar{C}_G}{dZ^4} + (a_1 + a_3) \frac{d^3\bar{C}_G}{dZ^3} + (a_2 a_3 - 1 + a_1 a_5) \frac{d^2\bar{C}_G}{dZ^2} - (a_2 + a_5) \frac{d\bar{C}_G}{dZ} = a_2 a_6. \quad (16)$$

Частное решение $\bar{C}_{GЧ}$ определялось методом подбора правой части исходного неоднородного линейного дифференциального уравнения. Так как в правой части уравнения стоит константа, подбор производился в виде $\bar{C}_{GЧ} = A$.

Находились производные $\frac{d^4\bar{C}_{Gч}}{dZ^4} = 0$, $\frac{d^3\bar{C}_{Gч}}{dZ^3} = 0$, $\frac{d^2\bar{C}_{Gч}}{dZ^2} = 0$, которые подставлялись в уравнение (16), в результате чего было получено

$$d\bar{C}_{Gч} = -\frac{a_2 a_6}{a_2 + a_5} dZ \Big|_{s=0}. \quad (17)$$

Интегрируя обе части уравнения (17), получили частное решение для концентрации кислорода в газовой фазе

$$\bar{C}_{Gч} = -\frac{a_2 a_6 Z}{a_2 + a_5} \Big|_{s=0}. \quad (18)$$

Подставляя уравнения (17) и (18) в уравнение (12), находим частное решение для концентрации кислорода в жидкой фазе

$$\bar{C}_{Lч} = -\frac{a_6}{a_2 + a_5} - \frac{a_2 a_6 Z}{a_2 + a_5} \Big|_{s=0}. \quad (19)$$

Таким образом, неоднородная система дифференциальных уравнений ($\alpha a_6 \neq 0$) при $s = 0$ имеет общее решение вида:

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_G &= \sum_{i=1}^4 A_i e^{\lambda_i Z} - A_5 \\ \bar{C}_L &= \sum_{i=1}^4 B_i e^{\lambda_i Z} - B_5 - B_6 \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

где $A_5 = \frac{a_2 a_6 Z}{a_2 + a_5}$; $B_5 = \frac{a_2 a_6 Z}{a_2 + a_5}$; $B_6 = \frac{a_6}{a_2 + a_5}$.

Применительно к кислородному датчику можно записать

$$\bar{C}_{EM}(Z, s) = \frac{\bar{C}_L(Z, s)}{(1 + \beta\tau_{EM}s)(1 + \beta\tau_{DF}s)} = h(s)\bar{C}_L(Z, s), \quad (21)$$

где $h(s)$ - изображение переходной функции.

Первый момент определяется по формуле

$$\mu_1^T = \frac{d\bar{C}_{EM}(Z, s)}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (22)$$

Исходя из (20) и (21) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mu_1^T &= - \left[\frac{dh(s)}{ds} \left(\sum_{i=1}^4 B_i e^{\lambda_i Z} - B_5 - B_6 \right) + \right. \\ &\left. + h(s) \sum_{i=1}^4 \frac{dB_i}{ds} e^{\lambda_i Z} + h(s) \sum_{i=1}^4 B_i Z e^{\lambda_i Z} \frac{d\lambda_i}{ds} \right] \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Функция $\bar{C}_{EM}(Z, s)$ является неявной из-за наличия членов $\frac{dB_i}{ds} \Big|_{s=0}$ и $\frac{d\lambda_i}{ds} \Big|_{s=0}$.

Коэффициентом параметрической чувствительности называется величина, определяемая выражением [8]

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{dx_s(p)}{dp} = \frac{dx_s}{dp} \Big|_{p=0} = - \left[\frac{\partial f(x_s, p)}{\partial x} \right]^{-1} \Big|_{p=0} \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_{p=0} \quad (24)$$

где $x_s(p)$ - решение некоторого уравнения $f(x, p) = 0$; f, x - вектора; p - скаляр.

Применив (24) к уравнениям (9) и (20), получим

$$\left. \frac{d\lambda_i}{ds} \right|_{s=0} = \frac{(a_1 + \alpha a_3)\lambda_i(0)^2 - (1 + \alpha)\lambda_i(0) - (a_2 + \alpha a_5)}{\alpha [4a_1 a_3 \lambda_i(0)^3 - 3(a_1 + a_3)\lambda_i(0)^2 + 2(1 - a_2 a_3 - a_1 a_5)\lambda_i(0) + a_2 + a_5]}, \quad (25)$$

где $\lambda_i(0)$ - решение уравнения (9) при $s = 0$.

Опираясь на уравнения (20) и (24), можно записать

$$\left. \frac{db}{ds} \right|_{s=0} = -H^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \frac{\partial Hb}{\partial M_i} \frac{dM_i}{ds} + \frac{\partial Hb}{\partial \lambda_i} \frac{d\lambda_i}{ds} \right], \quad (26)$$

где

$$\left. \frac{\partial Hb}{\partial M_i} \right|_{s=0} = \begin{bmatrix} (1 - a_1 \lambda_i) B_i \\ 0 \\ \lambda_i e^{\lambda_i} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{s=0}, \quad \left. \frac{\partial Hb}{\partial \lambda_i} \right|_{s=0} = \begin{bmatrix} -M_i a_1 B_i \\ -a_3 B_i \\ (1 + \lambda_i) M_i e^{\lambda_i} B_i \\ (1 + \lambda_i) e^{\lambda_i} B_i \end{bmatrix} \Big|_{s=0},$$

$$\left. \frac{dM_i}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{\alpha a_1} \left[1 + \alpha(1 - 2a_3 \lambda_i) \frac{d\lambda_i}{ds} \right] \Big|_{s=0}. \quad (27)$$

Уравнение (21) приводит к выражению

$$\left. \frac{dh(s)}{ds} \right|_{s=0} = -\beta(\tau_{EM} + \tau_{DF}). \quad (28)$$

Основываясь на уравнениях (23), (25) - (28) можно получить первый момент теоретической функции отклика.

Экспериментальное значение первого момента определяется из выражения

$$\mu_1^- = \int_0^{\infty} (\bar{C}_{EM}^{\infty} - \bar{C}_{EM}) dt, \quad (29)$$

где \bar{C}_{EM}^{∞} - значение концентрации кислорода в мембране датчика в стационарном состоянии.

4 Алгоритмизация и программная реализация

Блок-схема алгоритма решения задачи (6) приведена на рис. 2.

Решение задачи определения объемного коэффициента массопередачи кислорода в прямоточном колонном биореакторе в соответствии с описанной методикой осуществлялось на компьютере с процессором Intel 12th Gen Intel(R) Core(TM) i9-12900K, 3187 МГц и оперативной памятью объемом 32,00 ГБ.

Программная реализация алгоритма определения значения $k_L a$ осуществлялась в среде MATLAB 2021b.

Определение корней λ_i ; $i = \overline{1, 4}$ характеристического уравнения (10) осуществлялось с использованием встроенной функции `roots`. Константы интегрирования B_i ; $i = \overline{1, 4}$ определялись из решения системы уравнений (11) при помощи функции `linsolve` [9]. Решение задачи (6) осуществлялось методом «золотого сечения» с заданной точностью [10].

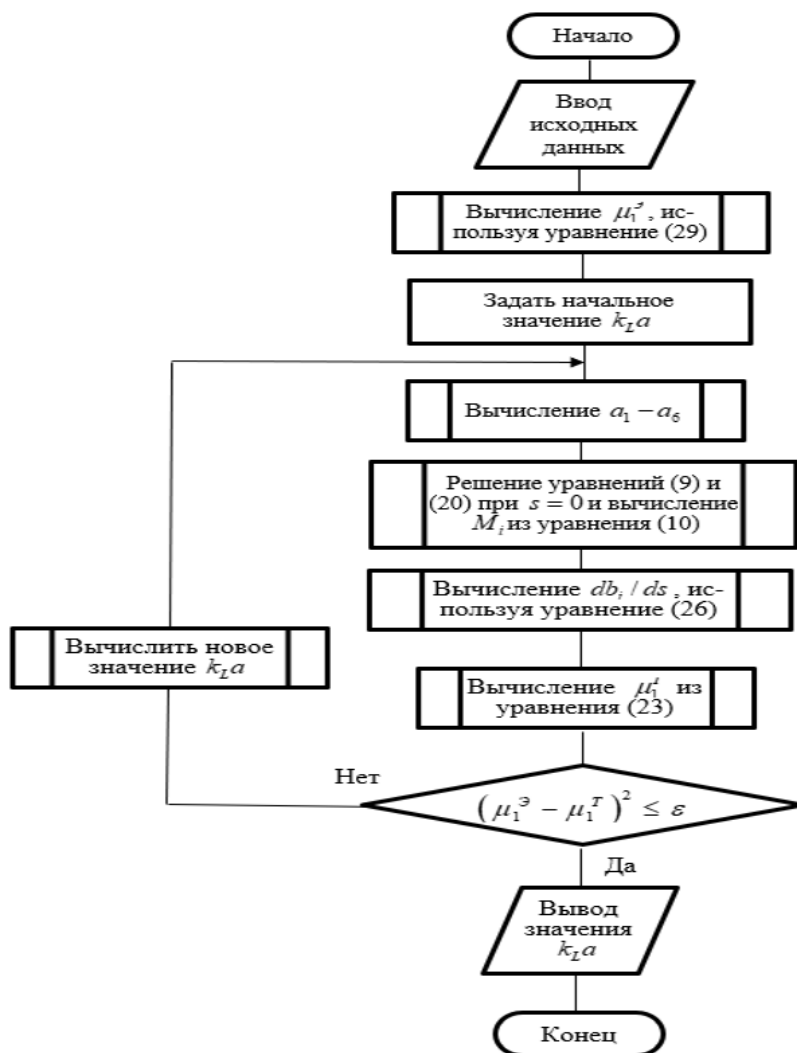


Рис. 2 Блок-схема алгоритма определения значения $k_L a$

Исходные параметры и результаты решения задачи (6) при точности решения $\varepsilon = 0.0001$ приведены в таблице 13 и рисунке 3.

Проверка адекватности диффузионной модели (1) при $k_L a = 0.04835\text{c}^{-1}$ осуществлялась для установившегося режима работы биореактора $\left(\frac{\partial \bar{C}_G}{\partial t} = 0; \frac{\partial \bar{C}_L}{\partial t} = 0\right)$ при выполнении условия, что концентрация растворенного кислорода превышает критическое значение для культивируемых микроорганизмов. При этом, с учетом результатов, приведенных в таблице 1, система уравнений (1) переписывается следующим образом

$$\left. \begin{aligned} 0.06 \frac{\partial^2 \bar{C}_G}{\partial Z^2} - \frac{\partial \bar{C}_G}{\partial Z} - 0.4884(\bar{C}_G - \bar{C}_L) &= 0 \\ 0.3462 \frac{\partial^2 \bar{C}_L}{\partial Z^2} - \frac{\partial \bar{C}_L}{\partial Z} + 10.3308(\bar{C}_G - \bar{C}_L) - 5.641 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (30)$$

Программная реализация модели (30) осуществлялась в среде MATLAB 2021b с использованием расширения SIMULINK [11, 12]. Схема моделирования приведена на рисунке 4. Полученные в ходе моделирования результаты приведены на рисунке 5.

Таблица 1 Исходные параметры и результаты решения задачи (6)

Исходные данные	Результаты
$W_G = 0.15$ м/с	$\alpha = 0.1733$
$W_L = 0.026$ м/с	$\beta = 0.03$ с ⁻¹
$D_G = 0.04$ м ² / с	$a_1 = 0.060$
$D_L = 0.04$ м ² / с	$a_2 = 0.4884$
$L = 5$ м	$a_3 = 0.3462$
$\varphi_G = 0.1$	$a_4 = -1$
$\varphi_L = 0.9$	$a_5 = 10.3308$
$\Psi = 0.33$	$a_6 = 5.6410$
$q_{O_2}^* x = 30$ ммоль O_2 / л·ч	$\lambda = [0 \ 17.2050 \ 6.8019 \ -4.4513]$
$C_G^0 = 9.375$ ммоль / л	$A = [-0.9549 \ 0.0000 \ 0.0000 \ -0.0356]$
$Z = 0.5$	$B = [-0.954 \ 0.0000 \ 0.0000 \ 0.3758]$
$\tau_{EM} = 3.6$	$B5 = -0.1273$
$\tau_{DF} = 0.46$ с	$B6 = -0.5214$
$\mu_1^3 = 1.198$	$\mu_1^T = 1.198$
$k_L a_{\min} = 0.01$ с ⁻¹	$F = 1.296e-09$
$k_L a_{\max} = 0.1$ с ⁻¹	$k_L a = 0.04835$ с ⁻¹

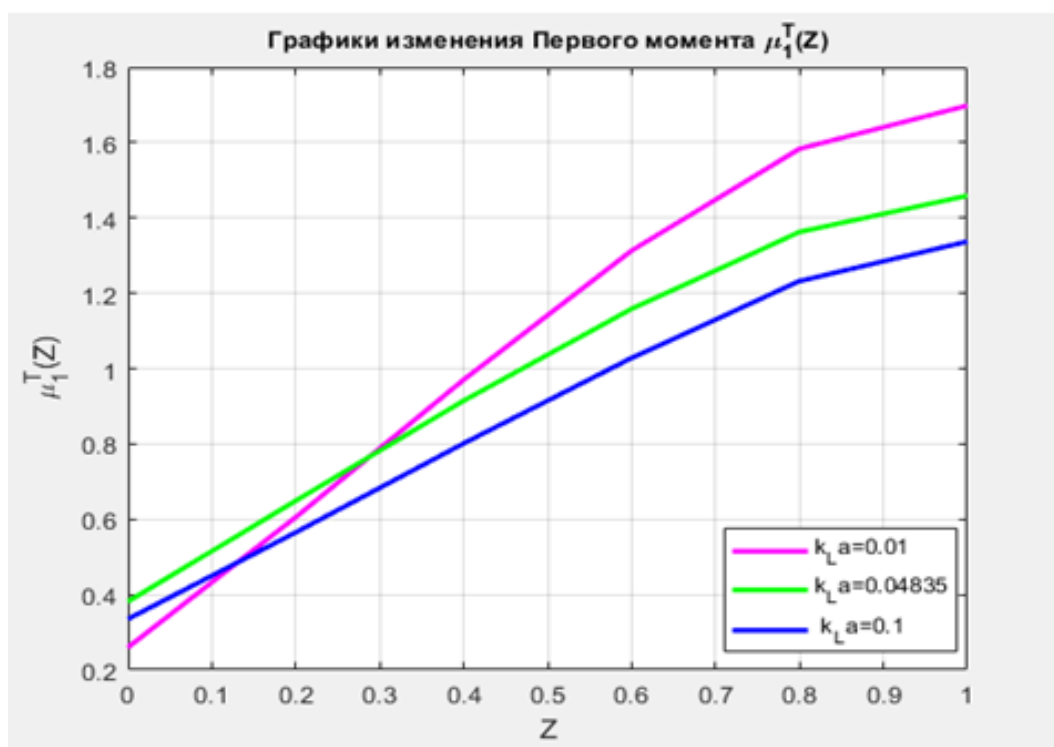


Рис. 3 Графики изменения первого момента по высоте биореактора

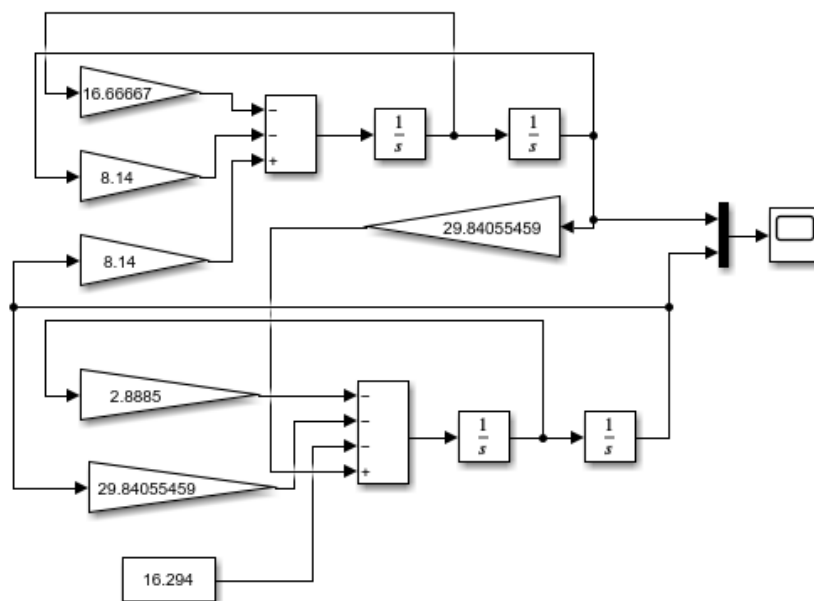


Рис. 4 Схема моделирования процесса абсорбции кислорода в установившемся режиме биореактора

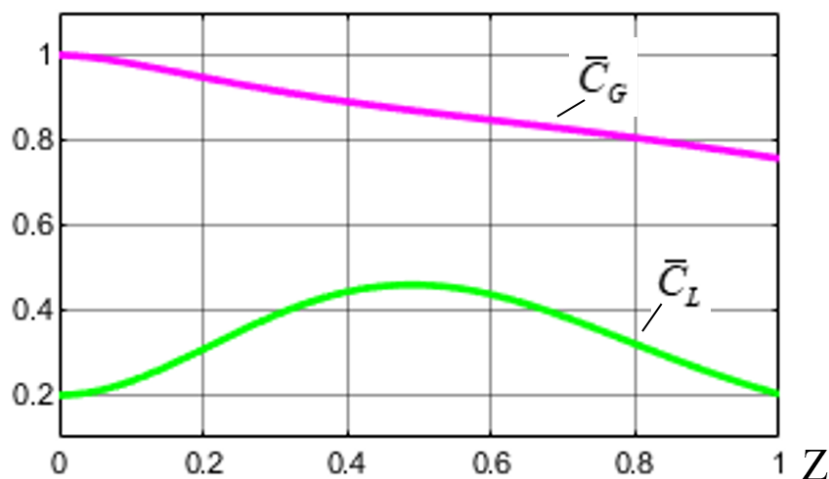


Рис. 5 Графики изменения концентрации кислорода в газовой и жидкой фазах по высоте биореактора

Полученные в ходе визуального моделирования результаты сравнивались с экспериментальными данными по среднеквадратическому отклонению

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{C}_{Li}^{\mathcal{E}} - \bar{C}_{Li}^M)^2}$$
, где N - объем выборки экспериментальных и расчетных данных; \mathcal{E} , M - индексы, обозначающие экспериментальные и расчетные данные, соответственно. Применительно к серии натуральных и вычислительных экспериментов среднее значение среднеквадратического отклонения составило 0.0143, что находится в пределах погрешности измерения прибора ($\pm 3.5\%$).

5 Заключение

Адекватность математической модели процесса массообмена по кислороду в колонном прямоточном биореакторе с найденным по описанной методике объемным коэффициентом массопередачи кислорода подтверждена серией натуральных и вычислительных экспериментов. Среднеквадратическое отклонение модельных результатов от экспериментальных данных не превысило пределы заданной погрешности измерительного прибора 3,5%. Таким образом, можно сделать вывод, что описанный выше алгоритм и его программная реализация позволяют эффективно решать задачу определения значения объемного коэффициента массопередачи кислорода в колонных биореакторах.

Литература

- [1] *Волова Т.Г.* Биотехнология Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения Российской Академии наук, – 1999. – 252 с.
- [2] *Винаров А.Ю., Гордеев Л.С., Кухаренко А.А., Панфилов В.И.* Процессы и аппараты биотехнологии: ферментационные аппараты: учебное пособие для вузов под редакцией В.А. Быкова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Издательство Юрайт, – 2019. – 274 с.
- [3] *Джайбиба П., Нага Вигнеш С., Харихаран С.* Принцип работы типовых биореакторов // Биореакторы, – С. 145–173. DOI: 10.1016/b978-0-12-821264-6.00010-3
- [4] *Кафаров В.В., Винаров Ф.Ю., Гордеев Л.С.* Моделирование биохимических реакторов М.: Лесная промышленность, – 1979. – 344 с.
- [5] *Бирюков В.В.* Основы промышленной биотехнологии М.: КолосС, – 2004. – 296 с.
- [6] *Дворецкий Д.С., Дворецкий С.И., Муратова Е.И., А.А. Ермаков А.А.* Компьютерное моделирование биотехнологических процессов и систем Учеб. Пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, – 2005. – 80 с.
- [7] *Сандаков Е.Б., Гордеев Ю.Н.* Методы решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. М.: НИЯУ МИФИ, – 2013. – 64 с.
- [8] *Shioya S., Dunn I.J.* A dynamic oxygen transfer coefficient measurement method for column reactors, «Chem. Entg. Sci.», 33, – №11, – 1978. – P. 1529–1534.
- [9] *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* Основы специальной силовой подготовки в спорте., MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. - СПб.: БХВ-Петербург, – 2005. – 1104 с.
- [10] *Прокопенко Н.Ю.* Методы оптимизации учеб. пособие /Н.Ю. Прокопенко; Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун-т. - Н. Новгород: ННГАСУ, – 2018. – 118 с.
- [11] *Кабильджанов А.С.* Компьютерное моделирование систем управления, Учебное пособие. Ташкент. Национальный исследовательский университет «ТИИИМСХ», – 2023. – 238 с.
- [12] *Черных И.В.* Simulink Инструмент моделирования динамических систем – 2003. Формат: doc. – 252 с. <https://booksee.org/book/625563>

Поступила в редакцию 12.10.2023

UDC 519.6

ALGORITHMIZATION OF PARAMETRIC IDENTIFICATION OF THE MODEL OF OXYGEN MASS TRANSFER IN A COLUMNED BIOREACTOR

Kabildjanov A.S.

kabildjanov@yandex.ru

“Tashkent institute of irrigation and agricultural
mechanization engineers” National Research University,
39 Kori Niyoziy str., 100000, Tashkent, Uzbekistan.

A method for determining the volumetric oxygen mass transfer coefficient in a once-through column bioreactor based on the analysis of the first moment of the response curve to a stepwise perturbation and the use of a diffusion model for the gas and quasiliquid phases is considered. The results of a computational experiment for determining the volumetric mass transfer coefficient of oxygen in the environment of the MATLAB 2023 package are presented. The degree of adequacy of the mathematical model of a once-through column bioreactor for the steady-state operation mode with the found volumetric oxygen mass transfer coefficient has been assessed.

Keywords: biotechnological processes, diffusion model, volumetric mass transfer coefficient, first moment, parametric sensitivity coefficient, minimization.

Citation: Kabildjanov A.S. 2023. Algorithmization of parametric identification of the model of oxygen mass transfer in a columned bioreactor. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52): 26-36.

УДК 532.546+519.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ФЛЮИДОВ В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ

Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э., Зиядуллаева Ш.С.

sherzodbekjonov@gmail.com

Ташкентский государственный технический университет,
100095, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 2А.

Работа посвящена к построение математической модели и разработки алгоритмов решения процесса нелинейной фильтрации структурированных флюидов в слоистых связанных средах. Изучена динамика изменения давления в пластах и количество перетоков между слоями в зависимости от характеристики пласта и флюида. Разработаны численные алгоритмы на основе потокового варианта разностных уравнений для проведения вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: поток, пористая среда, многослойность, структурированность, модель, алгоритм, численное решение.

Цитирование: *Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э., Зиядуллаева Ш.С.* Математическая модель задачи фильтрации структурированных флюидов в трехслойном пласте // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 37-43.

1 Введение

Процесс фильтрации в многопластовых слоистых средах имеет определенные истории [1–3], и требует тщательного изучения. Эти работы в основном посвящены к процессу движение ньютоновских флюидов как для однофазных, так и многофазных случаев. Пористые среды, которые содержат в себе флюидов, имеющие различные линейные и нелинейные характеристики в основном изучаются математическими моделированием, описывающие процесс изменение состояние движущихся флюидов и влияние их, на структуры сплошной среды.

Обычно реальные пористые среды рассматриваются как многослойные и они состоять из изолированных (гидродинамический несвязанных), и неизолированных (связанных) сред. Гидродинамически связанные среды обычно моделирует как многослойные, где могут происходить взаимные перетоки между соседними пластами. В процессе разработки многослойных месторождений величины перетоков между пластами влияют на объемы добычи извлекаемых флюидов. Если пласты не связанные, то перетоки между пластами не происходит, а связь между ними происходит по стволу вертикальной скважины. Когда в этих пластах, начальное пластовое давление резко отличается, то в стволе скважины могут происходить, перераспределение, доли величины дебитов, идущих от этих слоев. Следовательно, математические модели процесса фильтрации в многослойных пластах могут быть различными и каждый из построенных новых моделей имеет своего назначения в научной литературе. Существует, различные способы, моделирование этих пластов и они описаны в работах [1–4]. Модели в этих работах построенные для ньютоновских флюидов отличаются друг от друга тем, что, фильтрации вследствие характеристики пористой среды и движущего в нем флюида, сильно отличаются в каждом слое, по отношению к соседнем другим пластам. Процесс фильтрации нефти и газа относящейся к

ньютоновским и неньютоновским типам в многопластовых системах изучена и работах [5–8]. Существует ещё многочисленные работы, обзор которых можно найти в работах [7–12], изучающие процесса фильтрации флюидов подчиняющейся различным законам и исследующие разные аспекты построение математических моделей и методов их решения.

2 Постановка задачи

Рассмотрим слоистый (трехслойный) пласт состоящей из хорошо проницаемого (область Ω_2), соседствующие (снизу и сверху) плохо проницаемыми пластами (области Ω_1 и Ω_3). Предполагается, что в области Ω_2 горизонтальной характеристики пласта, преобладает на несколько порядков чем вертикальные, а в соседних верхних и нижних пластах они имеет обратные характеристики, которые позволяет считать, что в области Ω_2 движение флюида происходит по горизонтали а в других областях Ω_1 и Ω_3 по вертикали. Допустим что в области Ω_2 имеется нелинейные структурированный флюид [12, 13] а в соседних областях Ω_1 и Ω_3 ньютоновский неструктурированный флюид.

Задачу можно математически моделировать так: необходимо найти непрерывные функции $U_i(x, z, t)$ ($i = 1, 3$) и $U_2(x, t)$ а также неизвестные границы подвижных зон $R_1(x, t)$ и $R_2(x, t)$ из следующей системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_e (|\nabla U_2|, \beta_e) \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + \varphi_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - \varphi_2 \frac{\partial U_3}{\partial z} \Big|_{z=h_2} = \\ = M_e \frac{\partial U_2}{\partial z}, \quad x \in \Omega_2, \quad z \in (\Omega_1; \Omega_2), \quad t > 0, \quad e = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_{2\gamma-1}(z) \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial z} \right) = M_{2\gamma-1} \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial t}, \quad z \in (\Omega_1, \Omega_2); \quad \gamma = \overline{1, 2}; \quad t > 0, \quad (2)$$

с начальными

$$U_2(x, 0) = U_0(x), \quad U_{2\gamma-1}(x, z, 0) = U_0(x, z), \quad (\gamma = \overline{1, 2}), \quad (3)$$

и граничными

$$a_1 \chi_1 (|\nabla U_2|, \beta_1) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \psi_0(t), \quad (4)$$

$$a_2 \chi_1 (|\nabla U_2|, \beta_3) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \psi_1(t), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} a_0 \varphi_1(z) \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad a_3 \varphi_3(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=H_3} = 0, \\ x \in [x_0, L] \qquad \qquad \qquad x \in [x_0, L] \end{aligned} \quad (6)$$

а также условиями на границах зон:

$$\chi_1 (|\nabla U_2|, \beta_1) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_1-0} = \chi_2 (|\nabla U_2|, \beta_2) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_1+0}, \quad (7)$$

$$\chi_2 (|\nabla U_2|, \beta_2) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_2-0} = \chi_3 (|\nabla U_2|, \beta_3) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_2+0}, \quad (8)$$

$$U_2(x, z, t) \Big|_{x=R_e-0} = U_2(x, z, t) \Big|_{x=R_e+0}, \quad e = \overline{1, 2}; \quad (9)$$

где функция

$$\begin{aligned} \chi_e (|\nabla U_2|, \beta_e) = \{ k_2 / \mu_2 (1 - \beta_2 \gamma_0 / |\nabla U_2|), \quad x \in (x_0; R_1 - 0); \\ (k_2 \cdot |\nabla U_2|) / (\mu_2 (\beta_2 + |\nabla U_2|)), \quad x \in (R_1 + 0; R_2 - 0); k_2 / \mu_3, \quad x \in (R_2 + 0; L) \} \end{aligned}$$

описывает закон фильтрации структурированных флюидов, соответственно для тех трех зон соответственно

a_i ($i = \overline{0,4}$) параметры соответствующие к размерности уравнений,

$$\varphi_{2\gamma-1}(z) = \overline{\varphi_0}(\beta_{2\gamma-1} + |\nabla U_{2\gamma-1}|) / (\nabla U_{2\gamma-1}), \quad \gamma = \overline{1,2}.$$

Здесь $\varphi_{2\gamma-1}(z)$ функция, содержащие в себе коэффициенты мощности, проницаемости и вязкости флюида для плохо проницаемых пластов [8–13]. При желании его можно рассматривать как гиперболические зависимости. Так как задача (1) - (9) в общем случае является квазинелинейными задачами относящейся к вторыми краевыми задачами уравнения математической физики то аналитическое решение строит почти невозможно.

3 Метод решения

Чтобы построить вычислительные алгоритмы для решения задачи (1) - (9) применяем сначала метод итерации для линеаризации нелинейных членов уравнений. Здесь линеаризованные уравнения (1) - (9) с итерационными параметрами (s) не приводится считая их известными. Далее вводим потоки:

$$W_e = \chi_e(|\nabla U_2|, \beta_e) \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \omega_{2\gamma} = \varphi_{2\gamma-1}(z) \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial z}, \quad (10)$$

и уравнения (1) - (2) примет вид. Тогда задача (1) - (9) примет вид

$$\frac{\partial W_e}{\partial x} + \omega_1|_{z=h_1} - \omega_2|_{z=h_2} = M_e \frac{\partial U_2}{\partial z}, \quad e = \overline{1,3} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \omega_{2\gamma-1}}{\partial z} = M_{2\gamma-1} \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial t}, \quad \gamma = \overline{1,2}; \quad (12)$$

Условие (4) - (8) запишется так

$$a_1 W_1|_{x=x_0} = \psi_0(t), \quad a_2 W_1|_{x=x_l} = \psi_1(t), \quad (13)$$

$$a_0 \omega_1 \left| \begin{array}{l} z = 0 \\ x \in [x_0, L] \end{array} \right. = 0, \quad a_3 \omega_3 \left| \begin{array}{l} z = H_3 \\ x \in [x_0, L] \end{array} \right. = 0 \quad (14)$$

Дальнейшие действия даём в описательном виде:

Интегрируем по x уравнение (11) на интервале $[x_i; x_{i+1}]$ а уравнение (12) на интервале $[z_j; z_{j+1}]$ и одновременно применяем метод прямых по t ($t_\tau = \varkappa \cdot \tau$).

При этом получим систему сеточных разностных уравнений относительно потоков $(\omega_e)_i^k, (\omega_{2\gamma-1})_j^k$ и искомым функций с соответствующими начальными и краевыми, а также граничными условиями относительно потока. Далее полученные поточно разностные краевые задачи решается с применением потокового варианта разностной прогонки [14 - 16].

Прогоночные коэффициенты выводятся с использованием сеточных уравнений и приравниванием балансовых соотношений в основной задаче и поточных разностных выражений полученной из соответствующих уравнений и краевых условий. Построенные алгоритмы позволяет вычислить значение и искомым функций и потока в узлах сеточной области. На границах зон $R_i(t_k)$ используя равенство потоков определяется прогоночные коэффициенты и далее вычисляется подвижные неизвестные

границы этих зон. Необходимо отметить что для улавливание границы подвижных зон, наилучшими методами считается метод «челночных» итераций [16], а при грубых шагах сетки необходимо применять метод изменяющих шагов сетки в определенных окрестностях подвижных границ. Точность вычислительных схем на пределе $O(h^2 + \tau)$.

Ввиду ограничения на объём статью, построенные вычислительные алгоритмы и последовательности их вычислений здесь не приведем.

Построенные вычислительные алгоритмы апробирован при следующих гипотетических данных:

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad \psi_0(t) = 20T/c, \quad \psi_1 = 20T/c, \quad k_1 = k_3 = 0,005, \\ k_2 = 0,15; \quad \mu = \{0,01; 0,1\}; \quad nu = \{0,018; 0,015\}; \quad m_1 = 0,016, \\ m_2 = 0,28, \quad m_3 = 0,016, \quad u_0 = 1. \end{aligned}$$

Отдельные результаты расчета приведены на рис. 1 и 2 где дано кривые изменения давления и функции перетока в верхнем плохо проницаемом пласте. На рисунке 3 дано кривые изменение давление в хорошо проницаемой пласте в гиперболической аппроксимации. В таблице 1 дано изменение давления в хорошо проницаемом области Ω_2 а в таблице 2 приведена величины перетока из перемычки Ω_3 в область Ω_2 .

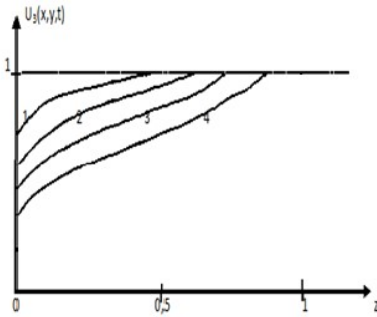


Рис. 1 Кривые изменения давление в перемычке (область Ω_3) для $t = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4\}$ Аналогично и для области Ω_1

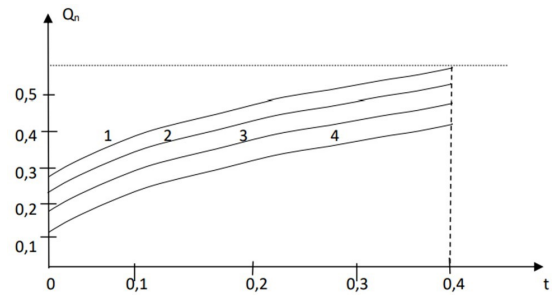


Рис. 2 Кривые изменение функции перетока из области Ω_3 в области Ω_2 при $t = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4\}$ Аналогично и для области Ω_1

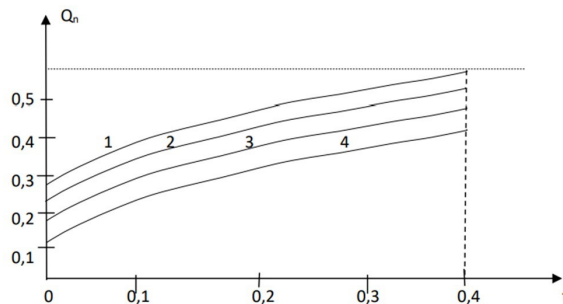


Рис. 3 Кривые изменения темпа уменьшение давление в области Ω_2 .

Таблица 1.

x t	0	0,25	0,5	0,75	1
0,1	0,93023	0,94341	0,96232	0,94342	0,93023
0,15	0,89321	0,90320	0,92651	0,90321	0,89320
0,2	0,85403	0,86451	0,88322	0,86451	0,85402
0,25	0,81630	0,82613	0,84352	0,82612	0,81631
0,3	0,78421	0,79121	0,81821	0,79120	0,78421

Таблица 2.

β t	$\beta = 0$	$\beta = 10^{-4}$	$\beta = 10^{-3}$	$\beta = 10^{-2}$	$\beta = 10^{-1}$
0,01	0,12132	0,11223	0,10112	0,09216	0,07408
0,05	0,18203	0,16312	0,13214	0,11314	0,09832
0,10	0,21203	0,18112	0,16251	0,14251	0,11506
0,15	0,25120	0,22542	0,20431	0,18311	0,14817

4 Заключение

Результаты расчета показывает что при структурированном законе фильтрации в области Ω_2 в зонах с большим градиентом давлений, происходит быстрое увеличение перетоков флюида из области Ω_1 и Ω_3 . А в аномальных других зонах наблюдается уменьшенное количество перетоков. Регулируя, величинами перетока между пластами путем управления продвижением границ зон можно достичь наибольшую отбор из области Ω_2 .

Анализ проведенных численных результатов расчета показало что предложенные математические модели и вычислительные алгоритмы можно использовать для определений геолого - промысловых данных, на этапе проектирование и при разработке реальных месторождений имеющие такие же структурные признаки, как и для флюида так и для пористой среды характеристики как в изложенной исходной задаче.

Литература

- [1] Шелкачев В.Н., Гусейнзаде М.А. Влияние проницаемости кровли и подошвы пласта на движение в нем жидкости. «Нефтяное хозяйство», – 1953. – №12. – С. 15–19.
- [2] Гусейнзаде М.А. Колосовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. М.: «Недра». – 1972. – 312 с.
- [3] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарный фильтрации жидкости и газа. М. : Недра. – 1972. – 288 с.
- [4] Хантуш М.С. Новое в теории перетекания. Сб. Вопросы гидрогеологических расчетов. М. «Мир». – 1964. – С. 25–32.
- [5] Мухидинов Н. Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Ташкент. ФАН. – 1978. – 117 с.
- [6] Филиппов А.И., Зеленова М.А. Некорректность задачи о поле давления в слоисто неоднородном пласте при заданным отборе материалы международной конференции. – 2021. г. Стерлитимак, – С. 118–124.
- [7] Аббасов М.Т., Кулиев А.М. Методы гидродинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Баку, «ЭЛМ», – 1976. – 272 с.

- [8] *Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б.* Математического моделирования структурированных флюидов в связанных пластах. Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механике». Воронеж. – 2020. – С. 934–942.
- [9] *Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б.* Multiparameter mathematical models of the problem of problem of filtration of unstructured and structured fluids. E3S.Web of conferences 264. 01030 – 2021. <https://doi.org/10.1051/t3s/conf/202126401030>.
- [10] *Акилов Ж.А., Джабборов М.С., Хўжасяров Б.Х.* Касательное напряжение при периодическом движении вязкоупругий жидкости в цилиндрической трубе. Известия РАН. МЖГ. – 2021. – №-2. – С. 40–51.
- [11] *Kayumov Sh., Khaitov T.O., Mardonov A.P., Kayumov A.B.* Construction of two-dimensional multiparameter mathematical models of the Problems of the theory of Nonlinear filtration of Fluids. International conference on Actual Problems of Applied Mechanics – APAM. 2021. AIP conf.Prog/2637,040002 (2022).<https://doi.org/10.1063/5.0119121>. Published: Oct.2022.
- [12] *Qayumov Sh., Mardonov A.P., Qayumov A.B., Xaitov T.O.* Mathematical model of filtration of Newtonian and structured fluids in hydrodynamically bonded formations. AIP Conference Proceedings 15 March 2023: 2612 (1): 030009 <https://doi.org/10.1063/5.0118573>.
- [13] *Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О.* Математическое моделирование неньютоновских и структурированных флюидов в многослойной среде. Материалы научной конференции «Актуальные проблемы статического анализа». Ташкент. – 2021. – С. 558–561.
- [14] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М. Наука, – 1977. – 592 с.
- [15] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. Москва «Наука». – 1989. – 484 с.
- [16] *Каюмов Ш.* Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. Ташкент. ТГТУ. – 2017. – 274 с.

Поступила в редакцию 09.10.2023

UDC 532.546+519.6

MATHEMATICAL MODEL OF THE PROBLEM OF FILTRATION OF STRUCTURED FLUIDS IN A THREE-LAYER FORMATION

Kayumov Sh., Bekchanov Sh.E., Ziyadullaeva Sh.S.

sherzodbekjonov@gmail.com

Tashkent State Technical University,

100095, 2A Street University, Tashkent, Uzbekistan.

The work is devoted to the construction of a mathematical model and the development of algorithms for solving the process of nonlinear filtration of structured fluids in layered coupled environment. The dynamics of pressure changes in formations and the number of flows between layers depending on the characteristics of the formation and fluid studied. Numerical algorithms have been developed based on the flow variant of

difference equations for conducting a computational experiment. Computational algorithms have been tested on hypothetical data and the calculation results are presented in the form of a graph and a table expressing the dynamics of pressure curves in the middle formation and bridges, as well as the number of flows from poorly permeable to well permeable formation.

Keywords: flow, porous environment, multi-layering, model, algorithm, numerical solutions.

Citation: Kayumov Sh., Bekchanov Sh.E., Ziyadullaeva Sh.S. 2023. Mathematical model of the problem of filtration of structured fluids in a three-layer formation. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52):37-43.

UDC 519.6

THREE-DEMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF GROUNDWATER LEVEL CHANGES IN IRRIGATED LAND

¹Khabibullayev I., ^{2*}Murodullayev B.T., Khaknazarova D.O.

*bmurodullayev1114@gmail.com

¹Tashkent Financial Institute,
100000, 60A, Amir Temur Str., Tashkent, Uzbekistan;

²Research Institute for the Development of
Digital Technologies and Artificial Intelligence,
100124, 17A, Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan.

The article discusses the issue of creating and solving a numerical model of the filtration process of groundwater interacting with surface water in areas with repeated cropping. Studying this process using mathematical modeling and finding its solution is an urgent task. Before presenting the solution of the article, scientific articles related to mathematical and numerical modeling have been sufficiently studied and analyzed. In the studied aquifer, the values of underground indicators and water level indicators were obtained in relation to the lower horizontal impermeable layer and the mathematical model of gr. The movement of water in aquifers was described by a special derivative nonlinear differential equation of parabolic type. Computational experiments have shown that irrigation water is the main factor that has a significant impact on groundwater levels.

Keywords: groundwater, mathematical model, numerical solution, geofiltration, hydrogeological systems, water level, filtration coefficient, infiltration.

Citation: Khabibullayev I., Murodullayev B.T., Khaknazarova D.O. 2023. Three-dimensional mathematical model of groundwater level changes in irrigated land. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52): 44-55.

1 Introduction

In addition to external factors, additional irrigation water also affects the change in groundwater levels in re-cultivated, that is, irrigated lands. The main tasks of hydrogeology are forecasting the hydrodynamic and hydromechanical regime of groundwater, land development, assessment of reserves and resources of groundwater, and many others. other aspects are closely related elements. is the only geofiltration system. The south of Uzbekistan is an ecologically low-water region, or rather, providing water to certain non-mountainous, relatively warm and flat lands of the Kashkadarya region. n (Kasbi, Mirishkor, Nishon districts) in conditions of acute shortage of water resources. questions are especially relevant. Under these conditions, one of the main sources of water supply to reclaimed lands is groundwater formed as a result of the construction of underground water intake structures. s (drains).

To determine the main indicators and parameters of a groundwater extraction object, a geofiltration process in the underground hydrosphere is designed by conducting numerous prospective experiments using mathematical models. In matters of sustainable development of agriculture, the main goal is to increase crop yields and the quality of products while significantly saving labor and energy resources environmental requirements, etc.

In particular, the irrigation process in the above territories is carried out using almost 85% of groundwater, which in turn has led to a change in the level of groundwater

(the level has dropped significantly), especially in the summer months from the surface layer. the volume of water reaches the water intake level, and the structures receiving water (drainage, water pumps) do not release water. To study the hydrodynamic regime of groundwater and pressure waters and water levels in the forecast of hydrogeological and reclamation conditions, the following methods are mainly used: e, correlation and regression, analytical methods, detection methods, numerical and analogue modeling.

For a comprehensive study, forecasting and management decision-making on the above issues, a number of problems have been solved, the core of which is a mathematical model, a well-thought-out algorithm and software products for conducting computer experiments.

Level of research. In 1856, the French hydraulic engineer A. Darcy was the first to describe the processes of groundwater geofiltration based on mathematical expressions (the law of geofiltration) based on experimental results during leakage in laboratory conditions [1]. Scientific research to justify these laws laid the foundation for scientific research such as the theoretical foundations of groundwater movement and calculations of geofiltration processes. In the scientific works of J. Dupuis, A. Thiem, K. Slichter, K. Theis, G.P. Helmer, M. Masket and Russian scientists N.E. Zhukovsky, N.N. Pavlovsky, S.N. Nikitin, A.F. Lebedov, A.N. Ogelvi, A.A. Krasnopolsky, groundwater is distributed throughout the underground space, such as its presence in aquifers, during filtration and condensation processes, zoning of groundwater, studying the patterns of their occurrence, what is their formation, their rational use, identification and assessment of water reserves, as well as the protection of drinking water resources for those who considered important tasks [2].

A.I.Silina-Bekchurina, N.N.Verigina, N.N.Bindeman, F.M.Bochever, L.S.Syazvin, N.I. Plotnikov, P.Ya.Polubarinova-Kochina, I.K. Gavich in the creation of a method for assessing underground conditions of water reserves, in theoretical, practical and methodological developments in the study of regional hydrogeological systems, the use of groundwater for drinking and use and the organization of piped water supply, analogue, mathematical modeling after the 70s of the 20th century, that is, based on processes of numerical modeling V.M.Shestakova, V.A.Mironenko, V.G.Romanin, G.E. Ershova, A.V. Leksova and others. [3] on hydrogeological conditions - issues such as justification and prediction of conditions quickly developed the theory of hydrogeological calculations.

To increase the yield in the regions due to repeated harvesting and providing the population with food, excess water is needed O. Klange, N.V. Rogovskaya, N.I. Tolstikhin, P.F. Shvedsov, A. Movchinnikova in solving specific practical problems - field works, cross-country studies, hydrogeological excavations. , groundwater and groundwater, experimental filtration work, observations of regime-forming elements of the underground hydrosphere, desk processing of laboratory and field work, hydromethods of geochemical analysis, statistical analysis and mathematical modeling [4, 5].

In the studies of N. Ravshanov, U. Umarov, I. Khabibullaev, R. Usmanov, the absorption or infiltration of irrigation water and precipitation in vadose areas find underground groundwater evaporation, a constant groundwater level using lysometric methods, such as [6].

In the regions of Central Asia, the study of the state of groundwater based on lysometric methods has significantly improved, and research is being carried out in this direction by F.B. Abutaliev, N. Ravshanova, M. Salimova, N.N. Khodzhibaev, I. Khabibullaev, K.G. Ganiev , R.N. Usmanov and many other scientists can be quoted. . To determine the state of geological and physical processes in real time, this method has a number of disadvantages in terms of design, methodology, speed, accuracy, and information content. efficiency and socio-economic aspects [7].

Currently, mathematical modeling of hydrogeological processes in EGM and computer devices is being carried out at a rapid pace when calculating the elements of groundwater balance and groundwater. In the scientific works of such researchers as F.B.Abotaliev, N.N.Khodzhibayev, U.U.Umarov, I.Khabibullaev, N.Ravshanov, Zh.Kh.Dzhumanov, P.P. Nagevich, I.N.Gracheva, O.V. Chebotareva, in hydrogeology and engineering geology, in reclamation hydrogeology, underground filtration in connected underground aquifers. the amount of water is given [9].

A. Akramov, I. Khabibullaev, N. Ravshanov, Yu.Kh. Jumanov, I.N. Gracheva and others have developed methods, algorithms and software systems for calculating water consumption of wells and flows in underground water intakes, around canals and ditches [7, 10, 11].

developed methods for modeling, statistical analysis and multiphase correlation of groundwater seepage processes based on lysometric observations [12]. K.K. Bisembaeva solved the problem of calculating the balance of groundwater elements based on the use of EGM and mathematical modeling [13].

[14] The article developed a mathematical model for monitoring and predicting changes in groundwater levels and salt concentrations, as well as for reflecting floods, salinization and water content. Initiative processes in the design of hydraulic structures. A qualitative analysis of studies on this issue is presented. Since the process is represented by a nonlinear differential equation, a numerical algorithm based on finite-difference schemes was developed to solve it. Mathematical models of salt migration processes, geo

Research works have studied the current problem associated with changes in groundwater levels and the migration of mineral salts in the soil [15-16]. The problem is characterized by a system of partial differential equations and various types of corresponding initial, internal and boundary conditions. To obtain a mathematical model of the process under consideration, scientific works devoted to various aspects and software of the object under study were examined in detail. Mathematical models and an effective numerical algorithm that takes into account external sources and evaporation are proposed for a comprehensive study of the filtration process and the process of changing the mineralized regime of groundwater.

The above-mentioned developments and proposals are aimed at calculating individual elements of the groundwater balance, determining the state of groundwater at which the water exchange process in the layers and the interaction of surface water with hydrogeological processes in vadose zones are calculated. . does not increase.

In this [17] thesis, some software products in this area were studied: the geofiltration modeling package GWFS, created by the Russian manufacturer Geolink Consulting, "Heat and Mass Transfer Mode". US Groundwater Modeling Laboratory, Brigham Young University. MODFLOW "Hydrochemical and hydrogeological modeling" system and visual modeling and visualization package MODFLOW "Hydrodynamic modeling" from WHI Software (USGS), Ground Water Vist as a GWV program "Filtration properties and geofiltration modeling" from DHI, Denmark, used for Schlumberger water The Canadian service program for "Modeling the Geofiltration Process", the French program Make SHE Sesteme Hydrologique, the European program "Modeling Large Hydrological Systems" is such a situation.

The literature review and analysis presented show that the requirements for further research in this direction and the following can be expressed as justified policy actions:

- along with the successes achieved in modeling geofiltration processes in various conditions and improving existing algorithms, it is necessary to develop a complex algorithm

and software complex for calculating individual elements of the groundwater level in the EGM, aimed at determining the state of groundwater; - the mathematical models being developed must take into account and describe artificial and natural factors in the dynamics of natural conditions at the highest level;

- development of a software system that models precise natural conditions, forms working modules of programs in the EGM, and collects initial information about the source of the terrain;

- the results obtained on the basis of mathematical modeling must be accurate, correct, reliable and fast, helping to make decisions on the underground hydrosphere and solve management problems. In recent years, scientific research and analysis of literature on the study of changes in groundwater levels in the processes of underground geofiltration show that a number of theoretical and practical results have been obtained and methods have been developed in this direction. Mathematical and numerical modeling plays an important role in the study of practical issues of geofiltration.

This paper [18] proposes a mathematical model to describe the transition of groundwater flow from confined aquifers to unconfined aquifers. In addition, we reexamined the aquitard properties and evaluated the process flow behavior under other aquitard conditions. Numerical analysis of new mathematical models and numerical solutions was carried out, as well as simulations for various fractional order values.

[19] discussed the process of predicting changes in groundwater, pressurized water, and salt concentrations in well and poorly permeable formations. A brief analysis of scientific articles devoted to mathematical and numerical modeling of the object under study is presented. For a comprehensive study of the process under consideration, a model based on the finite difference method and an effective numerical algorithm have been developed. Changes in groundwater and pressure water levels, seepage permeability, water loss coefficient, and infiltration rates associated with groundwater levels have been studied to have a significant impact on environmental processes. Even before the introduction of new technologies, recommendations were developed for predicting changes in salt content in water using an effective digital algorithm.

Formulation of the problem. Assessment of the balance of groundwater resources and the value of their elements is based on the creation of mathematical models for solving hydrogeological and ameliorative problems. Real problems based on mathematical modeling and natural geofiltration processes are almost completely reflected. When mathematically modeling geofiltration processes, one should pay attention to the formulation of special problems and the principles of their solution, taking into account

2 Statement of the problem

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) + J_{in} - W_b - Q_b + Q_k - Q_z + S_s \quad (1)$$

here μ is the water supply coefficient of the aquifer (a dimensionless value); x, y - spatial coordinates, m ; t - time, day; $h = h(x, y, t)$ - the value of the level of underground water from the impermeable layer to the soil surface, m ; $k = k(x, y)$ - filtering coefficient, (m/s) . W_b - evaporation (m^3/s) , Q_k - absorption of water underground from channels (m^3/s) , Q_z - water exit from the ground (into the walls) (m^3/s) . Q_b - the amount of water extracted from the ground, it is expressed as follows (m^3/s) :

$$Q_b(x, y, t) = Q(t)d(x - x_0, y - y_0), t \geq t_0 \quad (2)$$

where d is the delta function:

$$\delta = \begin{cases} \text{if } x = x_0, y = y_0, \text{ then } \frac{1}{\Delta x^2} \\ \text{if } x \neq x_0, y \neq y_0, \text{ then } 0 \end{cases} \quad (3)$$

t_0 - initial calculation time: W_b - evaporation from the groundwater level (m^3/s), having the character of the area, and functions of space and time coordinates. It is expressed by the Krylov-Averyanov formula [7]:

$$W_b(x, y, t) = \begin{cases} \text{if } h > h_{kr}, \text{ then } W_0(1 - \frac{h}{h_{kr}})^2 \\ \text{if } h < h_{kr}, \text{ then } 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Here, W_0 is evaporation from the ground surface (m^3/s); h_{kr} - critical of groundwater level (maximum value), $m; n$ - indicator that takes into account soil lithology and crop type; J_{in} - infiltration saturation of groundwater with atmospheric precipitation (m^3/s). S_s - amount of supplied water (m^3/s) during the irrigation period ($T_{sug'}$). It varies considerably by time and region. Therefore, it is expressed as a function of coordinates and time: $J_{in} = J_{in}(x, y, t), S_s = f(x, y, t)$.

S_s is taken into account in the model as:

$$S_s = \begin{cases} \text{if } t \in T_{sug'}, \text{ then } f(x, y, t) \\ \text{if } t \notin T_{sug'}, \text{ then } 0 \end{cases} \quad (4)$$

Water exchange is modeled as point sources if surface water bodies in mutual water exchange with underground water have a sufficiently small size compared to the filtration area. If the surface of water bodies is significant, then their connection is modeled as sources with surface.

Water exchange of streams with aquifer is expressed as follows [20]:

in the case of a canal, a river:

$$Q_k = \begin{cases} \text{if } x = x_k, y = y_k, \text{ then } k_k \frac{h^n - h_k^2}{2F_{hk}} \\ \text{if } x \neq x_k, y \neq y_k, \text{ then } 0 \end{cases} \quad (5)$$

if possible

$$Q_z = \begin{cases} \text{if } x = x_z, y = y_z, \text{ then } k_z \frac{h^n - h_z^2}{2F_{hz}} \\ \text{if } x \neq x_z, y \neq y_z, \text{ then } 0 \end{cases} \quad (6)$$

here h_k, h_z - the water level of the canal (river) and the reservoir, respectively; F_{hz}, F_{hk} - filtering resistance, they are determined by the method given in [19, 20, ?, 20]22].

We solve equation (1) on the surface G of the xOy plane. We call this surface the filtration region and assume that it is bounded by a sufficiently smooth curve L .

The general solution of equation (1) depends on arbitrary functions. Therefore, in order to find a single-valued solution, additional conditions are required, the nature of which depends on the specific problem associated with the study of changes in the level of groundwater.

One of the additional conditions is the start of certain calculations t_0 . It is called the "initial" condition, which represents the value of the groundwater level at a certain time point. At $t_0 = 0$, we can assume that the initial condition is:

$$h(x, y, 0) = \varphi(x, y); (x, y) \in G. \quad (7)$$

here $ph(x, y)G$ is given and y is a sufficiently smooth function.

Boundary conditions are determined by the natural hydrogeological situation. At the boundaries of the filtration zone, the conditions of the groundwater level or water flow or the linear relationship between the flow and the level, i.e. type I, II, III boundary, should be indicated.

For example, if the boundary L passes through hydroisogypsum or watercourses with a good hydraulic connection with groundwater, that is, if the groundwater level is known at any time, then the first type of boundary condition is given:

$$h(x, y, t) = \psi(x, y, t), \quad (x, y) \in L, t \geq t_0 \quad (8)$$

where $\psi(x, y)$ is the function given in L .

If there is a groundwater seepage at certain parts of the boundary L , then the seepage volume is given, i.e. q_g is the second type of boundary condition:

$$kh \frac{\partial h}{\partial n} = q_g(t)(x, y) \in L \quad (9)$$

where $\frac{\partial h}{\partial n}$ is the derivative normal to the contour; n - internal normal of the contour; $q_g(t)$ known function. If the boundary is impermeable, then $q_g(t) = 0$. If the boundary passes through a watercourse or a watershed, which causes changes in the groundwater level due to water flow fluctuations, then a linear relationship between the waterflow in the watershed and the groundwater level, i.e. Type III boundary condition is given:

$$-kh \frac{\partial h}{\partial n} = \gamma(h_b - h) \quad (10)$$

here γ - describes the hydrogeological conditions of the relationship between groundwater and surface water.

The above equations make it possible to model groundwater filtration processes in irrigated lands. The solution of equation (1) conditional on (7), (8) is called the first boundary value problem of mathematical physics, conditional on (7), (9) - the second, and conditional on (7), (10) - the third boundary value problem.

3 Problem solution

Numerical solutions to the generated boundary value problems were developed by F.B.Abutaliyev, I. Habibullaev and others using the finite difference scheme and local one-dimensional sweep methods [1, 20].

We look for numerical solutions to the resulting boundary problems using the methods developed by the above authors. First, in equation (1), the initial and boundary conditions are switched to dimensionless variables. As a result, the following dimensionless form of equation (1) is formed.

When filtering the resulting boundary problems, we pass through the formulas for dimensionless variables in equation G . (1) and initial and boundary conditions.

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{H}{H_0}, \quad k^* = \frac{k}{k_0}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{k_0 H_0}{\mu L^2} t; \\ Q_b^* &= \frac{2L^2}{k_0 H_0^2} Q_b, \quad W_b^* = \frac{2L^2}{k_0 H_0^2} W_b, \quad J_{in}^* = \frac{2L^2}{k_0 H_0^2} J_{in}; \\ Q_z^* &= \frac{2L}{k_0 H_0^2} Q_z, \quad Q_k^* = \frac{2L}{k_0 H_0^2} Q_k \end{aligned}$$

Here H_0, k_0, L are the characteristic (maximum) levels, the filtering coefficient and the length of the filtering region.

In dimensionless form, equation (1) can be written as:

$$\frac{\partial h^*}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k^* h^* \frac{\partial h^*}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k^* h^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \right) + W^* \quad (11)$$

where W^* is the algebraic sum of free terms. ($W^* = J_{in} - W_b - Q_b + Q_k - Q_z + S_s$).

Since (11) is a non-linear equation, an iteration method is used to linearize it and solve it. [1]. The linear form of (11) is as follows:

$$\frac{1}{\tilde{h}} \frac{\partial h^2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \frac{\partial h^2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{\partial h^2}{\partial \eta} \right) + W \quad (12)$$

To solve the equation (12), we approximate with a two-layer six-point finite difference using the finite difference method.

$$\frac{1}{\tilde{h}_{i,j}} \frac{(h^2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - (h^2)_{i,j}^n}{0.5\Delta\tau} = \frac{k_{i-0.5,j}(h^2)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j})(h^2)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + k_{i+0.5,j}(h^2)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{x^2} + \frac{k_{i,j-0.5}(h^2)_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5})(h^2)_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + k_{i,j+0.5}(h^2)_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}}{y^2} + 2\xi_1 \eta W_{i,j}^n \quad (13)$$

To solve the equation (12), iterative column and row-by-row methods are used:

$$a_{i,j} h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - b_{i,j} h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + c_{i,j} h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -d_{i,j} \quad (14)$$

Here $a_{i,j} = \frac{2k_{i-0.5,j}\tilde{h}_{i-1,j}}{x^2}$, $b_{i,j} = \frac{2(k_{i-0.5,j}+k_{i+0.5,j})\tilde{h}_{i,j}}{x^2} - \frac{4}{\tau}$, $c_{i,j} = \frac{2k_{i+0.5,j}\tilde{h}_{i+1,j}}{x^2}$,

$$d_{i,j} = \left(\frac{4}{\Delta\tau} - \frac{2(k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5})\tilde{h}_{i,j}}{y^2} \right) h_{i,j}^n + \frac{2k_{i,j-0.5}\tilde{h}_{i,j-1}}{y^2} h_{i,j-1}^n + \frac{2k_{i,j+0.5}\tilde{h}_{i,j+1}}{y^2} h_{i,j+1}^n - \frac{k_{i-0.5,j}\tilde{h}_{i-1,j}^2 - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j})\tilde{h}_{i,j}^2 - k_{i+0.5,j}\tilde{h}_{i+1,j}^2}{x^2} - \frac{k_{i,j-0.5}\tilde{h}_{i,j-1}^2 - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5})\tilde{h}_{i,j}^2 - k_{i,j+0.5}\tilde{h}_{i,j+1}^2}{y^2} + 2\xi_1 \eta W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

Calculations are made as follows:

In the direction of the ox :

$$h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j} h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}, \quad (15)$$

In the direction of the oy :

$$h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{\alpha}_{i,j+1} h_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{\beta}_{i,j+1}, \quad (16)$$

Here are $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \bar{\alpha}_{i,j}, \bar{\beta}_{i,j}$ the threshold coefficients, which are calculated by the following recursive formulas:

$$\alpha_i = \frac{c_{i-1,j}}{b_{i-1,j} - a_{i-1,j}\alpha_{i-1,j}}, \quad \beta_i = \frac{d_{i-1,j} + a_{i-1,j}\beta_{i-1,j}}{b_{i-1,j} - a_{i-1,j}\alpha_{i-1,j}}, \quad (17)$$

$$\bar{\alpha}_j = \frac{\bar{c}_{i,j-1}}{\bar{b}_{i,j-1} - \bar{a}_{i,j-1}\bar{\alpha}_{i,j-1}}, \quad \bar{\beta}_j = \frac{\bar{d}_{i,j-1} + \bar{a}_{i,j-1}\bar{\beta}_{i,j-1}}{\bar{b}_{i,j-1} - \bar{a}_{i,j-1}\bar{\alpha}_{i,j-1}}, \quad (18)$$

$-kh \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_G = \gamma(h_b - h)$ - approximation of the boundary condition according to the non-exact (non-obvious) scheme is as follows:

Along the direction of the $0x$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = -\frac{k_0 h_0}{2L} k_{1,j} \frac{2\tilde{h}_{1,j} h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{h}_{1,j}^2 - 2\tilde{h}_{0,j} h_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{h}_{0,j}^2}{x} = \gamma(h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_0) \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x_i} \Big|_{x_i=1} = \frac{k_0 h_0}{2L} k_{1,j} \frac{2\tilde{h}_{1,j} h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{h}_{1,j}^2 - 2\tilde{h}_{i-1,j} h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{h}_{i-1,j}^2}{x} = \gamma(h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_0) \quad (20)$$

Along the direction of the $0y$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y_i} \Big|_{y_i=0} = -\frac{k_0 h_0}{2L} k_{i,1} \frac{2\tilde{h}_{i,1} h_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{h}_{i,1}^2 - 2\tilde{h}_{i,0} h_{i,0}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{h}_{i,0}^2}{y} = \gamma(h_0 h_{i,0}^{n+\frac{1}{2}} - h_0) \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y_i} \Big|_{y_i=1} = \frac{k_0 h_0}{2L} k_{i,J} \frac{\tilde{h}_{i,J} h_{i,J}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{h}_{i,J}^2 - \tilde{h}_{i,J-1} h_{i,J-1}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{h}_{i,J-1}^2}{y} = \gamma(h_0 h_{i,J}^{n+\frac{1}{2}} - h_0) \quad (22)$$

As mentioned above, the problem was described by means of non-linear partial differential equations, the solution to which is conducted using an iterative method. The convergence conditions of the iterative process are as follows:

$$\left| (h_{i,j})^r - (h_{i,j})^{(r-1)} \right| \leq \varepsilon \quad (23)$$

where r is the number of iterations and ε is the given level of accuracy. [21]

Analysis of the results of numerical calculations on an electronic calculator. Analysis of the main parameters of filtration in irrigated areas and their change ranges (according to the level of groundwater), mathematical and software development of the studied object, which takes into account the formation of the level after the process of underground irrigation was implemented on the basis of supply. Below, the influence of irrigation water on the groundwater level was observed according to the change of time.

Numerical calculations were performed for the following values of input data:

$$\mu = 0.02, \quad x = 1000, \quad y = 1000, \quad k = 0.01, \quad Q_b = 0.04, \quad Q_k = 0.05, \quad Q_z = 0.02, \quad S_s = 0.05$$

The results of computer numerical calculations are shown in Figures 1-5.

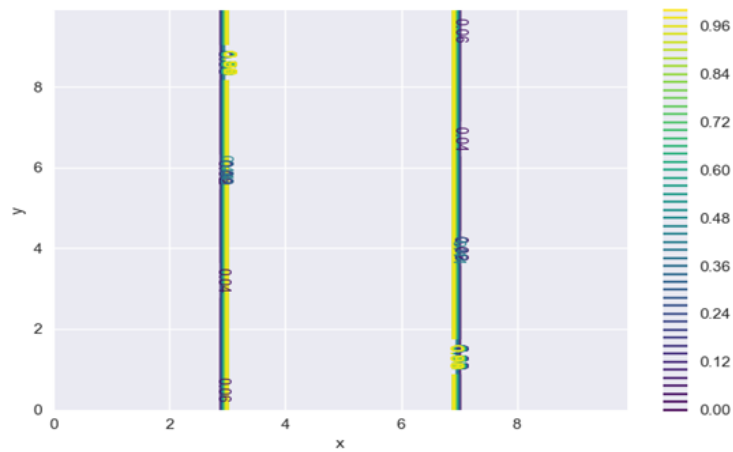


Figure 1 at that time, the underground water level was 0.00 (the level was equalized to this value), the irrigation water level had a value of 0.09.

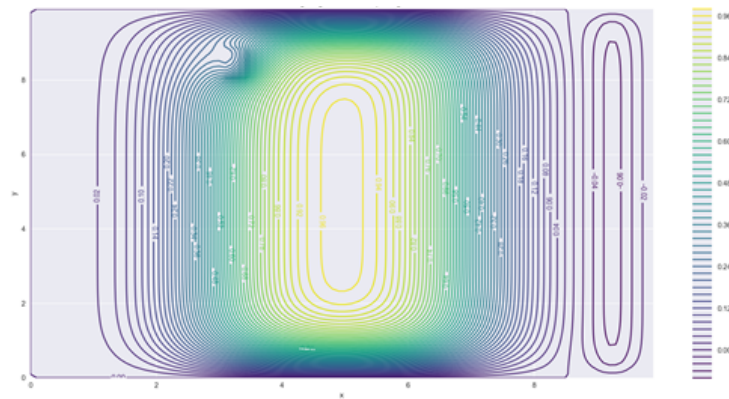


Figure 2 At this time, we can see that the surface water, that is, the irrigation water, has spread over the irrigated area, and the underground water has reached the level. Here, the state of well (-0.04) and zahkash (-0.02) water intake is also shown.

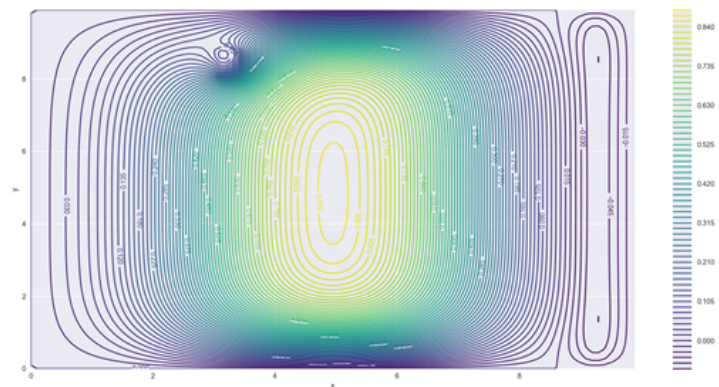


Figure 3 time, we can see that irrigation water has dropped to 0.75. Since the irrigation water affects the level, it also affects the well and the well, namely the well (-0.35) and the well (-0.19).

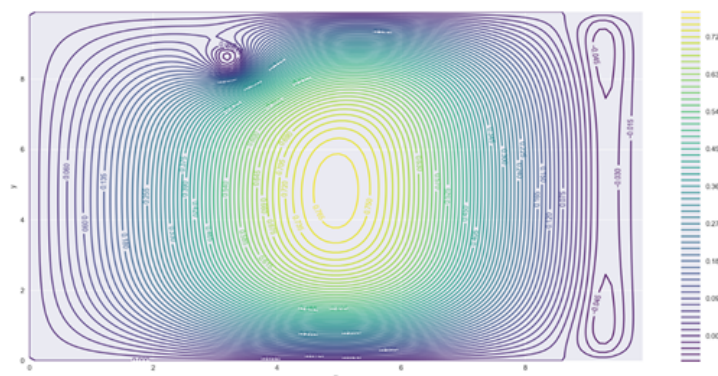


Figure 4 time, we can see that the irrigation water has dropped to 0.7, and we can see that it has reached the underground level and affected the level. (Groundwater water level increased by 0.05). Since the irrigation water affects the level, it also affects the well and the well (-0.30) and the well (-0.16).

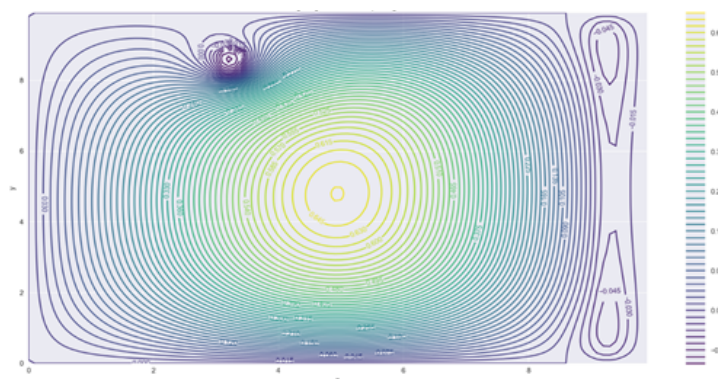


Figure 5 we can see that the irrigation water almost seeped underground, i.e. it dropped to 0.4, and the underground water level rose to 0.02. Since the irrigation water affects the level, it also affects the well and the well (-0.20) and the well (-0.11).

4 Conclusion

The scientific significance of the research results is that, taking into account the influence of internal and external factors on changes in the groundwater level, mathematical models of groundwater movement in a two-layer (x and y) environment have been improved, with a high level of accuracy and absolute stability. relationship with time and spatial variables. This is explained by the development of efficient numerical algorithms based on the non-disclosure scheme.

The practical significance of the research results is expressed in the development of a software complex based on the presented digital calculation algorithm for monitoring and forecasting of geofilters. Ten processes reduced the calculation time and increased the accuracy of engineering calculations to determine the level. underground waters and their level of mineralization, as well as mathematical and numerical apparatus was created. can significantly reduce the size of full-scale research and minimize experimental work that requires expensive resources in the course of computational experiments.

1. Repeated crops are grown and this allows modeling and numerical solution of subsurface filtration process in irrigated lands.
2. By using wells, it is possible to establish rational irrigation of cultivated areas.
3. It allows to model the process of providing underground water reserves by ensuring the penetration of water from rivers and canals into the soil.
4. It is used to determine the array of information and prepare software products for further research.

References

- [1] E.N. Bereslavsky, L.A. Panasenko and I.Z. Samigulin 1976. *Application of the finite element method to solve problems of filtration theory*. Uzhgorod, Ed. Uzhgorod University, – P. 7–8.
- [2] Polubarinova-Kochina P.Ya. 1977. *The theory of groundwater movement*. M.: Nauka, – 664 p.
- [3] Borevsky B.V., Kozak N.S., Chernyak A.G. 2012. *Increasing the water supply of the city of Vladivostok through the use of groundwater in dry periods with forced water extraction // Water resources*. – No.6. – P. 608–623.
- [4] Verigin N.N., Vasiliev S.V., Kuranov N.P. and etc. 1979. *Methods for forecasting the salt regime of soils and groundwater*. M.: Kolos, – 336 p.
- [5] Vinogradov Yu.B., Vinogradova T.A. 2010. *Mathematical modeling in hydrology* Textbook. Moscow: Academy Publishing Center, – 304 p.
- [6] Umarov U.U., Khabibullaev I.Kh., Gracheva I.N., Usmanov R.N., Dzhumanov Zh.Kh. 2006. *Prospects for the development of methodology for modeling hydrogeological systems based on modern information technologies: Geology and mineral resources T.*, – P. No2. – P. 52–55.
- [7] Abutaliev F.B., Khabibullaev I. 1980. *Solution of the problem of groundwater seepage in heterogeneous multilayer aquifers // Modern methods of research and data processing in hydrology - T.*: SAIGIMS, Ed. 6. – P. 14–20.
- [8] Abutaliev F.B., Khodzhibaev N.N., Umarov U.Yu., Izmailov I.I. 1972. *Methods of mathematical modeling of hydrogeological processes* M.: Nedra, – 64 p.
- [9] Norkulov Sh.N. 2017. *Results of ecological-hydrogeological and engineering-geological research and mapping at a scale of 1:25,000 within the city of Karshi and the adjacent territory of the State*.
- [10] Dzhumanov Zh.Kh., Yusupov R.A., Egamberdiev Kh.S. 2019. *Multidimensional approach to modeling filtration processes of hydrogeological systems*. Land of Uzbekistan. No. 2.
- [11] Fletcher K. 1991. *Computational methods in hydrodynamics* M.: Mir, – T.1, 2. – 552 p.
- [12] Mirzaev S.Sh., Saidmurodov Z.S. 1991. *Justification for the multi-purpose use of groundwater in the arid zone T.*: Fan, – 116 p.
- [13] Monograph 1971. *Hydrogeology of the USSR* volume XXXIX, UzSSR, Ed.nedra. Moscow
- [14] Ravshanov N. et al. 2020. *Ground and confined underground waters and their salt content. International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT)*. – P. 1-12.
- [15] Ravshanov N., Daliev S. 2020. *Non-linear mathematical model to predict the changes in underground water level and salt concentration // Journal of Physics: Conference Series*. - IOP Publishing, – V. 1441. – no. 1. – 012163 p.
- [16] Ravshanov N., Zagrebina S.A., Daliev Sh.K. 2019. *Numerical simulation of unsteady underground water filtration in a porous medium // Problems of Computational and Applied Mathematics*. – No. 4. – P. 12–30.

- [17] Egamberdiev Kh.S. 2022. *Mathematical modeling of groundwater geofiltration processes in multilayer porous media* Candidate's dissertation, – P. 21–22.
- [18] Morakaladi, Makosha Ismaelin Charlotte and Abdon Atangana 2023. *A mathematical model for converting groundwater flow from confined to unconfined aquifers using power law processes* Open Geological Sciences 15.1 20220446.
- [19] Daliev Sherzod and Normakhmad Ravshanov. 2022. *Numerical and mathematical modeling of groundwater level changes in two-layer media* 2022 International Conference on Information Science and Communication Technology.
- [20] Afrifa, Stephen, et al. 2022. *Mathematical and machine learning models for groundwater level changes: a systematic review and bibliographic analysis* Future Internet 14.9 259.
- [21] Khabibullaev I., Murodullaev B., Khaknazarova D. 2023. *Numerical modeling of the process of groundwater filtration in the irrigation zone* Problems of Computational and Applied Mathematics. – no. 3. – P. 21–32.

Received June 20, 2023

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД НА ОРОШАЕМЫХ ТЕРРИТОРИЯХ

¹Хабидуллаев И., ²Муродуллаев Б.Т., Хакназарова Д.О.

*bmurodullayev1114@gmail.com

¹Ташкентский финансовый институт,

100000, Узбекистан, Ташкент, ул. Амира Темура, 60А;

²Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

В статье рассматривается вопрос разработки модели процесса фильтрации подземных вод, взаимодействующих с поверхностными водами на землях с повторными посевами, а также алгоритм численного решения задачи. Исследования данного процесса является актуальным научным направлением. В рамках представленного исследования был проведен литературный анализ тематических публикаций. При исследованиях водоносных горизонтов были получены значения подземных и уровней показателей по отношению к нижнему горизонтальному водоупорному слою, а математическая модель движения подземных вод в водоносных горизонтах описывалась специальной производной нелинейного дифференциального уравнения параболического типа. Расчетные эксперименты показали, что оросительная вода является основным фактором, оказывающим существенное влияние на уровень грунтовых вод.

Ключевые слова: подземные воды, математическая модель, численное решение, геофильтрация, гидрогеологические системы, уровень воды, коэффициент фильтрации, инфильтрация.

Цитирование: Хабидуллаев И., Муродуллаев Б.Т., Хакназарова Д.О. Численное моделирование процесса фильтрации подземных вод на орошаемых территориях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 44-55.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НАГРУЗКАХ

^{1*} Анарова Ш.А., ² Исмоилов Ш.М., ² Шокиров Д.А.

*shahzodaanarova@gmail.com

¹Ташкентский университет информационных технологий имени
Мухаммада ал-Хоразмий,

100200, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 108;

²Наманганский инженерно-строительный институт,

160103, Узбекистан, г. Наманган, ул. И.Каримов 12.

Известно что, трехслойные элементы конструкций находят все большее применение в современных отраслях промышленности, поэтому постоянно возникает необходимость в разработке методов их расчета в новых условиях эксплуатации. В частности, одной из актуальных проблем является исследование деформационных состояний трехслойных стержней. Исходя из количества публикаций по этой теме, вопросам расчета напряженно-деформированного состояния и критических параметров устойчивости трехслойных стержней уделяется большое внимание. Однако, несмотря на активную научную проработку, по-прежнему остаются не рассмотренными некоторые важные для практики схемы нагружения трехслойных конструкций. В этой связи, целью данной работы является вывод математической модели деформирования трехслойных стержней при учете вариаций кинетической и потенциальной энергий, а также работы внешних объемных и поверхностных сил, для чего был применен вариационный принцип Остроградского–Гамильтона.

Ключевые слова: трехслойный стержень, принцип Остроградского–Гамильтона, кинетическая энергия, потенциальная энергия.

Цитирование: Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А. Математическая модель деформации трехслойных стержней при пространственных нагрузках // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 56-82.

1 Введение

За последние десятилетия значительное распространение получили трехслойные конструкции, состоящие из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба, трехслойные конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

Теорию многослойных конструкций можно трактовать как результат обобщения классической теории пластин и оболочек в теории трехслойных конструкций. В ряде случаев многослойные элементы конструкций уже нельзя считать тонкими в смысле гипотез классической теории. При увеличении числа слоев и применении различных заполнителей существенную роль начинают играть эффекты, связанные с работой отдельных слоев. Кроме поперечных сдвигов и обжатия нормалей, в многослойных конструкциях часто приходится учитывать моментные эффекты в несущих слоях, локальные формы потери устойчивости и др.

Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Еще одна группа слоев предназначена для защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой [1].

Методы расчета трехслойных пластин и оболочек освещены в [2, 3] достаточно подробно. Имеется также немало работ, в которых теория многослойных пластин и оболочек строится на основе гипотез относительно характера деформирования пакета в целом. На основе единого подхода авторами изложена теория многослойных конструкций при произвольном числе слоев и при относительно широких предположениях о свойствах отдельного слоя. Теория применима не только к тонким и тонкостенным конструкциям, но и к телам произвольной формы. Развита теория расчета систем регулярной структуры, позволяющие в ряде случаев построить решения, содержащие число слоев как параметр, а также развита теория слоистых композиционных материалов, полученная в результате предельного перехода к системам мелкослойной структуры.

В [4] исследованы симметричные поперечные колебания круглой многослойной металлополимерной пластины под действием теплового удара. Пластина связана с безынерционным фундаментом Винклера. Предполагается, что лицевые панели удовлетворяют гипотезе Кирхгофа, а деформированная нормаль в ядре с низкой плотностью является прямолинейной и несжимаемой по толщине. Получены аналитические решения и дан их численный анализ.

Неоднородные конструкции нашли широкое применение в различных областях машиностроения и в строительстве, поэтому актуальна разработка методов их прочностного расчета при различных нагрузках. В работе [5] приведены результаты по однократному квазистатическому и динамическому деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Здесь рассмотрен изгиб с растяжением несимметричного по толщине трехслойного стержня в температурном поле.

В [6] систематически изложены постановки и методы решения задач квазистатики трехслойных стержней прямоугольного сечения с гладкой и ступенчатой поверхностями. Учтены физически нелинейные свойства материалов слоев при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Приведен ряд аналитических решений и численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния исследуемых стержней.

В настоящее время широкое применение в технике и строительстве получили многослойные, в том числе трехслойные, элементы конструкций. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жесткость и противостоять ряду других физических воздействий. В связи с этим создание расчетных моделей трехслойных стержней, с применением различных кинематических гипотез и комплексных термосиловых локальных нагрузок, становится актуальной задачей. В [7] приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом нагружении трех-

слойного стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем при локальных равномерно распределенных, синусоидальных и параболических нагрузках. Численная апробация решения проведена в случае металл полимерного стержня.

В связи с широким применением трехслойных элементов конструкций в строительстве и машиностроении возникает необходимость создания адекватных механико-математических моделей расчета их напряженно-деформированного состояния. В работе [8] рассмотрено деформирование в температурном поле трехслойной упруго-пластической балки со сжимаемым заполнителем. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Физические соотношения связи напряжений и деформаций соответствуют теории малых упруго-пластических деформаций. Изменение температуры рассчитывалось с помощью формулы, полученной при осреднении теплофизических свойств материалов слоев по толщине стержня. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Аналитическое решение было получено методом упругих решений для случая равномерного распределения непрерывной нагрузки. Выполнен его численный анализ.

В работе [9] систематически изложены постановки и методы решения краевых задач, по определению напряженно-деформированного состояния трехслойных стержневых элементов конструкций при однократных и квазистатических переменных нагрузках в терморadiационных полях. Учтены физически нелинейные свойства материалов слоев при комплексных силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Приведен ряд аналитических решений и численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней.

В [10] рассмотрено напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня при центральной сжатии. Результаты аналитического расчета и численного расчета (МКЭ) сравниваются с экспериментальными данными. Предполагается, что взаимодействие слоев осуществляется через контактный слой. Контактный слой рассматривается как поперечно-анизотропная упругая среда с такими параметрами, что его можно представить в виде набора коротких упругих стержней, не связанных друг с другом и ориентированных нормально к поверхности контакта. Такое допущение позволяет получить аналитическое решение задачи в замкнутом виде, а также избежать бесконечных касательных напряжений на границе раздела слоев вблизи торца модели. Полученные результаты расчетов качественно и количественно совпадают с результатами эксперимента.

В статье [11] рассмотрены проблемы расчета трехслойного стержня при действии мгновенно-нарастающих нагрузок. Решены дифференциальные уравнения колебания трехслойного стержня при действии динамических нагрузок. Определены максимальные коэффициенты динамичности прогиба при различных видах закрепления концов балки, а также при переходе в двуслойный и однородные стержни. Проведены также расчеты при различных значениях упругих характеристик несущих слоев стержня. Проанализирована зависимость безразмерного параметра, зависящего от времени действия нагрузки и приведенной частоты стержня с коэффициентом динамичности прогиба. Установлено, что изменения напряжений несущих слоев в зависимости от безразмерного параметра, зависящего от времени действия нагрузки

и приведенной частоты стержня, подобны к закону изменения коэффициента динамичности.

В работе [12] представлены результаты испытаний элементов трехслойных конструкций с сетчатыми облегченными заполнителями, изготовленными методом трехмерной печати по технологии послойного лазерного синтеза из полиамида. Рассмотрена структура заполнителей, соответствующая, так называемым пантографическим механическим метаматериалам, в которых две системы параллельно расположенных стержней разнесены на небольшое расстояние и соединяются поперечными штифтами в зонах пересечения. Для таких материалов известно, что для описания их эквивалентных механических характеристик необходимо привлекать неклассические модели теории упругости, которые учитывают нелокальный характер деформаций структуры материала под нагрузкой. В данной работе рассмотрено три варианта поперечных соединений в структуре метаматериала, при которых поперечные штифты обеспечивают передачу и усилий, и моментов (жесткие соединения), только усилий (шарнирные соединения) или просто отсутствуют. Такие варианты заполнителей, сопоставлены с обычным сетчатым заполнителем, в котором перекрещивающиеся стержни образуют жестко связанную систему типа плоской рамы. Изготовленные образцы испытаны на ударопрочность по схеме двухопорного ударного изгиба с использованием маятникового копра. Установлено, что при одинаковых размерах поперечных сечений стержней в заполнителе, наибольшей несущей способностью при ударе обладают образцы с пантографическими заполнителями с жесткими поперечными соединениями. Однако, образцы с шарнирными соединениями демонстрируют необычные механизмы разрушения, при которых зона повреждений оказывается наибольшей, а развитие повреждений происходит с образованием множества мелких осколков, которые препятствуют прохождению ударника насквозь структуры и повышают ее удельное энергопоглощение, что делает такие варианты заполнителей потенциально перспективными для создания ударопоглощающих конструкций.

2 Постановка задачи

В общей теории колебания упругих тел перемещения $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ являются функцией четырех переменных координат x_1, x_2, x_3 и времени t .

Уравнения теории колебания стержней выводятся на основании принципа Остроградского – Гамильтона. При постановке из принципа Остроградского – Гамильтона выводятся уравнения Коши и граничные условия.

В общем виде выпишем вариационный принцип Остроградского – Гамильтона [13–22]:

$$\delta \int_t (K - \Pi + A) dt = 0, \tag{1}$$

где K, Π - кинетическая и потенциальная энергии, A - работа внешних объемных и поверхностных сил.

Перемещения точек трехслойного стержня [5, 6, 9, 17–20, 22]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{(1)} = u_1 - (z - c - \frac{h_1}{2}) \frac{\partial w_1}{\partial x}, w^{(1)} = w_1, (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_1^{(2)} = u_2 - (z + c + \frac{h_2}{2}) \frac{\partial w_2}{\partial x}, w^{(2)} = w_2, (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\ u_1^{(3)} = (1 + \frac{z}{c}) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} \right) + (1 - \frac{z}{c}) \left(\frac{1}{2} u_2 + \frac{h_2}{4} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} \right), \\ w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2, (-c \leq z \leq c); \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial y}; \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial z};$$

При расчете трехслойной стержней введем следующие обозначения:

$$\alpha^{(1)} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \alpha^{(2)} = \frac{\partial w_2}{\partial x}. \quad (3)$$

С учетом формулы (3), имеем:

$$\begin{cases} u_1^{(1)} = u^{(1)} - z\alpha^{(1)} + c\alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2}\alpha^{(1)}, & w^{(1)} = w_1, & (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_1^{(2)} = u^{(2)} - z\alpha^{(2)} - c\alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2}\alpha^{(2)}, & w^{(2)} = w_2, & (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\ u_1^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}\alpha^{(1)}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}\alpha^{(2)}\right), \\ w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2, & & (-c \leq z \leq c); \end{cases} \quad (4)$$

3 Метод расчета деформации трёхслойных стержней при пространственных нагрузках

Вычисление кинетической энергии трехслойных стержней осуществляем следующим образом

$$\int_t \delta K dt = \int_t \int_v \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial t} \delta u_1^{(k)} dv dt + \int_t \int_v \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial t} \delta u_3^{(k)} dv dt. \quad (5)$$

Здесь $u_2 = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_t \delta K dt = & \int_v \left(\rho \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial t} \delta u_1^{(1)} + \rho \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t} \delta u_1^{(2)} + \rho \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial t} \delta u_1^{(3)} + \right. \\ & \left. + \rho \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t} \delta u_3^{(1)} + \rho \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t} \delta u_3^{(2)} + \rho \frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial t} \delta u_3^{(3)} \right) dv \Big|_t - \\ & - \int_t \int_v \left(\rho \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2} \delta u_1^{(1)} + \rho \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial t^2} \delta u_1^{(2)} + \rho \frac{\partial^2 u_1^{(3)}}{\partial t^2} \delta u_1^{(3)} + \right. \\ & \left. + \rho \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2} \delta u_3^{(1)} + \rho \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^2} \delta u_3^{(2)} + \rho \frac{\partial^2 u_3^{(3)}}{\partial t^2} \delta u_3^{(3)} \right) dv dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение для вычисления кинетической энергии трёхслойных стержней принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_t \delta K dt = & \int_x \int_y \int_z \left[\left(\rho \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} - \rho z \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho c \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{h_1}{2} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} - \right. \right. \\ & - \rho z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \rho z^2 \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} - \rho z c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} - \rho z \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \\ & + \rho c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} - \rho z c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho c^2 \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho c \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \\ & + \rho \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} - \rho \frac{h_1}{2} z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{h_1}{2} c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{h_1^2}{4} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{\partial w_1}{\partial t} \delta w_1 \Big) + \\ & + \left(\rho \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} - \rho z \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \rho c \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \rho \frac{h_2}{2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \rho z \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \right. \\ & + \rho z^2 \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho z c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho z \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \rho c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \rho z c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \\ & + \rho c^2 \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho c \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \rho \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \rho z \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \\ & \left. + \rho c \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho \frac{h_2^2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho \frac{\partial w_2}{\partial t} \delta w_2 \right) + \frac{1}{4} \left(\rho \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho z \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \rho z^2 \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho z c \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho z \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \\
& -\rho c \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \rho z c \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho c^2 \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho c \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \\
& -\rho \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \rho z \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho c \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho \frac{h_2^2}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \\
& + \rho \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2) + \frac{1}{4} \left(\rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \right. \\
& + \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{2} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \\
& + \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_1}{2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1^2}{4} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \\
& + \frac{h_1^2}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_1 h_2}{4} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \\
& + \frac{h_1 h_2}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \\
& + \frac{h_1}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \\
& + \frac{h_2}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1^2}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \\
& + \frac{h_1^2}{4} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_1 h_2}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_1}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \\
& + \frac{h_1 h_2}{4} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \\
& + \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{2} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \\
& + \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} - \frac{h_2 h_1}{4} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} - \\
& - \frac{h_2 h_1}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \frac{h_2}{2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \frac{h_2^2}{4} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \\
& - \frac{h_2^2}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} - \frac{h_1}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} - \\
& - \frac{h_1}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \\
& - \frac{h_2}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1 h_2}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_2}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \\
& + \frac{h_2 h_1}{4} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_2}{2} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_2^2}{4} \frac{z}{c} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \\
& + \frac{h_2^2}{4} \frac{z^2}{c^2} \rho \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_2 - \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_2 + \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_1 + \\
& + \rho \frac{z^2}{c^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_2 - \rho \frac{z^2}{c^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_2 + \rho \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 - \\
& - \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 - \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_1 - \rho \frac{z^2}{c^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_1 - \rho \frac{z}{c} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 + \rho \frac{z^2}{c^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2) \Big] dx dy dz dt.
\end{aligned} \tag{7}$$

Вводим преобразования:

$$F = \int_y \int_z dy dz, \quad S_y = \int_y \int_z z dy dz, \quad I_y = \int_y \int_z z^2 dy dz. \tag{8}$$

Здесь F – площадь поперечного сечения стержня, S_y – статический момент, I_y – момент инерции.

С учетом введенных обозначений (8) перепишем вариации кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta K dt = \int_x & \left[\left(\rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \rho c F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \right. \right. \\
 & + \rho c F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \rho c^2 F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho c \frac{h_1}{2} F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \\
 & + \rho \frac{h_1}{2} c F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha + \rho \frac{h_1^2}{4} F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha + \rho F \frac{\partial w_1}{\partial t} \delta w_1 \left. \right) + \left(\rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} - \rho c F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \right. \\
 & - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \rho c F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \rho c^2 F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \\
 & + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho \frac{h_2^2}{4} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \\
 & + \rho F \frac{\partial w_2}{\partial t} \delta w_2 \left. \right) + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(2)} - \right. \\
 & - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \frac{h_1^2}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(2)} - \\
 & - \frac{h_1 h_2}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \\
 & + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \frac{h_1^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \\
 & + \frac{h_1 h_2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} - \\
 & - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(1)} - \frac{h_2 h_1}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \\
 & + \frac{h_2^2}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(1)} - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} - \\
 & - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(1)} + \frac{h_2 h_1}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(1)} - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta u^{(2)} + \\
 & + \frac{h_2^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \delta \alpha^{(2)} + \rho F \frac{\partial w_1}{\partial t} \delta w_1 + \rho F \frac{\partial w_1}{\partial t} \delta w_2 + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_1}{\partial t} \delta w_1 - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_1}{\partial t} \delta w_2 + \\
 & + \rho F \frac{\partial w_2}{\partial t} \delta w_1 + \rho F \frac{\partial w_2}{\partial t} \delta w_2 - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_2}{\partial t} \delta w_1 + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_2}{\partial t} \delta w_2 \left. \right] dx \Big|_t - \tag{9} \\
 - \int_t \int_x & \left[\left(\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \right. \right. \\
 & + \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \rho c^2 F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \rho c \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \\
 & + \rho \frac{h_1}{2} c F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha + \rho \frac{h_1^2}{4} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha + \rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_1 \left. \right) + \left(\rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \right. \\
 & - \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \\
 & + \rho c^2 F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \\
 & + \rho \frac{h_2^2}{4} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 \left. \right) + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \right. \\
 & + \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1^2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \\
 & + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_1 h_2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \\
 & - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \\
 & - \frac{h_1 h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \frac{h_1 h_2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} - \frac{h_2 h_1}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \\
& - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \frac{h_2^2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} + \\
& + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(1)} + \frac{h_2 h_1}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(1)} - \\
& - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta u^{(2)} + \frac{h_2^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \delta \alpha^{(2)} + \rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w_1 - \\
& - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 + \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_1 + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \delta w_2 \Big] dx dt.
\end{aligned}$$

Здесь $S_y = 0$.

Сгруппируем естественные начальные условия по вариации $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, δw_1 , δw_2 :

$$\begin{aligned}
& \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \rho c F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \right) \right] \delta u^{(1)} dx \Big|_t - \int_t \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right] \delta u^{(1)} dx dt; \\
& \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \rho c F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{4} \left(+ \rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \right) \right] \delta u^{(2)} dx \Big|_t - \int_t \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} \left(+ \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right] \delta u^{(2)} dx dt; \\
& \int_x \left[\left(\rho c F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \rho c^2 F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \rho c \frac{h_1}{2} F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \rho \frac{h_1}{2} c F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \rho \frac{h_1^2}{4} F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{4} \left(+ \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_1^2}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_1^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{h_2 h_1}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \frac{h_2 h_1}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \right) \right] \delta \alpha^{(1)} \Big|_t - \int_t \int_x \left[\left(\rho c F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \rho c^2 F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \rho c \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \rho \frac{h_1}{2} c F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \rho \frac{h_1^2}{4} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{4} \left(+ \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1^2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{h_2 h_1}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{h_2 h_1}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right] \delta \alpha^{(1)} dx dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_x \left[\left(-\rho S_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \rho c F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} + \rho c^2 F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} + \rho \frac{h_2^2}{4} F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{h_1 h_2}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{h_1 h_2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_2^2}{4} \rho F \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \frac{h_2^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t} \right) \right] \delta \alpha^{(2)} dx \Big|_t - \\
 & - \int_t \int_x \left[\left(-\rho c F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \rho c^2 F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \rho \frac{h_2^2}{4} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{4} \left(-\frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{h_1 h_2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1 h_2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_2^2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{h_2^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right] \delta \alpha^{(2)} dx dt; \\
 & \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial w_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial w_1}{\partial t} + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_1}{\partial t} + \rho F \frac{\partial w_2}{\partial t} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) \right] \delta w_1 \Big|_t - \int_t \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) \right] \delta w_1 dx dt; \\
 & \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial w_1}{\partial t} - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_1}{\partial t} + \rho F \frac{\partial w_2}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) \right] \delta w_2 \Big|_t - \int_t \int_x \left[\left(\rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) \right] \delta w_2 dx dt. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Вычисление потенциальной энергии трёхслойных стержней:

$$\begin{aligned}
 \int_t \Pi dt &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_v \int_t \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dt dv = \int_v \int_t \left(\sigma_{11}^{(1)} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)} \delta \varepsilon_{11}^{(2)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sigma_{11}^{(3)} \delta \varepsilon_{11}^{(3)} + \sigma_{12}^{(1)} \delta \varepsilon_{12}^{(1)} + \sigma_{12}^{(2)} \delta \varepsilon_{12}^{(2)} + \sigma_{12}^{(3)} \delta \varepsilon_{12}^{(3)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sigma_{13}^{(1)} \delta \varepsilon_{13}^{(1)} + \sigma_{13}^{(2)} \delta \varepsilon_{13}^{(2)} + \sigma_{13}^{(3)} \delta \varepsilon_{13}^{(3)} \right) dt dv;
 \end{aligned}$$

Определим члены потенциальной энергии в слоях:

Слой 1:

$$\begin{aligned}
 & \int_v \int_t \sigma_{11}^{(1)} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} dt dv = \int_v \int_t \sigma_{11}^{(1)} \delta \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} dt dv = \\
 & = \int_v \int_t \sigma_{11}^{(1)} \delta \frac{\partial}{\partial x} \left(u_1^{(1)} - z \alpha^{(1)} + c \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} \right) dt dv; \\
 & \int_v \int_t \sigma_{11}^{(1)} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} dt dv = \int_v \int_t \left(\int_x \int_z \left(\sigma_{11}^{(1)} \delta \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} - \sigma_{11}^{(1)} \delta z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sigma_{11}^{(1)} \delta c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \sigma_{11}^{(1)} \delta \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right) dy dz \right) dx dt.
 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения напряжений под интегралом по y и z .

$$N_{11}^{(1)} = \int_y \int_z \sigma_{11}^{(1)} dz dy; \quad M_{11}^{(1)} = \int_y \int_z \sigma_{11}^{(1)} z dz dy. \tag{*}$$

Исходя из этих обозначений, выражение для напряжения записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \sigma_{11}^{(1)} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} dt dv &= \int_t \int_x N_{11}^{(1)} \delta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dx dt - \int_t \int_x M_{11}^{(1)} \delta \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dx dt + \\ &+ c \int_t \int_x N_{11}^{(1)} \delta \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dx dt + \frac{h_1}{2} \int_t \int_x N_{11}^{(1)} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

Используя общую формулу интегрирования по частям, интегрируем каждый член вариации потенциальной энергии в отдельности и имеем:

члены естественных граничных условий и уравнений в слое 1

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \sigma_{11}^{(1)} \delta \varepsilon_{11}^{(1)} dt dv &= \int_t \left[N_{11}^{(1)} \delta u^{(1)} - M_{11}^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + c N_{11}^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} N_{11}^{(1)} \delta \alpha^{(1)} \right] \Big|_x dt - \\ &- \int_t \int_x \left[-\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} \delta u^{(1)} - \frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x} \delta \alpha^{(1)} + c \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} \delta \alpha^{(1)} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Слой 2:

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \sigma_{11}^{(2)} \delta \varepsilon_{11}^{(2)} dt dv &= \int_v \int_t \sigma_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x} dt dv = \int_v \int_t \left(\sigma_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \right. \\ &\left. - \sigma_{11}^{(2)} \delta z \alpha^{(2)} - \sigma_{11}^{(2)} \delta c \alpha^{(2)} - \sigma_{11}^{(2)} \delta \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) dt dv; \\ \int_v \int_t \sigma_{11}^{(2)} \delta \varepsilon_{11}^{(2)} dt dv &= \int_v \int_t \left[\int_t \int_x \left(\sigma_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \sigma_{11}^{(2)} \delta z \alpha^{(2)} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \sigma_{11}^{(2)} \delta c \alpha^{(2)} - \sigma_{11}^{(2)} \delta \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) dz dy \right] dx dt. \end{aligned}$$

Здесь мы вводим обозначения:

$$N_{11}^{(2)} = \int_y \int_z \sigma_{11}^{(2)} dz dy; \quad M_{11}^{(2)} = \int_y \int_z \sigma_{11}^{(2)} z dz dy. \quad (*')$$

Исходя из этих обозначений, выражение для напряжения записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \sigma_{11}^{(2)} \delta \varepsilon_{11}^{(2)} dt dv &= \int_t \int_x N_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dx dt - \int_t \int_x M_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt - \\ &- c \int_t \int_x N_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt - \frac{h_1}{2} \int_t \int_x N_{11}^{(2)} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\int_t \int_x N_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dx dt$, $-\int_t \int_x M_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt$, $-c \int_t \int_x N_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt$ и $-\frac{h_1}{2} \int_t \int_x N_{11}^{(2)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt$ интегрируем по частям.

Члены естественных граничных условий и уравнения 2-го слоя:

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \sigma_{11}^{(2)} \delta \varepsilon_{11}^{(2)} dt dv &= \int_t \left[N_{11}^{(2)} \delta u^{(2)} - M_{11}^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - c N_{11}^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} N_{11}^{(2)} \delta \alpha^{(2)} \right] \Big|_x dt - \\ &- \int_t \int_x \left[\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} \delta u^{(2)} - \frac{\partial M_{11}^{(2)}}{\partial x} \delta \alpha^{(2)} - c \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} \delta \alpha^{(2)} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Слой 3:

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \left(\sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x} \right) dt dv &= \int_v \int_t \frac{1}{2} \left(\sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} + \frac{z}{c} u^{(1)} + \frac{z}{c} \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + u^{(2)} - \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} - \frac{z}{c} u^{(2)} + \frac{z}{c} \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) \right) dt dv; \end{aligned}$$

$$\int_v \int_t \left(\sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x} \right) dt dv = \int_t \int_x \frac{1}{2} \left[\int_y \int_z \left(\sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{z}{c} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{z}{c} \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{z}{c} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{z}{c} \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) dz dy \right] dx dt.$$

Введем следующие обозначения:

$$N_{11}^{(3)} = \int_y \int_z \sigma_{11}^{(3)} dy dz; \quad M_{11}^{(3)} = \int_y \int_z \sigma_{11}^{(3)} z dy dz. \quad (*'')$$

Исходя из этих обозначений, выражение для напряжения записывается следующим образом:

$$\int_v \int_t \left(\sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x} \right) dt dv = \frac{1}{2} \left(\int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dx dt + \frac{h_1}{2} \int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dx dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dx dt + \frac{h_1}{2c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dx dt + \int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dx dt - \right. \\ \left. - \frac{h_2}{2} \int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt - \frac{1}{c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dx dt + \frac{h_1}{2c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt \right);$$

В этом случае некоторые члены интегрируются по частям во второй раз, чтобы освободить их от варьирования:

$$\frac{1}{2} \int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dx dt, \quad \frac{h_1}{4} \int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dx dt, \quad \frac{1}{2c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dx dt, \\ \frac{h_1}{4c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dx dt, \quad \frac{1}{2} \int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dx dt, \quad - \frac{h_2}{4} \int_t \int_x N_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt, \\ - \frac{1}{2c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dx dt, \quad \frac{h_2}{4c} \int_t \int_x M_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dx dt.$$

После варьирования этих членов имеем следующие естественные граничные условия и уравнения в 3-м слое.

$$\int_v \int_t \left(\sigma_{11}^{(3)} \delta \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x} \right) dt dv = \int_t \left[\frac{1}{2} N_{11}^{(3)} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_{11}^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2c} M_{11}^{(3)} \delta u^{(1)} + \right. \\ \left. + \frac{h_1}{4c} M_{11}^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2} N_{11}^{(3)} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{4} N_{11}^{(3)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{1}{2c} M_{11}^{(3)} \delta u^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{h_2}{4c} M_{11}^{(3)} \delta \alpha^{(2)} \right] \Big|_x dt - \int_t \int_x \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta u^{(1)} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta \alpha^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta u^{(1)} - \frac{h_1}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta \alpha^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta u^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{h_2}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta \alpha^{(2)} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} \delta \alpha^{(2)} \right] dx dt. \quad (13)$$

С учетом (2) запишем следующее:

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \sigma_{13}^{(1)} \delta \varepsilon_{13}^{(1)} dt dv &= \int_v \int_t \sigma_{13}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial z} \right) dt dv = \\ &= \int_v \int_t \sigma_{13}^{(1)} \delta \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) dt dv = 0 \\ \int_v \int_t \sigma_{13}^{(2)} \delta \varepsilon_{13}^{(2)} dt dv &= \int_v \int_t \sigma_{13}^{(2)} \delta \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial z} \right) dt dv = \int_v \int_t \sigma_{13}^{(2)} \delta \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) dt dv = 0; \\ \int_v \int_t \sigma_{13}^{(3)} \delta \varepsilon_{13}^{(3)} dv dt &= \int_v \int_t \sigma_{13}^{(3)} \delta \left(\frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial z} \right) dv dt = \int_v \int_t \sigma_{13}^{(3)} \delta \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} (1 + \frac{z}{c}) w_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (1 - \frac{z}{c}) w_2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} \right) - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_1}{4} \alpha^{(2)} \right) \right) \right) dt dv; \\ \int_v \int_t \sigma_{13}^{(1)} \delta \varepsilon_{13}^{(1)} dt dv &= \int_v \int_t \left(\frac{1}{2} \int_t \int_x \left(\sigma_{13}^{(3)} \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} + \sigma_{13}^{(3)} \delta \frac{z}{c} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \sigma_{13}^{(3)} \delta \frac{\partial w_2}{\partial x} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sigma_{13}^{(3)} \delta \frac{z}{c} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \sigma_{13}^{(3)} \delta \frac{1}{c} u^{(1)} \sigma_{13}^{(3)} \delta \frac{h_1}{2c} \alpha^{(1)} - \sigma_{13}^{(3)} \delta \frac{1}{c} u^{(2)} + \frac{h_2}{2c} \alpha^{(2)} \right) dz dy \right) dx dt. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$Q_{13}^{(3)} = \int_y \int_z \sigma_{13}^{(3)} dz dy; \quad M_{13}^{(3)} = \int_y \int_z z \sigma_{13}^{(3)} dz dy. \quad (*''')$$

В этом случае некоторые члены $\frac{1}{2} \int_t \int_x Q_{13}^{(3)} \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} dx dt$, $\frac{1}{2c} \int_t \int_x M_{13}^{(3)} \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} dx dt$, $\frac{1}{2} \int_t \int_x Q_{13}^{(3)} \delta \frac{\partial w_2}{\partial x} dx dt$, $-\frac{1}{2c} \int_t \int_x M_{13}^{(3)} \delta \frac{\partial w_2}{\partial x} dx dt$ интегрируются по частям во второй раз, чтобы освободить их от варьирования. После варьирования этих членов имеем следующие естественные граничные условия и уравнения в 3-м слое.

$$\begin{aligned} \int_v \int_t \sigma_{13}^{(1)} \delta \varepsilon_{13}^{(1)} dt dv &= \int_t \left[\frac{1}{2} Q_{13}^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2c} M_{13}^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2} Q_{13}^{(3)} \delta w_2 - \frac{1}{2c} M_{13}^{(3)} \delta w_2 \right] \Big|_x dt - \\ &- \int_t \int_x \left[\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \delta w_1 + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \delta w_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \delta w_2 - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \delta w_2 - \frac{1}{2c} Q_{13}^{(3)} \delta u_1^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h_1}{4c} Q_{13}^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2c} Q_{13}^{(3)} \delta u_1^{(2)} - \frac{h_2}{4c} Q_{13}^{(3)} \delta \alpha^{(2)} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Из выражений, разработанных для вышеперечисленных слоев, приводим подобные члены по $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, δw_1 , δw_2 и имеем:

$$\int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(1)} dx dt; \quad (15)$$

$$\int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(2)} dx dt; \quad (16)$$

$$\int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x} - c \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_1}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(1)} dx dt; \quad (17)$$

$$\int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(2)}}{\partial x} + c \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_2}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_2}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(2)} dx dt; \quad (18)$$

$$\int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w^1 dx dt; \quad (19)$$

$$\int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w^{(2)} dx dt. \quad (20)$$

Используя выше приведенные преобразования (*), (*'), (*'') и (*'''), члены уравнений (15) - (20) можно выразить следующим образом по закону Гука:

$$\begin{aligned} N_{11}^{(1)} &= \int \int \sigma_{11} dz dy = \int \int E \varepsilon_{11} dz dy = \int \int E \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \\ &= \int \int E \left[\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} - z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right] dz dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{11}^{(1)} &= \int \int z \sigma_{11} dz dy = \int \int z E \varepsilon_{11} dz dy = \int \int z E \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \\ &= \int \int E \left[z \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} - z^2 \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + z c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + z \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right] dz dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{11}^{(2)} &= \int \int \sigma_{11}^{(2)} dz dy = \int \int E \varepsilon_{11}^{(2)} dz dy = \int \int E \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \\ &= \int \int E \left[\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x} - z \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right] dz dy; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{11}^{(2)} &= \int \int z \sigma_{11}^{(2)} dz dy = \int \int z E \varepsilon_{11}^{(2)} dz dy = \int \int z E \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \\ &= \int \int E \left[z \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x} - z^2 \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - z c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - z \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right] dz dy; \end{aligned}$$

$$N_{11}^{(3)} = \int \int \sigma_{11}^{(3)} dz dy = \int \int E_3 \varepsilon_{11}^{(3)} dz dy = \int \int E_3 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x};$$

$$M_{11}^{(3)} = \int \int z \sigma_{11}^{(3)} dz dy = \int \int z E_3 \varepsilon_{11}^{(3)} dz dy = \int \int z E_3 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x};$$

$$Q_{13}^{(3)} = \int \int \sigma_{13}^{(3)} dy dz = \int \int G_3 \varepsilon_{13}^{(3)} dy dz = \int \int G_3 \left(\frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial z} \right) dy dz;$$

$$M_{13}^{(3)} = \int \int z \sigma_{13}^{(3)} dy dz = \int \int z G_3 \varepsilon_{13}^{(3)} dy dz = \int \int z G_3 \left(\frac{\partial u_3^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial z} \right) dy dz;$$

При расчете нормальных напряжений $N_{11}^{(1)}, N_{11}^{(2)}, N_{11}^{(3)}$, перерезывающие силы $Q_{13}^{(3)}$ и изгибающий моменты $M_{11}^{(1)}, M_{11}^{(2)}, M_{11}^{(3)}, M_{13}^{(3)}$ в первом слое, принимая ширину балки (b_0 , (b_0 -постоянной), интегрируем члены по z (высоте):

$$\begin{aligned} N_{11}^{(1)} &= b_0 E_1 \left(\int_z \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dz - \int_z z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dz + c \int_z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dz + \frac{h_1}{2} \int_z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dz \right) = \\ &= b_0 E_1 h_1 \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{11}^{(1)} &= b_0 E_1 \left(\int_z z \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dz - \int_z z^2 \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dz + c \int_z z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dz + \frac{h_1}{2} \int_z z \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} dz \right) = \\ &= b_0 E_1 h_1 \left(\frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1^2 + 3^2 + 3h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{2c^2 + ch_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1^2 + 2h_1}{4} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{11}^{(2)} &= b_0 E_2 \left(\int_z \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dz - \int_z z \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dz - c \int_z \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dz - \frac{h_2}{2} \int_z \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dz \right) = \\ &= b_0 E_1 h_2 \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \end{aligned}$$

$$M_{11}^{(2)} = b_0 E_2 \left(\int_z z \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} dz - \int_z z^2 \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dz - c \int_z z \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dz - \frac{h_2}{2} \int_z z \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} dz \right) =$$

$$= b_0 E_2 h_2 \left(\frac{-h_2 - 2c}{2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2^2 + 3c^2 + 3ch_2}{3} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{-2c^2 - ch_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{-h_2^2 - 2ch_2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right);$$

$$N_{11}^{(3)} = \frac{1}{2} \int_y \int_z \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{z}{c} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1 z}{2c} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{z}{c} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2 z}{2c} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) dy dz = b_0 E_3 c \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + h_1 \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + 2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - h_2 \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) =$$

$$= b_0 E_3 c \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right);$$

$$M_{11}^{(3)} = \frac{1}{2} \int_y \int_z \left(z \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{zh_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{z^2}{c} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1 z^2}{2c} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + z \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \right.$$

$$\left. z \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{z^2}{c} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2 z^2}{2c} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) dy dz = b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + h_1 \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + h_2 \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) = b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right);$$

$$Q_{13}^{(3)} = \frac{1}{2} G_3 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{z}{c} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{z}{c} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{1}{c} u^{(2)} + \frac{h_1}{2c} \alpha^{(2)} - \frac{1}{c} u^{(2)} + \frac{h_1}{2c} \alpha^{(2)} \right) =$$

$$= b_0 G_0 \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right);$$

$$M_{13}^{(3)} = \frac{1}{2} G_3 \left(z \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{z^2}{c} \frac{\partial w_1}{\partial x} + z \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{z^2}{c} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{z}{c} u^{(2)} + \frac{h_1 z}{2c} \alpha^{(2)} - \frac{z}{c} u^{(2)} + \frac{h_1 z}{2c} \alpha^{(2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(b_0 G_3 \frac{2c^2}{3} \frac{\partial w_1}{\partial x} - b_0 G_3 \frac{2c^2}{3} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = b_0 G_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right).$$

Определение общего уравнения для $u^{(1)}$: Вводя обозначения и подставляя выражения для $N_{11}^{(1)}$, $N_{11}^{(3)}$, $M_{11}^{(3)}$ и $Q_{13}^{(3)}$ в уравнение (15), получаем следующее;

$$\int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(1)} dx dt =$$

$$= \int_t \int_x \left[-b_0 E_1 h_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} b_0 E_3 c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2c} b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2c} b_0 G_0 Q_{13}^{(3)} \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) \right] \delta u^{(1)} dx dt;$$

где

$$N_{11}^{(3)} = b_0 E_3 c \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right);$$

$$N_{11}^{(1)} = b_0 E_1 h_1 \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right);$$

$$M_{11}^{(3)} = b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right);$$

$$Q_{13}^{(3)} = b_0 G_0 \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right).$$

Выполняя некоторые математических выкладки, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(1)} dx dt = \\
 & = \int_t \int_x \left[b_0 E_1 h \left(-\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & \quad + b_0 E_3 c \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + \\
 & \quad + b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{h_2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + \\
 & \quad \left. + b_0 G_0 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{1}{2c} u^{(1)} + \frac{h_1}{4c} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{4c} \alpha^{(2)} \right) \right] \delta u^{(1)} dx dt.
 \end{aligned}$$

Сгруппируем приведенные выше уравнения по $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, $\delta w^{(1)}$, $\delta w^{(2)}$ и, выполняя арифметические операции над коэффициентами сгруппированных членов, получаем следующее:

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(1)} dx dt = \\
 & = \int_t \int_x \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \left(-b_0 E_1 h_1 - b_0 E_3 \frac{2c}{3} \right) + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} \left(-b_0 E_3 \frac{c}{3} \right) + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} \left(-b_0 E_3 \frac{ch_1}{3} \right) + \right. \\
 & \quad + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \left(b_0 E_3 \frac{ch_2}{6} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + u^{(1)} \left(b_0 G_3 \frac{1}{2c} \right) + \\
 & \quad \left. + u^{(2)} \left(-b_0 G_3 \frac{1}{2c} \right) + \alpha^{(1)} \left(b_0 G_3 \frac{h_1}{4c} \right) + \alpha^{(2)} \left(b_0 G_3 \frac{h_2}{4c} \right) \right] \delta u^{(1)} dx dt. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Определение общего уравнения для $u^{(2)}$: Вводя обозначения и подставляя выражения для $N_{11}^{(2)}$, $N_{11}^{(3)}$, $M_{11}^{(3)}$, $Q_{13}^{(3)}$ в уравнение (16), получаем следующее:

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(2)} dx dt = \\
 & = \int_t \int_x \left(b_0 E_2 h_2 \left(\frac{h_2 + 2c}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & \quad + b_0 E_3 c \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + \\
 & \quad + b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(+\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + \\
 & \quad \left. + b_0 G_0 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{1}{2c} u^{(1)} - \frac{h_1}{4c} \alpha^{(1)} + u^{(2)} - \frac{h_2}{4c} \alpha^{(2)} \right) \right] \delta u^{(2)} dx dt,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 N_{11}^{(2)} &= b_0 E_1 h_2 \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
 N_{11}^{(3)} &= b_0 E_3 c \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
 M_{11}^{(3)} &= b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
 Q_{13}^{(3)} &= b_0 G_0 \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right).
 \end{aligned}$$

Выполняя некоторые математические выкладки, имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(2)} dx dt = \\
& = \int_t \int_x \left[b_0 E_2 h_2 \left(-\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_{21}+2c}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + \right. \\
& \quad + b_0 E_3 c \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + \\
& \quad + b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(+\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + \\
& \quad \left. + b_0 G_0 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{1}{2c} u^{(1)} - \frac{h_1}{4c} \alpha^{(1)} + u^{(2)} - \frac{h_2}{4c} \alpha^{(2)} \right) \right] \delta u^{(2)} dx dt.
\end{aligned}$$

Сгруппируем приведенные выше уравнения по $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, $\delta w^{(1)}$, $\delta w^{(2)}$ и, выполняя арифметические операции над коэффициентами сгруппированных членов, получаем следующее:

$$\begin{aligned}
& \int_t \int_x \left(-\frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} Q_{13}^{(3)} \right) \delta u^{(2)} dx dt = \\
& = \int_t \int_x \left[\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} \left(-b_0 E_2 h_2 - b_0 E_3 \frac{2c}{3} \right) + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \left(b_0 E_3 \frac{ch_2}{3} \right) + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \left(b_0 E_3 \frac{c}{3} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} \left(-b_0 E_3 \frac{ch_1}{6} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + u^{(1)} \left(-b_0 G_3 \frac{1}{2c} \right) + \\
& \quad \left. + u^{(2)} \left(+b_0 G_3 \frac{1}{2c} \right) + \alpha^{(1)} \left(-b_0 G_3 \frac{h_1}{4c} \right) + \alpha^{(2)} \left(-b_0 G_3 \frac{h_2}{4c} \right) \right] \delta u^{(2)} dx dt. \tag{22}
\end{aligned}$$

Определение общего уравнения для $\alpha^{(1)}$. Вводя обозначения и подставляя выражения для $N_{11}^{(1)}$, $N_{11}^{(3)}$, $M_{11}^{(1)}$, $M_{11}^{(3)}$ и $Q_{13}^{(3)}$ в уравнение (22), получаем следующее:

$$\begin{aligned}
& \int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x} - c \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_1}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(1)} dx dt = \\
& = \int_t \int_x \left(b_0 E_1 h_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_1+2c}{2} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1^2+3^2+3h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{2c^2+ch_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1^2+2h_1}{4} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right) - \right. \\
& \quad - b_0 E_1 h_1 c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1+2c}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right) - b_0 E_1 \frac{h_1^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{h_1+2c}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right) - b_0 E_3 \frac{ch_1}{4} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) - \\
& \quad \left. - b_0 E_3 \frac{ch_1}{12} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + b_0 G_0 \frac{h_1}{4c} \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) \right) \delta \alpha^{(1)} dx dt,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_{11}^{(1)} &= b_0 E_1 h_1 \left(\frac{h_1+2c}{2} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1^2+3^2+3h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{2c^2+ch_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1^2+2h_1}{4} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right); \\
N_{11}^{(1)} &= b_0 E_1 h_1 \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1+2c}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + c \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \right); \\
N_{11}^{(3)} &= b_0 E_3 c \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
M_{11}^{(3)} &= b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
Q_{13}^{(3)} &= b_0 G_0 \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

Выполняя некоторые математические выкладки, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x} - c \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_1}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(1)} dx dt = \\
 & = \int_t \int_x \left[b_0 E_1 h_1 \left(\frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1^2 + 3^2 + 3h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{2c^2 + ch_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_1^2 + 2h_1}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} \right) + b_0 E_1 h_1 c \left(-\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + b_0 E_1 \frac{h_1^2}{3} \left(-\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1 + 2c}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} \right) + b_0 E_3 \frac{ch_1}{4} \left(-\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + b_0 E_3 \frac{ch_1}{12} \left(-\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + b_0 G_0 \frac{h_1}{4c} \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) \right] \delta \alpha^{(1)} dx dt.
 \end{aligned}$$

Сгруппируем приведенные выше уравнения по $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, $\delta w^{(1)}$, $\delta w^{(2)}$ и, выполняя арифметические операции над коэффициентами сгруппированных членов, получаем следующее:

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x} - c \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_1}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(1)} dx dt = \\
 & = \int_t \int_x \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} (-b_0 E_3 \frac{ch_1}{3}) + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} (-b_0 E_3 \frac{ch_1}{6}) + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} (-b_0 E_1 \frac{h_1^3}{12} - b_0 E_3 \frac{ch_1^2}{6}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{ch_1 h_2}{12}) + \frac{\partial w_1}{\partial x} (b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \frac{\partial w_2}{\partial x} (b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + u^{(1)} (b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \right. \\
 & \quad \left. + u^{(2)} (-b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \alpha^{(1)} (b_0 G_3 \frac{h_1^2}{8}) + \alpha^{(2)} (b_0 G_3 \frac{h_1 h_2}{8}) \right) \delta \alpha^{(1)} dx dt. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Определение общего уравнения для $\alpha^{(2)}$. Вводя обозначения и подставляя выражения для $N_{11}^{(2)}$, $N_{11}^{(3)}$, $M_{11}^{(2)}$, $M_{11}^{(3)}$, $Q_{13}^{(3)}$ в уравнение (18), получаем следующее:

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(2)}}{\partial x} + c \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_2}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_2}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(2)} dx dt = \\
 & = \int_t \int_x \left[b_0 E_2 h_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2^2 + 3c^2 + 3ch_2}{3} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(-2c^2 - ch_2)}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{(-h_2^2 - 2ch_2)}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + b_0 E_2 h_2 c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) - b_0 E_2 \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + b_0 E_3 \frac{ch_2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) - b_0 E_3 \frac{ch_2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + b_0 G_0 \frac{h_2}{4c} \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) \right] \delta \alpha^{(2)} dx dt,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_{11}^{(2)} &= b_0 E_2 h_2 \left(\frac{-h_2 - 2c}{2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2^2 + 3c^2 + 3ch_2}{3} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{-2c^2 - ch_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{-h_2^2 - 2ch_2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
N_{11}^{(2)} &= b_0 E_1 h_2 \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - c \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
N_{11}^{(3)} &= b_0 E_3 c \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
M_{11}^{(3)} &= b_0 E_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right); \\
Q_{13}^{(3)} &= b_0 G_0 \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

Выполняя некоторые математические выкладки, имеем:

$$\begin{aligned}
&\int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(2)}}{\partial x} + c \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial N_{11}^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_2}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_2}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_2}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(2)} dx dt = \\
&= \int_t \int_x \left[b_0 E_2 h_2 \left(\frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{h_2^2 + 3c^2 + 3ch_2}{3} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(-2c^2 - ch_2)}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{(-h_2^2 - 2ch_2)}{4} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + b_0 E_2 h_2 c \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) - b_0 E_2 \frac{h_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(-h_2 - 2c)}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + b_0 E_3 \frac{ch_2}{4} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) - b_0 E_3 \frac{ch_2}{12} \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \right) + b_0 G_0 \frac{h_2}{4c} \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) \right] \delta \alpha^{(2)} dx dt.
\end{aligned}$$

Сгруппируем приведенные выше уравнения по $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, $\delta w^{(1)}$, $\delta w^{(2)}$ и, выполняя арифметические операции над коэффициентами сгруппированных членов, получаем следующее:

$$\begin{aligned}
&\int_t \int_x \left(\frac{\partial M_{11}^{(1)}}{\partial x} - c \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial N_{11}^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial N_{11}^{(3)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4c} \frac{\partial M_{11}^{(3)}}{\partial x} + \frac{h_1}{4c} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta \alpha^{(1)} dx dt = \\
&= \int_t \int_x \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} \left(b_0 E_3 \frac{ch_2}{3} \right) + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \left(-b_0 E_2 \frac{h_2^3}{12} - b_0 E_3 \frac{ch_2^2}{6} \right) + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \left(b_0 E_3 \frac{ch_2}{6} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} \left(b_0 E_3 \frac{ch_1 h_2}{12} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial x} \left(b_0 G_3 \frac{h_2}{4} \right) + \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(b_0 G_3 \frac{h_2}{4} \right) + u^{(1)} \left(b_0 G_3 \frac{h_2}{4c} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha^{(1)} \left(b_0 G_3 \frac{h_1 h_2}{8c} \right) + u^{(2)} \left(-b_0 G_3 \frac{h_2}{4c} \right) + \alpha^{(2)} \left(b_0 G_3 \frac{h_2^2}{8c} \right) \right) \delta \alpha^{(2)} dx dt.
\end{aligned} \tag{24}$$

Определение общего уравнения для w_1 : Вводя обозначения и подставляя выражения для $M_{13}^{(3)}$ $Q_{13}^{(3)}$ в уравнение (19), получаем следующее

$$\begin{aligned}
&\int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w_1 dx dt = \int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) - \frac{1}{2c} b_0 G_3 \frac{c^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right) \delta w_1 dx dt,
\end{aligned}$$

где

$$Q_{13}^{(3)} = b_0 G_0 \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right);$$

$$M_{13}^{(3)} = b_0 G_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right);$$

Выполняя некоторые математические выкладки, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w_1 dx dt = \\ & = \int_t \int_x [b_0 G_3 \left(-\frac{c}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{h_1}{4} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + \\ & \quad + b_0 G_3 \frac{c}{3} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)] \delta w_1 dx dt. \end{aligned}$$

Сгруппируем приведенные выше уравнения по $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, $\delta w^{(1)}$, $\delta w^{(2)}$ и, выполняя арифметические операции над коэффициентами сгруппированных членов, получаем следующее уравнение.

$$\begin{aligned} \int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w_1 dx dt &= \int_t \int_x \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left(-b_0 G_3 \frac{2c}{3} \right) + \right. \\ & \quad + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \left(-b_0 G_3 \frac{c}{3} \right) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \left(-b_0 G_3 \frac{h_1}{4} \right) + \\ & \quad \left. + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \left(-b_0 G_3 \frac{h_2}{4} \right) \right] \delta w_1 dx dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Определение общего уравнения для w_2 . Вводя обозначения и подставляя выражения для $M_{13}^{(3)}$ $Q_{13}^{(3)}$ в уравнение (20), получаем следующее

$$\begin{aligned} \int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w_2 dx dt &= \int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) + \frac{1}{2c} b_0 G_3 \frac{c^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right) \delta w_2 dx dt, \end{aligned}$$

где

$$Q_{13}^{(3)} = b_0 G_0 \left(c \frac{\partial w_1}{\partial x} + c \frac{\partial w_2}{\partial x} + u^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} - u^{(2)} + \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right);$$

$$M_{13}^{(3)} = b_0 G_3 \frac{c^2}{3} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right).$$

Выполняя некоторые математические выкладки, имеем:

$$\begin{aligned} \int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w_2 dx dt &= \int_t \int_x \left[b_0 G_3 \left(-\frac{c}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{h_1}{4} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_2}{4} \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \right) + b_0 G_3 \frac{c}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \right] \delta w_2 dx dt. \end{aligned}$$

Сгруппируем приведенные выше уравнения по $\delta u^{(1)}$, $\delta u^{(2)}$, $\delta \alpha^{(1)}$, $\delta \alpha^{(2)}$, $\delta w^{(1)}$, $\delta w^{(2)}$ и, выполняя арифметические операции над коэффициентами сгруппированных членов, получаем следующее уравнение.

$$\begin{aligned} \int_t \int_x \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{13}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial M_{13}^{(3)}}{\partial x} \right) \delta w_2 dx dt &= \int_t \int_x \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left(-b_0 G_3 \frac{c}{3} \right) + \right. \\ & \quad + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \left(-b_0 G_3 \frac{2c}{3} \right) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} \left(-b_0 G_3 \frac{h_1}{4} \right) + \\ & \quad \left. + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \left(-b_0 G_3 \frac{h_2}{4} \right) \right] \delta w_2 dx dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Вычисления работы объемных, поверхностных и торцовых сил. Работа, выполняемая трехслойными стержнями:

$$\begin{aligned} \int_t \delta A dt &= \int_t \int_v \sum_{i=1}^3 F_i \delta u_i dv + \int_t \int_s \sum_{i=1}^3 q_i \delta u_i ds dt + \int_t \int_{s_1} \sum_{k=1}^3 p_i^{(k)} \delta u_i^{(k)}; \\ \int_t \delta A dt &= \int_t \int_v \sum_{k=1}^3 F_1^{(k)} \delta u_1^{(k)} dv dt + \int_t \int_v \sum_{k=1}^3 F_3^{(k)} \delta u_3^{(k)} dv dt + \int_t \int_l \sum_{k=1}^3 q_1^{(k)} \delta u_1^{(k)} dl dt + \\ &+ \int_t \int_l \sum_{k=1}^3 q_3^{(k)} \delta u_3^{(k)} dl dt + \int_t \int_{s_1} \sum_{k=1}^3 f_1^{(k)} \delta u_1^{(k)} ds_1 dt + \int_t \int_{s_1} \sum_{k=1}^3 f_3^{(k)} \delta u_3^{(k)} ds_1 dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t \delta A dt &= \int_t \int_v \left[P_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + P_1^{(2)} \delta u_1^{(2)} + P_1^{(3)} \delta u_1^{(3)} + P_3^{(1)} \delta u_3^{(1)} + \right. \\ &+ P_3^{(2)} \delta u_3^{(2)} + P_3^{(3)} \delta u_3^{(3)} \left. \right] dv dt + \int_t \int_l \left[q_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + q_1^{(2)} \delta u_1^{(2)} + q_1^{(3)} \delta u_1^{(3)} + \right. \\ &+ q_3^{(1)} \delta u_3^{(1)} + q_3^{(2)} \delta u_3^{(2)} + q_3^{(3)} \delta u_3^{(3)} \left. \right] ds_l dt + \int_t \int_{s_1} \left[f_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + f_1^{(2)} \delta u_1^{(2)} + \right. \\ &+ f_1^{(3)} \delta u_1^{(3)} + f_3^{(1)} \delta u_3^{(1)} + f_3^{(2)} \delta u_3^{(2)} + f_3^{(3)} \delta u_3^{(3)} \left. \right] ds_1 dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t \delta A dt &= \int_t \int_v \left[F_1^{(1)} \delta \left(u^{(1)} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) \alpha^{(1)} \right) + \right. \\ &+ F_1^{(2)} \delta \left(u^{(2)} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) \alpha^{(2)} \right) + \\ &+ F_1^{(3)} \delta \left(\left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \right) \right) + \\ &+ F_3^{(1)} \delta w_1 + F_3^{(2)} \delta w_2 + F_3^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \right) \left. \right] dv dt \\ &+ \int_t \int_s \left[q_1^{(1)} \delta \left(u^{(1)} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) \alpha^{(1)} \right) + q_1^{(2)} \delta \left(u^{(2)} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) \alpha^{(2)} \right) + \right. \\ &+ q_1^{(3)} \delta \left(\left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \right) \right) + \\ &+ q_3^{(1)} \delta w_1 + q_3^{(2)} \delta w_2 + q_3^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \right) \left. \right] ds dt + \\ &+ \int_t \int_{s_1} \left[f_1^{(1)} \delta \left(u^{(1)} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) \alpha^{(1)} \right) + f_1^{(2)} \delta \left(u^{(2)} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) \alpha^{(2)} \right) + \right. \\ &+ f_1^{(3)} \delta \left(\left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \right) \right) + \\ &+ f_1^{(3)} \delta \left(\left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \right) \right) + \\ &+ f_3^{(1)} \delta w_1 + f_3^{(2)} \delta w_2 + f_3^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \right) \left. \right] ds_1 dt \end{aligned}$$

Вычисляем объемные силы:

$$\begin{aligned} \int_t \delta A dt &= \int_t \int_v \left[F_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + F_1^{(2)} \delta u_1^{(2)} + F_1^{(3)} \delta u_1^{(3)} + F_3^{(1)} \delta u_3^{(1)} + \right. \\ &+ F_3^{(2)} \delta u_3^{(2)} + F_3^{(3)} \delta u_3^{(3)} \left. \right] dv dt = \int_t \int_v \left[F_1^{(1)} \delta \left(u^{(1)} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) \alpha^{(1)} \right) + \right. \\ &+ F_1^{(2)} \delta \left(u^{(2)} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) \alpha^{(2)} \right) + F_1^{(3)} \delta \left(\left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \right) \right) + F_3^{(1)} \delta w_1 + F_3^{(2)} \delta w_2 + \\ &+ F_3^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \right) \left. \right] dv dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t \text{Adt} = & \int_t \int_x \left[\int_y \int_z \left[F_1^{(1)} \delta u^{(1)} - F_1^{(1)} z \delta \alpha^{(1)} + c F_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \right. \right. \\
 & + \frac{h_1}{2} F_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + F_1^{(2)} \delta u^{(2)} - F_1^{(2)} z \delta \alpha^{(2)} - c F_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{4} F_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} + \\
 & + \frac{1}{2} F_1^{(3)} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{4} F_1^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{z}{2c} F_1^{(3)} z \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{4c} F_1^{(3)} z \delta \alpha^{(1)} + \\
 & + \frac{1}{2} F_1^{(3)} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{4} F_1^{(3)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{1}{2c} F_1^{(3)} z \delta u^{(2)} + \frac{h_2}{4c} F_1^{(3)} z \delta \alpha^{(2)} + \\
 & + F_1^{(1)} \delta w_1 + F_1^{(2)} \delta w_2 + \frac{1}{2} F_3^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2c} F_3^{(3)} z \delta w_1 + \frac{1}{2} F_3^{(3)} \delta w_2 - \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2c} F_3^{(3)} z \delta w_2 \right] dz dy \right] dx dt.
 \end{aligned}$$

Приводим обозначения:

$$\begin{aligned}
 \overline{F}_1^{(1)} &= \int_y \int_z F_1^{(1)} dy dz, \quad \overline{F}_1^{(2)} = \int_y \int_z F_1^{(2)} dy dz, \quad \overline{F}_1^{(3)} = \int_y \int_z F_1^{(3)} dy dz, \\
 MF_1^{(1)} &= \int_y \int_z F_1^{(1)} z dy dz, \quad MF_1^{(2)} = \int_y \int_z F_1^{(2)} z dy dz, \quad MF_1^{(3)} = \int_y \int_z F_1^{(3)} z dy dz, \\
 \overline{F}_3^{(1)} &= \int_y \int_z F_3^{(1)} dy dz, \quad \overline{F}_3^{(2)} = \int_y \int_z F_3^{(2)} dy dz, \quad \overline{F}_3^{(3)} = \int_y \int_z F_3^{(3)} dy dz, \\
 MF_3^{(1)} &= \int_y \int_z F_3^{(1)} z dy dz, \quad MF_3^{(2)} = \int_y \int_z F_3^{(2)} z dy dz, \quad MF_3^{(3)} = \int_y \int_z F_3^{(3)} z dy dz.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_t \text{Adt} = & \int_t \int_x \left[\overline{F}_1^{(1)} \delta u^{(1)} - MF_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + c \overline{F}_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \overline{F}_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \overline{F}_1^{(2)} \delta u^{(2)} - \right. \\
 & - MF_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - c \overline{F}_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_1}{2} \overline{F}_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} + \frac{1}{2} \overline{F}_1^{(3)} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \overline{F}_1^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \\
 & + \frac{1}{2c} MF_1^{(3)} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{4c} MF_1^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2} \overline{F}_1^{(3)} \delta u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \overline{F}_1^{(3)} \delta \alpha^{(2)} - \\
 & - \frac{1}{2c} MF_1^{(3)} \delta u^{(2)} + \frac{h_2}{4c} MF_1^{(3)} \delta \alpha^{(2)} + \overline{F}_3^{(1)} \delta w_1 + \overline{F}_3^{(2)} \delta w_2 + \frac{1}{2} \overline{F}_3^{(3)} \delta w_1 + \\
 & \left. + \frac{1}{2c} MF_3^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2} \overline{F}_3^{(3)} \delta w_2 - \frac{1}{2c} MF_3^{(3)} \delta w_2 \right] dx dt. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Вычисляем поверхностные силы.

$$\begin{aligned}
 \int_t \delta \text{Adt} = & \int_t \int_l \left[q_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + q_1^{(2)} \delta u_1^{(2)} + q_1^{(3)} \delta u_1^{(3)} + q_3^{(1)} \delta u_3^{(1)} + \right. \\
 & + q_3^{(2)} \delta u_3^{(2)} + q_3^{(3)} \delta u_3^{(3)} \left. \right] dl dt = \int_t \int_l \left[q_1^{(1)} \delta \left(u^{(1)} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) \alpha^{(1)} \right) + \right. \\
 & + q_1^{(2)} \delta \left(u^{(2)} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) \alpha^{(2)} \right) + q_1^{(3)} \delta \left(\left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} \right) + \right. \\
 & + \left. \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \right) \right) + q_3^{(1)} \delta w_1 + q_3^{(2)} \delta w_2 + \\
 & \left. + q_3^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \right) \right] dl dt; \\
 \int_t \delta \text{Adt} = & \int_t \int_l \left[q_1^{(1)} \delta \left(u^{(1)} - z \alpha^{(1)} + c \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} \right) + q_1^{(2)} \delta \left(u^{(2)} - \right. \right. \\
 & - z \alpha^{(2)} - c \alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \left. \right) + q_1^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} + \frac{z}{c} \frac{1}{2} u^{(1)} + \right. \\
 & + \frac{z}{c} \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} + \frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} - \frac{z}{c} \frac{1}{2} u^{(2)} + \frac{z}{c} \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \left. \right) + q_3^{(1)} \delta w_1 + \\
 & \left. + q_3^{(2)} w_2 + q_3^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} \frac{z}{c} w_1 + \frac{1}{2} w_2 - \frac{z}{c} \frac{1}{2} w_2 \right) \right] dl dt.
 \end{aligned}$$

Приводим обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{q}_1^{(1)} &= \int \int_{y,z} q_1^{(1)} dydz, & \bar{q}_1^{(2)} &= \int \int_{y,z} q_1^{(2)} dydz, & \bar{q}_1^{(3)} &= \int \int_{y,z} q_1^{(3)} dydz, \\ Mq_1^{(1)} &= \int \int_{y,z} q_1^{(1)} z dydz, & Mq_1^{(2)} &= \int \int_{y,z} q_1^{(2)} z dydz, & Mq_1^{(3)} &= \int \int_{y,z} q_1^{(3)} z dydz, \\ \bar{q}_3^{(1)} &= \int \int_{y,z} q_3^{(1)} dydz, & \bar{q}_3^{(2)} &= \int \int_{y,z} q_3^{(2)} dydz, & \bar{q}_3^{(3)} &= \int \int_{y,z} q_3^{(3)} dydz, \\ Mq_3^{(1)} &= \int \int_{y,z} q_3^{(1)} z dydz, & Mq_3^{(2)} &= \int \int_{y,z} q_3^{(2)} z dydz, & Mq_3^{(3)} &= \int \int_{y,z} q_3^{(3)} z dydz.\end{aligned}$$

После этого можно записать вид уравнения:

$$\begin{aligned}\int_t Adt &= \int \int_t \left[\bar{q}_1^{(1)} \delta u^{(1)} - Mq_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + c\bar{q}_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \bar{q}_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \right. \\ &+ \bar{q}_1^{(2)} \delta u^{(2)} - Mq_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - c\bar{q}_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_1}{2} \bar{q}_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} + \frac{1}{2} \bar{q}_1^{(3)} \delta u^{(1)} + \\ &+ \frac{h_1}{4} \bar{q}_1^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2c} Mq_1^{(3)} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{4c} Mq_1^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2} \bar{q}_1^{(3)} \delta u^{(2)} - \\ &- \frac{h_2}{4} \bar{q}_1^{(3)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{1}{2c} Mq_1^{(3)} \delta u^{(2)} + \frac{h_2}{4c} Mq_1^{(3)} \delta \alpha^{(2)} + \bar{q}_3^{(1)} \delta w_1 + \\ &\left. + \bar{q}_3^{(2)} \delta w_2 + \frac{1}{2} \bar{q}_3^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2c} Mq_3^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2} \bar{q}_3^{(3)} \delta w_2 - \frac{1}{2c} Mq_3^{(3)} \delta w_2 \right] dldt.\end{aligned}\quad (28)$$

Вычисляем торцевые силы.

$$\begin{aligned}\int_t \delta Adt &= \int \int_t \left[f_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + f_1^{(2)} \delta u_1^{(2)} + f_1^{(3)} \delta u_1^{(3)} + f_3^{(1)} \delta u_3^{(1)} + f_3^{(2)} \delta u_3^{(2)} + \right. \\ &+ \left. f_3^{(3)} \delta u_3^{(3)} \right] dldt = \int \int_t \left[f_1^{(1)} \delta \left(u^{(1)} - z\alpha^{(1)} + c\alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \alpha^{(1)} \right) + \right. \\ &+ f_1^{(2)} \delta \left(u^{(2)} - z\alpha^{(2)} - c\alpha^{(2)} - \frac{h_2}{2} \alpha^{(2)} \right) + f_1^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} + \right. \\ &+ \left. \frac{z}{c} \frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{z}{c} \frac{h_1}{4} \alpha^{(1)} + \frac{1}{2} u^{(2)} - \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} - \frac{z}{c} \frac{1}{2} u^{(2)} + \frac{z}{c} \frac{h_2}{4} \alpha^{(2)} \right) + \\ &\left. + f_3^{(1)} \delta w_1 + f_3^{(2)} w_2 + f_3^{(3)} \delta \left(\frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} \frac{z}{c} w_1 + \frac{1}{2} w_2 - \frac{z}{c} \frac{1}{2} w_2 \right) \right] ds_1 dt.\end{aligned}$$

Приводим преобразования:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1^{(1)} &= \int \int_{y,z} f_1^{(1)} dydz, & \bar{f}_1^{(2)} &= \int \int_{y,z} f_1^{(2)} dydz, & \bar{f}_1^{(3)} &= \int \int_{y,z} f_1^{(3)} dydz, \\ Mf_1^{(1)} &= \int \int_{y,z} f_1^{(1)} z dydz, & Mf_1^{(2)} &= \int \int_{y,z} f_1^{(2)} z dydz, & Mf_1^{(3)} &= \int \int_{y,z} f_1^{(3)} z dydz, \\ \bar{f}_3^{(1)} &= \int \int_{y,z} f_3^{(1)} dydz, & \bar{f}_3^{(2)} &= \int \int_{y,z} f_3^{(2)} dydz, & \bar{f}_3^{(3)} &= \int \int_{y,z} f_3^{(3)} dydz, \\ Mf_3^{(1)} &= \int \int_{y,z} f_3^{(1)} z dydz, & Mf_3^{(2)} &= \int \int_{y,z} f_3^{(2)} z dydz, & Mf_3^{(3)} &= \int \int_{y,z} f_3^{(3)} z dydz.\end{aligned}$$

После этого можно написать вид уравнения:

$$\begin{aligned}\int_t Adt &= \int \int_t \left[\bar{f}_1^{(1)} \delta u^{(1)} - Mf_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + c\bar{f}_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{h_1}{2} \bar{f}_1^{(1)} \delta \alpha^{(1)} + \right. \\ &+ \bar{f}_1^{(2)} \delta u^{(2)} - Mf_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - c\bar{f}_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{h_1}{2} \bar{f}_1^{(2)} \delta \alpha^{(2)} + \frac{1}{2} \bar{f}_1^{(3)} \delta u^{(1)} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h_1}{4} \bar{f}_1^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2c} M f_1^{(3)} \delta u^{(1)} + \frac{h_1}{4c} M f_1^{(3)} \delta \alpha^{(1)} + \frac{1}{2} \bar{f}_1^{(3)} \delta u^{(2)} - \\
 & - \frac{h_2}{4} \bar{f}_1^{(3)} \delta \alpha^{(2)} - \frac{1}{2c} M f_1^{(3)} \delta u^{(2)} + \frac{h_2}{4c} M f_1^{(3)} \delta \alpha^{(2)} + \bar{f}_3^{(1)} \delta w_1 \\
 & + \bar{f}_3^{(2)} \delta w_2 + \frac{1}{2} \bar{f}_3^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2c} M f_3^{(3)} \delta w_1 + \frac{1}{2} \bar{f}_3^{(3)} \delta w_2 - \frac{1}{2c} M f_3^{(3)} \delta w_2 \Big] dldt.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Вставляя формулы кинетической энергии (10), потенциальной энергии (15)-(20) и работы внешних сил (27)-(29) в (1) получаем:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(-\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(-\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right) - \\
 & - \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} (-b_0 E_1 h_1 - b_0 E_3 \frac{2c}{3}) + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} (-b_0 E_3 \frac{c}{3}) + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} (-b_0 E_3 \frac{ch_1}{3}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{ch_2}{6}) + \frac{\partial w_1}{\partial x} (\frac{1}{2} b_0 G_3) + \frac{\partial w_2}{\partial x} (\frac{1}{2} b_0 G_3) + u^{(1)} (b_0 G_3 \frac{1}{2c}) + \right. \\
 & \quad \left. + u^{(2)} (-b_0 G_3 \frac{1}{2c}) + \alpha^{(1)} (b_0 G_3 \frac{h_1}{4c}) + \alpha^{(2)} (b_0 G_3 \frac{h_2}{4c}) + \bar{F}_1^{(1)} + \frac{1}{2} \bar{F}_1^{(3)} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2c} M F_1^{(3)} + \bar{q}_1^{(1)} + \frac{1}{2} \bar{q}_1^{(3)} + \frac{1}{2c} M q_1^{(3)} + \bar{f}_1^{(1)} + \frac{1}{2} \bar{f}_1^{(3)} + \frac{1}{2c} M f_1^{(3)} \right] \delta u^{(1)} = 0; \\
 & \left[\left(-\rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \rho c F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(-\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right) - \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} (-b_0 E_2 h_2 - \right. \\
 & \quad \left. - b_0 E_3 \frac{2c}{3}) + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{c}{3}) + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} (-b_0 E_3 \frac{ch_1}{6}) + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{ch_2}{3}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial w_1}{\partial x} (-\frac{1}{2} b_0 G_3) + \frac{\partial w_2}{\partial x} (-\frac{1}{2} b_0 G_3) + u^{(1)} (-b_0 G_3 \frac{1}{2c}) + u^{(2)} (+b_0 G_3 \frac{1}{2c}) + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha^{(1)} (-b_0 G_3 \frac{h_1}{4c}) + \alpha^{(2)} (-b_0 G_3 \frac{h_2}{4c}) + \bar{F}_1^{(2)} + \frac{1}{2} \bar{F}_1^{(3)} - \frac{1}{2c} M F_1^{(3)} + \bar{q}_1^{(2)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \bar{q}_1^{(3)} - \frac{1}{2c} M q_1^{(3)} + \bar{f}_1^{(2)} \delta u^{(2)} + \frac{1}{2} \bar{f}_1^{(3)} \delta u^{(2)} - \frac{1}{2c} M f_1^{(3)} \delta u^{(2)} \right] \delta u^{(2)} = 0; \\
 & \left[\left(-\rho c F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \rho \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \rho c^2 F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho c \frac{h_1}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \rho \frac{h_1}{2} c F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \rho \frac{h_1^2}{4} F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(-\frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{h_1^2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_1^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_1}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_2 h_1}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{h_1}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{h_2 h_1}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right) - \\
 & - \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} (-b_0 E_3 \frac{ch_1}{3}) + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} (-b_0 E_3 \frac{ch_1}{6}) + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} (-b_0 E_1 \frac{h_1^3}{12} - b_0 E_3 \frac{ch_1^2}{6}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{ch_1 h_2}{12}) + \frac{\partial w_1}{\partial x} (b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \frac{\partial w_2}{\partial x} (b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + u^{(1)} (b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \right. \\
 & \quad \left. + u^{(2)} (-b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \alpha^{(1)} (b_0 G_3 \frac{h_1^2}{8}) + \alpha^{(2)} (b_0 G_3 \frac{h_1 h_2}{8}) - M F_1^{(1)} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c\bar{F}_1^{(1)} + \frac{h_1}{2}\bar{F}_1^{(1)} + \frac{h_1}{4}\bar{F}_1^{(3)} + \frac{h_1}{4c}MF_1^{(3)} - Mq_1^{(1)} + c\bar{q}_1^{(1)} + \frac{h_1}{2}\bar{q}_1^{(1)} + \frac{h_1}{4}\bar{q}_1^{(3)} + \\
& + \frac{h_1}{4c}Mq_1^{(3)} - Mf_1^{(1)} + c\bar{f}_1^{(1)} + \frac{h_1}{2}\bar{f}_1^{(1)} + \frac{h_1}{4}\bar{f}_1^{(3)} + \frac{h_1}{4c}Mf_1^{(3)} \Big] \delta\alpha^{(1)} = 0; \\
& \left[\left(\rho c F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} + \rho \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \rho c^2 F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \right. \right. \\
& - \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \rho c \frac{h_2}{2} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} - \rho \frac{h_2^2}{4} F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \right. \\
& + \frac{h_1 h_2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{h_1 h_2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{h_2}{2} \rho F \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \\
& \left. \left. - \frac{h_2^2}{4} \rho F \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{h_2}{2c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{h_2^2}{4c^2} \rho I_y \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial t^2} \right) \right) - \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{ch_2}{3}) + \right. \\
& + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{ch_2}{6}) + \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial x^2} \left(-b_0 E_2 \frac{h_2^3}{12} - b_0 E_3 \frac{ch_2^2}{6} \right) + \frac{\partial^2 \alpha^{(1)}}{\partial x^2} (b_0 E_3 \frac{ch_1 h_2}{12}) + \\
& + \frac{\partial w_1}{\partial x} (b_0 G_3 \frac{h_2}{4}) + \frac{\partial w_2}{\partial x} (b_0 G_3 \frac{h_2}{4}) + u^{(1)} (b_0 G_3 \frac{h_2}{4c}) + \alpha^{(1)} (b_0 G_3 \frac{h_1 h_2}{8c}) + \\
& + u^{(2)} \left(-b_0 G_3 \frac{h_2}{4c} \right) + \alpha^{(2)} \left(b_0 G_3 \frac{h_2^2}{8c} \right) \Big) - MF_1^{(2)} - c\bar{F}_1^{(2)} - \frac{h_1}{2}\bar{F}_1^{(2)} - \frac{h_2}{4}\bar{F}_1^{(3)} + \\
& + \frac{h_2}{4c}MF_1^{(3)} - Mq_1^{(2)} - c\bar{q}_1^{(2)} - \frac{h_1}{2}\bar{q}_1^{(2)} - \frac{h_2}{4}\bar{q}_1^{(3)} + \frac{h_2}{4c}Mq_1^{(3)} - Mf_1^{(2)} - c\bar{f}_1^{(2)} - \\
& \left. - \frac{h_1}{2}\bar{f}_1^{(2)} - \frac{h_2}{4}\bar{f}_1^{(3)} + \frac{h_2}{4c}Mf_1^{(3)} \right] \delta\alpha^{(2)} = 0; \\
& \left[\left(-\rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(-\rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) \right) - \right. \\
& - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} (-b_0 G_3 \frac{2c}{3}) + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} (-b_0 G_3 \frac{c}{3}) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} (-b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \right. \\
& + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \left(-b_0 G_3 \frac{h_2}{4} \right) \Big) + \bar{F}_3^{(1)} + \frac{1}{2}\bar{F}_3^{(3)} + \frac{1}{2c}MF_3^{(3)} + \bar{q}_3^{(1)} + \\
& \left. + \frac{1}{2}\bar{q}_3^{(3)} + \frac{1}{2c}Mq_3^{(3)} + \bar{f}_3^{(1)} + \frac{1}{2}\bar{f}_3^{(3)} + \frac{1}{2c}Mf_3^{(3)} \right] \delta w_1 = 0; \\
& \left[\left(-\rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(-\rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \rho \frac{1}{c^2} I_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right) \right) - \right. \\
& - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} (-b_0 G_3 \frac{c}{3}) + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} (-b_0 G_3 \frac{2c}{3}) + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} (-b_0 G_3 \frac{h_1}{4}) + \right. \\
& + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \left(\frac{1}{2} b_0 G_3 \right) + \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} \left(-b_0 G_3 \frac{h_2}{4} \right) \Big) + \bar{F}_3^{(2)} + \frac{1}{2}\bar{F}_3^{(3)} - \frac{1}{2c}MF_3^{(3)} + \bar{q}_3^{(2)} + \bar{q}_3^{(2)} - \\
& \left. - \frac{1}{2c}Mq_3^{(3)} + \bar{f}_3^{(2)} + \bar{f}_3^{(2)} - \frac{1}{2c}Mf_3^{(3)} \right] \delta w_2 = 0. \tag{30}
\end{aligned}$$

Таким образом, разработана математическая модель математической модели деформирования трёхслойных стержней при учете вариаций кинетической и потенциальной энергий, а также работы внешних объемных и поверхностных сил. Дальнейшая научная работа предполагает создание вычислительного алгоритма расчета деформации трёхслойных стержней.

4 Заключение

В заключении можно отметить следующие основные моменты. В рамках изложенной работы определены вариации кинетической и потенциальной энергий, вариации работы внешних объемных и поверхностных сил, с каковой целью был применен принцип Остроградского – Гамильтона. Выведена математическая модель деформации трехслойных стержней.

Литература

- [1] *Болотин В.* Механика многослойных конструкций / М.: Машиностроение, – 1980. – 375 с.
- [2] *Горшков А.Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2005. – 576 с.
- [3] *Горшков А.Г.* Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, – 2005. – № 1. – С. 16–22.
- [4] *Leonenko D.V.* Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation // Mechanics of Solids., – 2012. Т. 47. – № 1. – Р. 111–118.
- [5] *Старовойтов Э.И.* Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня. // Теоретическая и прикладная механика. международный научно-технический сборник. БНТУ., Минск –2013. – Т. 28. – С. 22–26.
- [6] *Старовойтов Э.И.* Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней. / М.: Изд-во МАИ, – 2016. – 184 с.
- [7] *Плескачевский Ю.М.* Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле// Проблемы машиностроения и автоматизации., – 2017. – № 32. – С. 5–12.
- [8] *Журавков М.А.* Термосиловой изгиб трехслойной балки со сжимаемым наполнителем.// Доклады Нацональнай академии наук Беларусі., – 2017. – Т. 61. – № 4. – С. 96–102.
- [9] *Старовойтов Э.И.* Трехслойные стержни в терморadiационных полях. / Минск.: Беларуская наука, – 2017. – 275 с.
- [10] *Nikita Tsybin* Stress-strain state of a three-layer rod. Comparison of the results of analytical and numerical calculations with the experiment. 196th MATEC Web of Conferences. XXVII R-S-P Seminar – 2018. Theoretical Foundation of Civil Engineering..Place of publication: Publisher. 01057.doi: <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1051/mateconf/20181960105>.
- [11] *Бабажанов Б.Б.* Колебания трехслойного стержня под действием мгновенно-нарастающей нагрузки.// Вестник науки и образования, – 2020. – Т. 88. – № 10. – С. 1–10.
- [12] *Соляев Ю.О.* Ударопрочность трехслойных балок с сетчатыми наполнителями, работающими по принципу нелокальных механических метаматериалов. // Механика композиционных материалов и конструкций., – 2020. – Т. 26. – № 2. – С. 212–223.
- [13] *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. / Ташкент: Фан, – 1966. – 395 с.
- [14] *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. / Москва: Наука, – 1970. – 512 с.
- [15] *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в механике сплошных сред. / Ташкент: Фан, – 1979. – 394 с.
- [16] *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и деформационной пластичности / М.:Мир, – 1987. – 542 с.
- [17] *Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А.* Нелинейная математическая модель процессов колебания пространственно-нагруженных стержней с учетом температуре. // Проблемы вычислительной и прикладной математики., – 2021. – № 3(33). – С.212–223.

- [18] *Anarova Sh. A., Ismoilov Sh. M., Shokirov D. A.* Nonlinear Mathematical Model of Oscillation Processes of Spatially Loaded Rods with Account for Temperature. 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT). – 2021. DOI:10.1109/ICISCT52966.2021.9670072.
- [19] *Анарова Ш.А., Исмоилов Ш.М., Шокиров Д.А.* Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней // Проблемы вычислительной и прикладной математики., – 2022. – № 4(42). – С. 54–78.
- [20] *Anarova Sh. A., Shokirov D. A., Amonov O. T.* State-of-the-art in the investigation of three-layer rods // Наманган муҳандислик – қурилиш институти-нинг Механика ва технология журнали, – 2022. – № 3(8). – Р 51–64.
- [21] *Исомиддинов А.И.* Математическое моделирование воздействующих торцевых, поверхностных и объемных сил шпинделей при динамических нагружениях // Механика и технология, по. Спецвыпуск 1, – 2022. – С. 30–40.
- [22] *Anarova Sh. A., Shokirov D. A.* Uch qatlamli sterjenlarning kuchlanganlik-deformatsiyalangan holatini tadqiq etish masalasi. // «Математик моделлаштириш ва ахборот технологияларининг долзарб масалалари» Халқаро илмий-амалий анжуман тезислар тўплами, Нукус – 2023. – Б. 26–27.

Поступила в редакцию 17.10.2023

UDC 539.3

MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF THREE-LAYER RODS UNDER SPATIAL LOADS

^{1*} *Anarova Sh. A.*, ² *Ismoilov Sh. M.*, ² *Shokirov D. A.*

*shahzodaanarova@gmail.com

¹Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorezmi, 100200, Uzbekistan, Tashkent, st. Amir Temur, 108;

²Namangan Institute of Engineering and Construction, 160103, Uzbekistan, Namangan, st. I. Karimov 12.

It is known that three-layer structural elements are widely used in modern industries; so there is a constant need to develop methods for their calculation under new operating conditions. In particular, one of the pressing problems is the study of the strain states of three-layer rods. Based on the number of publications on this topic, much attention is paid to the calculation of the stress-strain state and critical stability parameters of three-layer rods. However, despite active scientific research, some important practical loading schemes for three-layer structures remain unconsidered. In this regard, the purpose of this study is to derive a mathematical model of the deformation of three-layer rods taking into account variations in kinetic and potential energies, and the work of external volumetric and surface forces, for which the Ostrogradsky-Hamilton variational principle was applied.

Keywords: three-layer rod, Ostrogradsky–Hamilton principle, kinetic energy, potential energy.

Citation: Anarova Sh.A., Ismoilov Sh.M., Shokirov D.A. 2023. Mathematical model of deformation of three-layer rods under spatial loads. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52): 56-82.

UDC 519.624.3

NUMERICAL MODELING OF INHOMOGENEOUS SINGULARLY PERTURBED FOURTH-ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS USING THE SPECTRAL METHOD

Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Tursunova B.A., Djurayeva N.T.

ch.normurodov@gmail.com

Termez State University,

190111, 43 Barkamol Avlod Str., Termez, Uzbekistan.

In the present work the spectral method with Chebyshev polynomials of the first kind is used for the numerical modeling of inhomogeneous singularly perturbed fourth-order boundary value problems. Numerical and graphical results illustrate the high accuracy and efficiency of the method used for various values of the small parameter and approximating polynomials.

Keywords: spectral method, Chebyshev polynomials of the first kind, spectral solution, high accuracy.

Citation: Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Tursunova B.A., Djurayeva N.T. 2023. Numerical modeling of inhomogeneous singularly perturbed fourth-order boundary value problems using the spectral method. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52):83-89.

1 Introduction

Singularly perturbed differential equations serve as mathematical models of many processes in physics, astrophysics, chemistry, biology, sociology and technology. Numerical modeling of singularly perturbed boundary value problems in ordinary differential equations is a current area of scientific research. In order to obtain a uniformly feasible asymptotic solution expansion for singularly perturbed problems, many methods have been developed, such as boundary layer expansion, multiscale methods, asymptotic matching, stretched coordinates, averaging, and others.

In [1] a singularly perturbed equation is studied in two ways: the "exact" method (since transcendental equations for eigenvalues are solved numerically) and the asymptotic method. A comparative analysis of the obtained results is given at diminution of ε . The existence of a boundary layer for a derivative from the solutions is established. It is shown that at diminution of ε the solutions of one boundary value problem (when boundary conditions are imposed on the solution of the original equation as follows: homogeneous conditions for the desired solution and its even derivatives converge to solutions of the degenerate problem (Schrodinger equation), and for the other (when homogeneous boundary conditions for the sought the solution and all its derivatives) such convergence does not exist.

In [2] a multi-scale method is presented for solving singularly perturbed second- and third-order problems with a boundary layer at one end, either on the left or on the right. The original second- and third-order ordinary differential equations are transformed into partial differential equations. These problems were effectively addressed using the multiple scale method and numerical simulations were performed on standard test cases to validate the robustness of the proposed method.

In [3] an initial value method was proposed for solving a class of linear singularly perturbed second-order differential-difference equations containing mixed shifts. In this case,

this problem is modified to an equivalent singularly perturbed problem by approximating the term containing the delay and advance parameters using a Taylor series expansion. These problems are then solved analytically and/or numerically and these solutions are combined to give an approximate solution to the original problem. The error estimate for this method is obtained using the maximum norm. To illustrate the theoretical results, several test problems are considered. It is noted that the method used approximates the exact solution very well.

In [4], the method of uniform grids is extended to solve multidimensional singularly perturbed boundary value problems. Numerical calculations on a uniform grid poorly describe the boundary layer, since with a sufficiently small value of the parameter, already the first grid node lies outside the boundary layer.

For practical applications, it is important to know the structure of the boundary layer; it is necessary to construct a non-uniform difference grid, which is condensed in the boundary layer region [5].

In [6] presents a unified convergence analysis for solving singularly perturbed problems using the standard Galerkin finite element method on an unconventional Shishkin-type mesh, which completely separates the boundary layers from other subdomains.

The results of the numerical solution of singularly perturbed fourth-order boundary value problems are presented in [7]. This work proposes a solution algorithm based on the use of a special non-uniform difference grid and the differential operator is approximated in two ways:

1) the fourth-order operator is replaced by a more convenient operator, which is split into two operators, i.e. instead of one equation, a system of two second-order equations is considered;

2) by the method of integral identities, the operator is approximated on a five-point pattern.

In the first approach, theorems on uniform convergence on the non-uniform convergence on the non-uniform difference grid proposed in the work have been proved. In the second approach, the order of uniform convergence was shown by numerical experiment. The solution of the system of difference equations was carried out by a non monotonic run. The described numerical algorithm was used to solve the linearized problem of the longitudinal-transverse bending of an elastic beam with embedded ends under the action of a distributed load.

In recent years along with difference methods, spectral and spectral-grid methods have been successfully used to solve singularly perturbed problems. In spectral and spectral-grid methods Chebyshev polynomials of the first and second kind are used as basis functions. The application of Chebyshev polynomials of the first kind to solve the eigenvalue problem of singularly perturbed boundary value problems is presented in [8]– [14], and the application of Chebyshev polynomials of the second kind in [15]– [18]. The computational experiments carried out in these works showed the high accuracy and efficiency of the methods used.

2 Statement of the problem

Let us consider an approximate solution of the following inhomogeneous singularly perturbed differential equation of the fourth order using the spectral method with Chebyshev polynomials of the first kind:

$$\varepsilon \frac{d^4 u}{dy^4} - 2 \frac{d^2 u}{dy^2} + u(y) = f(y), y \in (-1, +1), \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$u(\pm 1) = \frac{du}{dy}(\pm 1) = 0, \tag{2}$$

where ε is a small parameter.

To check the convergence and order of accuracy of the spectral method, we use the idea of the test function method [18]. The essence of this method is as follows.

A certain function is selected $u(y)$ (it can be chosen arbitrarily), substituting it into equation (1), we find the right side and edge values (2). The resulting problem is solved using the spectral method and the resulting spectral solution is compared with the known test function $u(y)$ for various values of the small parameter ε and Chebyshev polynomials of the first kind. As a test function, select the following function:

$$u(y) = (1 - y^2)^2 e^{\varepsilon y} \tag{3}$$

Then the right side $f(y)$ has the form:

$$f(y) = \varepsilon[(\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + \varepsilon)y^4 + (16\varepsilon^3 + 8\varepsilon + 4)y^3 + (70\varepsilon^2 - 2\varepsilon^4 - \varepsilon + 12)y^2 + (88\varepsilon - 16\varepsilon^3 - 4)y + (\varepsilon^4 - 23\varepsilon^2 + 20)]e^{\varepsilon y} \tag{4}$$

3 Solution method

In the spectral method, the approximate solution of problem (1)–(2) and the right-hand side $f(y)$ searched in the form of the following rows:

$$u_a(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y), f(y) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(y), \tag{5}$$

where $T_n(y)$ are Chebyshev polynomials of the first kind:

$$T_0(y) = 1, T_1(y) = y, T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y), n = 1, 2, \dots,$$

a $a_n (n = 0, 1, 2, \dots, N)$ are unknown coefficients.

Derivatives of various orders from a function $u_a(y)$ are calculated using the formulas presented in the monograph [[14],p. 62-63]. Substituting the values of the derivatives and the right-hand side $f(y)$ into the differential equation (1) and equating the coefficients for the same powers of the Chebyshev polynomials $T_n(y)$, we have the following algebraic system:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{24c_n} \left(\sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2(p^2 - 4)^2 - 3n^2p^4 + 3n^4p^2 - n^2(n^2 - 4)^2)a_p - \right. \\ & \left. - \frac{2}{c_n} \left(\sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2)a_p \right) + a_n = b_n, \right. \end{aligned} \tag{6}$$

$$n = 0, 1, \dots, N - 4,$$

where $c_0 = 2, c_n = 1$ if $n > 0$.

Here, based on τ the method [14], the algebraic system (6) is considered up to $n = N - 4$, the missing equations are taken from satisfying the boundary conditions (2). These equations, taking into account the following properties of Chebyshev polynomials:

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-2}n^2$$

have the form

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0 \quad (8)$$

Here, equations (7) are the boundary conditions at the left end of the segment $[-1, +1]$, and equations (8) at the right end of the segment $[-1, +1]$.

Expansion b_n coefficients for a known function $f(y)$ at collocation nodes of Chebyshev polynomials $y_l = \cos \frac{\pi l}{N}, l = 0, 1, \dots, N$ are determined by the following inverse transformation [12]– [14]:

$$\frac{2}{N c_n} \sum_{l=0}^N \frac{1}{c_l} f(y_l) T_n(y_l), n = 0, 1, \dots, N \quad (9)$$

where $c_0 = c_n = 2, c_m = 1$ if $m \neq 0; N$.

Algebraic system (6) with boundary conditions (7),(8) form a system of $(N + 1)$ equations for determining $(N + 1)$ the unknowns: a_0, a_1, \dots, a_N .

It is convenient to write the resulting system in matrix-vector form:

$$Aa = b, \quad (10)$$

where A is the known square matrix of coefficients, b is the known vector of the right side, a is the vector of unknown coefficients, and

$$a^T = (a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N), \quad b^T = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{N-4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

here a^T, b^T are transposed vectors.

By solving system (10), you can find the vector of unknowns a^T and substituting their values in series (5) to determine an approximate solution $u_a(y)$ to problem (1)–(2)

4 Discussion of results

Let us present the results of calculations for the numerical solution of the differential problem (1)–(2) by the spectral method for values of the small parameter $\varepsilon = 10^{-2}; 10^{-3}$ and various values of the Chebyshev polynomials of the first kind ($N = 20, 50$). However, we present the calculation results when $\varepsilon = 10^{-3}$.

Table 1 shows a comparison of the exact and spectral solutions when the number of polynomials is equal to $N = 20$.

Table 1. Comparison of exact and spectral solutions.

l	y_l	the exact solution	the approximate solution	error
1	-0.98769	0.00059	0.00019	0.00040
5	-0.70711	0.25017	0.21705	0.03312
10	-6.12323e-17	1.0	0.93163	0.06836
15	0.70711	0.24982	0.21669	0.03312
19	0.98769	0.00059	0.00019	0.00040

The results shown in Table 1 are most clearly illustrated in Fig.1.

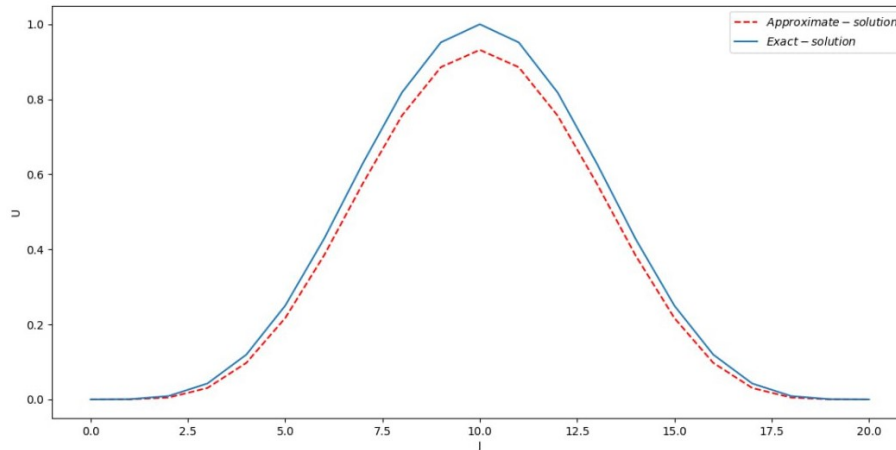


Figure 1 Dynamics of exact and spectral solutions with Chebyshev polynomials of the first kind ($N = 20$).

From Fig. 1 it is clear that the small parameter ε most strongly affects the middle part of the segment and there are corner sections in the graphs of the function. To smooth the graphs of the function, we increase the number of approximating Chebyshev polynomials to $N = 50$ and leave the value of the small parameter unchanged $\varepsilon = 10^{-3}$. We present the results in Table 2.

Table 2. Comparison of exact and spectral solutions.

l	y_l	the exact solution	the approximate solution	error
1	-0.99802	1.55600e-05	3.32738e-06	1.22326e-06
10	-0.80902	0.11946	0.09746	0.02199
20	-0.30902	0.81838	0.75690	0.06148
30	0.30902	0.81788	0.75639	0.06149
40	0.80902	0.11926	0.09726	0.02199
49	0.99802	1.55289e-05	3.29635e-06	1.22326e-06

The numerical results given in Table 2 are graphically presented in Fig. 2

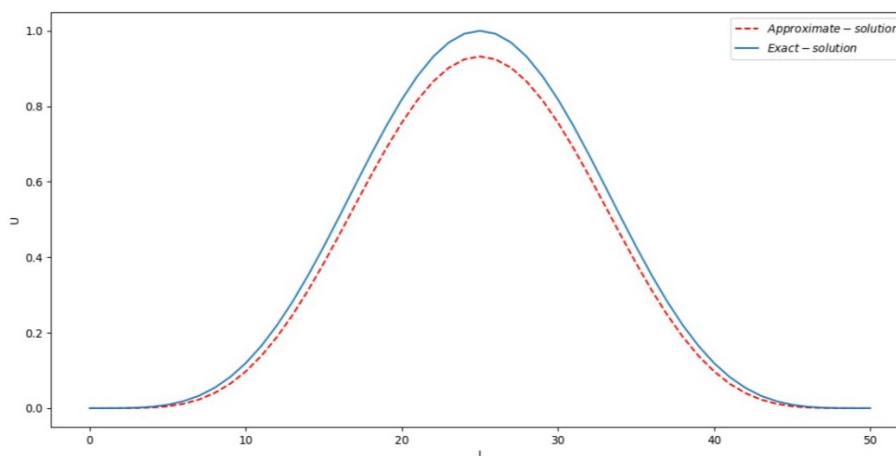


Figure 2 Dynamics of exact and spectral solutions with Chebyshev polynomials of the first kind ($N = 50$).

From the results given in Tables 1, 2 and Fig. 1, Fig. 2, it is clear that the accuracy of the spectral method is consistently maintained as the number of Chebyshev polynomials increases, at the same time the spectral solution becomes smoother.

5 Conclusions

For the numerical modeling of singularly perturbed boundary value problems of a fourth-order inhomogeneous equation, a spectral method with Chebyshev polynomials of the first kind is proposed, which provides a stable calculation of the dynamics of changes in the solution for various values of the small parameter and the number of approximating polynomials.

References

- [1] I.V. Amirkhanov, E.P. Zhidkov, D.Z. Muzafarov, N.R. Sarkar, I. Sarkhadov, Z.A. Sharipov 2007. *Investigation of boundary-value problems for the singularly perturbed differential equation of high order* // Matem. modeling volume 19, – n.11, – P. 237–248.
- [2] P.Gupta, M. Kumar 2016. *Multiple-Scales Method and Numerical Simulation of Singularly Perturbed boundary layer Problems.* // Applied Mathematics and Information Sciences An International Journal, 10, – No.3, – P. 1119–1127 <http://dx.doi.org/10.18576/amis/100330>
- [3] WG Melesse, AA Tiruneh, GA. Derese 2019. *Solving Linear Second-Order Singularly Perturbed Differential Difference Equations via Initial Value Method.* Vol. ID 5259130, <https://doi.org/10.1155/2019/5259130>
- [4] Shishkin G.I. 1979. *Numerical solution of elliptic equations with a small parameter with higher derivatives.* - Numerical methods of continuum mechanics, Novosibirsk, B.I. , v.10, – no.4, – P. 107–124.
- [5] Liseykin V.D., Yanenko N.N. 1981. *About uniformly convergent algorithm for the numerical solution of the second-order ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative.* - Numerical methods mechanics solid Wednesday, Novosibirsk, v.12, – no.2, – P. 45–56.
- [6] J. Li 2000. *Convergence analysis of finite element methods for singularly perturbed problems.* Computers and Mathematics with Applications 40 no.6-7, – P. 735–745. [http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(00\)00192-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00192-9)
- [7] Abiduev P.L., Darmaev T.G., Liseikin V.D. 2022. *Numerical Solution of Singularly Perturbed Boundary Value Problems of the 4th order.* / Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics. N.4. – P. 3–11
- [8] Normurodov Ch.B., Soloviev A.S. 1984. *Stability of plane Poiseuille flow with suspended particles.* - Novosibirsk, – 18 p. - (Preprint / RAS. Sib. departmentnie. Institute of theoretical and app.mech.; No.19)
- [9] Normurodov Ch.B., Soloviev A.S. 1986. *On the influence of suspended particles on the stability of a plane Poiseuille flow* // Izv. RAS. Ser. Mechanics of Liquid and Gas. Moscow, – No. 1. – P. 46–50.
- [10] Normurodov Ch.B., Podgaev A.G. 2003. *Convergence of the spectral grid method* // Uzbek mathematical journal. - Tashkent, – No. 2 – P. 64–71.
- [11] Normurodov Ch.B., Soloviev A.S. 1985. *Numerical solution of the problem of stability of the boundary layer with suspended particles.* Novosibirsk, – 24 p. (Preprint/ RAS.Sib.department - nie.Int theoretical and app.mech.; No.20)
- [12] Normurodov Ch.B. 2005. *About one effective method for solving the Orro-Sommerfeld equation* // Mathematical modeling. - Moscow, – No. 9 (17). – P. 35–42.
- [13] Normurodov Ch.B. 2007. *Mathematical modeling of hydrodynamic problems for two-phase plane-parallel flows* // Mathematical modeling. Moscow, 6(19). – P. 53–60.

- [14] Abutaliev F.B., Normurodov Ch.B. 2011. *Mathematical modeling of the problem of hydrodynamic stability*. T.: Fan va tekhnologiya, – 188 p.
- [15] Normurodov Ch.B., Tursunova B.A. 2020. *Convergence of the spectral-grid method with Chebyshev polynomials of the second kind* // Problems of computational and applied mathematics, Tashkent, – No. 1. – P. 94–101.
- [16] Normurodov Ch.B., Tursunova B.A. 2022. *Numerical solution of an ordinary differential equation with a small parameter with the highest derivative by the spectral method* // Problems of computational and applied mathematics, Tashkent, - No. 6(45). ISSN 2181-8460, – P. 95–100.
- [17] Ch.B. Normurodov, B.A. Tursunova 2023. *Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind* // Results in Applied Mathematics 19 100388, <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100388>
- [18] Samarsky A.A. 1977. *Theory of difference schemes*. - M.: Nauka, – 656 p.

Received October, 17, 2023

УДК 519.624.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Нормуродов Ч.Б., Тиловова М.А., Турсунова Б.А., Джусураева Н.Т.
ch.normurodov@gmail.com

Термезский государственный университет,
190111 Узбекистан, Термиз, ул. Баркамол авлод, дом 43.

В статье спектральный метод с полиномами Чебышева первого рода применяется для численного моделирования неоднородных сингулярно-возмущенных краевых задач четвертого порядка. Приводятся численные и графические результаты иллюстрирующие высокую точность и эффективность применяемого метода при различных значениях малого параметра и аппроксимирующих полиномов.

Ключевые слова: спектральный метод, полиномы Чебышева первого рода, спектральное решение, высокая точность.

Цитирование: *Нормуродов Ч.Б., Тиловова М.А., Турсунова Б.А., Джусураева Н.Т.* Численное моделирование неоднородных сингулярно-возмущенных краевых задач четвертого порядка спектральным методом // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 83-89.

УДК 519.6

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ВОДОГАЗОВОЙ СМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Равшанов Н.

ravshanzade-09@mail.ru

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
100125, Узбекистан, Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Статья посвящена разработке многомерной математической модели для комплексного исследования процесса фильтрации многофазных флюидов в пористых средах. Для интегрирования поставленной задачи предложен эффективный численный алгоритм высокого порядка аппроксимации. С использованием предложенного математического инструмента в данной работе рассматривается фильтрация трехфазной смеси (вода с пузырьками, нефти и свободного газа) в пористой среде. При моделировании процесса фильтрации водогазовой смеси в пористой среде учитываются рост и укрупнение мелких пузырьков в поровом пространстве породы, образование свободной газовой фазы, эффект проскальзывания, сжимаемость пор и неизотермичность процесса. Для учета переменности коэффициентов фильтрации и пористости слоя получены математические формулы (функциональные зависимости), описывающие характер перепада давления в деформируемом скелете коллектора.

Ключевые слова: математическая модель, эффективный численный алгоритм, водогазовая смесь, фильтрация водогазовой смеси, пористая среда.

Цитирование: *Равшанов Н.* Многомерная математическая модель и численный алгоритм для исследования процесса фильтрации водогазовой смеси в пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 90-114.

1 Введение

Очевидно, что для развития большинства отраслей производства, в первую очередь, важны энергетические ресурсы. Несмотря на общемировую тенденцию перехода к возобновляемым источникам энергии (ВИЭ), нефтегазовая промышленность является главным драйвером экономической активности любой страны мира. С учетом сказанного, создание научного базиса для проведения комплексных исследований, проектирования и разработки нефтегазовых месторождений имеет важнейшее значение в нефте- и газовой промышленности. Данное научное направление не теряет актуальности и даже еще больше возрастает на новом витке технологической эволюции. Результаты изысканий вооружают инженерно-технических работников нефтегазовой промышленности научно обоснованными методами проектирования, анализа, регулирования и определения перспектив разработки газовых и газоконденсатных месторождений [1].

Для повышения нефтеотдачи коллекторов при разработке нефтяных месторождений используются различные технологий, а одним из эффективных методов яв-

ляется водогазовое воздействие на пласт – то есть технология вытеснения залежи нефти газом высокого давления.

Как показывает анализ многих исследований по моделированию процесса фильтрации нефти в пористых средах, при использовании технологии вытеснения залежи нефти происходит ряд явлений: выравнивание профиля приемистости прискважинной части пласта вблизи нагнетательной скважины, увеличение степени вытеснения нефти в коллекторе, а также значительный прирост области охвата пласта. Данная технология не только повышает нефтеотдачу коллектора, но и позволяет провести утилизацию больших объемов углеводородного газа, добываемого попутно с нефтью и который часто сжигается на факелах.

Описание экспериментов по вытеснению нефти из пласта водой и газом можно найти в целом ряде научно-исследовательских работ [2]. Так, в работе [3] для повышения нефтеотдачи нефтяного коллектора, впервые было предложено закачивать в коллектор не сплошную газовую фазу и воду, а дисперсную водогазовую смесь, где газ содержится в виде мелких пузырей. Авторами статьи [4] приведены результаты лабораторных исследований по изучению механизма вытеснения нефти водой и газом при наличии пенообразующих смесей.

Процесс фильтрации двухфазной жидкости в пористой неоднородной среде при учете капиллярных сил рассматривался авторами работы [5], для чего ими была предложена математическая модель, описываемая нестационарным уравнением конвекции-диффузии с учетом скорости фильтрации и порового давления. Как отмечают авторы статьи, процесс характеризуется существенным преобладанием конвективного слагаемого в уравнении для насыщенности. Авторами используются противоположные аппроксимации посредством добавления неоднородной искусственной диффузии, а скорость и давление аппроксимируются с использованием смешанного метода конечных элементов. Рассмотрены несколько случаев, связанных с линейными и нелинейными коэффициентами относительной проницаемости флюида и наличием капиллярных сил.

Авторами публикаций [6, 7], с помощью математического инструмента исследования неизоэнтальпическое движение газонасыщенной нефти в скважине с многопластовой системой при учете эффекта Джоуля – Томсона. Принимая во внимание адиабатический эффект и теплоту «разгазирования», авторы исследуют распределение температуры в скважине и пласте. Было показано, что по распределению температуры можно оценить положение границы области разгазирования нефти в стволе скважины. Как отмечают авторы, полученные результаты вычислительного эксперимента могут быть использованы для интерпретации результатов температурных исследований скважин при добыче газированной нефти.

Статья [8] посвящена математическому моделированию процесса однофазной фильтрации флюида в системе «скважина – пласт». Нестационарная модель для скважины используется совместно с полуаналитической температурной моделью пласта в режиме добычи и остановки скважины. Как отмечено в [9], результаты вычислительных экспериментов хорошо согласуются с полевыми данными и их можно использовать при интерпретации профилей температуры в стволе скважины, измеренной с помощью распределенных датчиков температуры. В модели скважины учитываются неизоэнтальпическое, многокомпонентное и многофазное течения жидкости в пористой среде.

Статья [10] посвящена развитию математической модели процесса фильтрации многофазной и многокомпонентной смеси в пористой среде, построенной по анало-

гии с квазигазодинамической системой уравнений и допускающей реализацию явным численным конечно-разносным методом высокого порядка аппроксимации. Модель обобщена на случай многофазного многокомпонентного флюида и учитывает возможные источники тепла. Авторами проведены численные расчеты для решения тестовых задач о течении в однородной пористой среде трехфазной жидкости [11].

Работа [12] посвящена теоретическому и численному исследованию разработки пласта с высоковязкой нефтью при помощи технологии парных горизонтальных скважин. Авторами получены численные решения задачи о добыче высоковязкой нефти из пласта с применением теплового воздействия в двумерной постановке. На основе чего был предложен способ повышения эффективности разработки нефтяного пласта с высоковязкой нефтью за счет обеспечения равномерного прогрева осваиваемой зоны месторождения. Разработанная математическая модель и численный алгоритм модель позволяет проследить детальную двумерную картину фильтрации нефти в пласте и исследовать основные закономерности данного процесса.

В диссертационной работе [13] получены аналитическая зависимость для расчета тензора эффективной проницаемости стохастически неоднородной анизотропной пористой среды с учетом различных автоковариационных функций распределения проницаемости и аналитическое решение задачи фильтрации флюида в слоистых глинизированных пластах, состоящих из чередующихся высоко- и низкопроницаемых интервалов различной мощности и проницаемости. Также, решена обратная задача для определения фильтрационных характеристик слоистого глинизированного коллектора с использованием данных нормальной эксплуатации скважины и предложен способ определения средней проницаемости коллектора и глины без остановки скважины.

В работе [14] рассматривается одномерная математическая модель фильтрации монодисперсной суспензии в неоднородной пористой среде. Как утверждают авторы статьи, при процессе фильтрации потока суспензии через пористую горную породу часть гелевых частиц коагулируется в порах и образует кейк-слой, блокирующий поры, что впоследствии влияет на интенсивность потока грунтовых вод. Предполагается, что при задержании твердых частиц суспензии порами, основную роль играет механико-геометрический механизм захвата частиц. Авторы статьи для решения поставленной задачи используют методом конечных разностей.

Статья [15] посвящена вопросам математического моделирования структур пористой среды в виде построения адаптированных разностных сеток для анизотропных и неоднородных сред. Строится конечно-разностный вычислительный алгоритм и производится анализ расчетов модельной задачи вытеснения на основе системы уравнений Бакли-Левретта. По результатам численных расчетов предлагается общая методика учета неоднородности пористой среды, которая особо важна при оценке и анализе разработки месторождений нефти и газа.

Модели уплотнения пористой среды при осаждении асфальтенов в порах среды, а также решения уравнения нестационарной фильтрации предложены в [16] для оценки фильтрационных характеристик пористой среды. Подчеркивается, что сравнение приведенных моделей с экспериментальными данными показало удовлетворительную сходимость расчета с экспериментом. Предложены новые критерии подобия, характеризующие фильтрацию жидкостей в пористой среде. Разработана технология очистки асфальтенов жидкофазной экстракцией из сточных нефтяных вод.

В работе [17] проводится численное моделирование задач двухфазной фильтрации в трещиновато-пористых средах с использованием модели двойной пористости с

сильно неоднородным коэффициентом проницаемости. Приводится система уравнений для случая двухфазной фильтрации без учета капиллярных и гравитационных сил, которая представляет собой связанную систему уравнений для давления и насыщенности в пористой среде, имеющей систему трещин. Численная реализация для аппроксимации скорости и давления строится на основе метода конечных элементов. Для дискретизации уравнения насыщенности посредством метода введения искусственной диффузии используется классический метод Галеркина с противопотоковой аппроксимацией. Приводятся результаты численных расчетов для модельной задачи с использованием различных функций перетока.

В работе [18] получены формулы для фильтрационного числа Рейнольдса в виде скалярной функции от векторного аргумента, которая позволяет определить число Рейнольдса для любого направления и коэффициента гидравлического сопротивления для модельных пористых сред и выписаны инвариантные формы представления нелинейных законов фильтрационных течений для кристаллографических точечных групп симметрии кубической, тетрагональной, тригональной, гексагональной и ромбической сингоний. В диссертационной работе показано, что нелинейные законы теории фильтрации могут проявлять асимметрию фильтрационных свойств и что при переходе от линейных уравнений к нелинейным возможно изменение группы симметрии фильтрационных свойств и рассмотрены теоретические основы лабораторного определения материальных констант в нелинейных законах фильтрации для анизотропных пористых сред с кубической, тетрагональной, тригональной, гексагональной и ромбической симметрией фильтрационных свойств. Так же в работе получены представления закона Форхгеймера и нелинейного закона фильтрации с ортотропными фильтрационными свойствами, разрешенные относительно скорости фильтрации.

Фильтрация нефти в низкопроницаемых коллекторах рассмотрена в [19]. В частности, дан анализ экспериментальных данных зависимости скорости фильтрации от градиента давления. Авторами статьи показано, что закон фильтрации в низкопроницаемых коллекторах отличается от линейного закона Дарси и от нелинейного закона с начальным градиентом давления. Экспериментально обоснован степенной закон фильтрации в низкопроницаемых коллекторах и предложены модели влияния нелинейной фильтрации на дебит скважины. Проведен анализ влияния параметров нелинейной фильтрации на дебит скважин при техногенно измененной околоскважинной зоне.

В [20] описывается математическая модель процесса трехфазной фильтрации в пористой среде и ее численная реализация для решения на неструктурированных сетках в пакете программ НИМФА. Приведены результаты расчетов тестовой задачи SPE7 по пакету НИМФА и коммерческим программным продуктам. Особое внимание уделено методам распараллеливания для численного интегрирования поставленной задачи неизотермической трехфазной фильтрации воды с пузырьками нефти и газа в элементе пористой среды. При разработке математической модели объекта исследования учитываются рост и укрупнение мелких пузырьков в порах, образование свободной газовой фазы, эффект проскальзывания, а также сжимаемость пор в двухмерной постановке.

2 Постановка задачи

Рассматривается задача совместного неизотермического вытеснения нефти пузырьковой жидкостью в элементе пористой среды с пористостью m , где в объеме

пустотного пространства одновременно имеют место нефтенасыщенность S_o , водонасыщенность S_w с пузырьками газонасыщенности S_b и свободный газ насыщенности S_g . Согласно определению

$$S_o + S_w + S_g + S_b = 1.$$

Как было отмечено в работе [2], вытесняющая жидкость представляет собой водогазовую смесь (обозначена нижним индексом «wb»), где вода – дисперсионная среда (несущая фаза), а пузырьки – дисперсная фаза, тогда насыщенность водогазовой смеси можно записать как $S_{wb} = S_w + S_b$, объемное содержание пузырьков в водогазовой смеси $R_b = S_b/S_{wb}$. Скорость фильтрации водогазовой смеси, соответственно по направлениям $0x$ и $0y$ определяется как

$$v_{x,wb} = \frac{kk_{rw}}{\mu_{wh}} \frac{\partial P}{\partial x} = v_{x,w} + v_{x,b}; \quad v_{y,wb} = \frac{kk_{rw}}{\mu_{wh}} \frac{\partial P}{\partial y} = v_{y,w} + v_{y,b}.$$

Вязкость водогазовой смеси аппроксимируется обобщенной формулой Эйнштейна $\mu_{wb} = \mu_w(1 + \chi R_b)$ где $\chi = 2,5$ – эмпирический коэффициент (данное значение соответствует сферическим пузырькам). Скорости фильтрации пузырьков и воды связаны со скоростью фильтрации водогазовой смеси в пористой среде следующим образом:

$$v_b = R_b v_{wb}, \quad v_w = (1 - R_b) v_{wb}.$$

Интенсивность перехода пузырьков в свободную газовую фазу за счет их объединения определяется как

$$q_g = \begin{cases} 0, R_b \leq R_b^*; \\ v_b p_b j_g (R_b - R_b^*), R_b > R_b^*, \end{cases}$$

где j_g – количество объединенных пузырьков в единице объема; R_b^* – критическое значение объемного содержания пузырьков в водогазовой смеси, при достижении которого пузырьки начинают объединяться и переходят в свободную газовую фазу. С учетом сказанного выше, математическая модель процесса фильтрации многофазной смеси с учетом закона сохранения массы для нефти, воды, пузырьков в воде и свободного газа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (m S_o \rho_o) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{r0} \rho_o}{\mu_o} \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{kk_{r0} \rho_o}{\mu_o} \frac{\partial P}{\partial y} \right] = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (m S_w \rho_w) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-R_b)kk_{rw} \rho_w}{\mu_{wb}} \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1-R_b)kk_{rw} \rho_w}{\mu_{wb}} \frac{\partial P}{\partial y} \right] = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (m S_b \rho_b) - \frac{\partial}{\partial x} \left[R_b \frac{kk_{rw} \rho_b}{\mu_{wb}} \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[R_b \frac{kk_{rw} \rho_b}{\mu_{wb}} \frac{\partial P}{\partial y} \right] = -q_g; \\ \frac{\partial}{\partial t} (m S_g \rho_g) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{rg} \rho_g}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{kk_{rg} \rho_g}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial y} \right] = q_g. \end{cases} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} P(x, y, 0) = P^H(x, y); \quad S_o(x, y, 0) = S_o^H(x, y); \\ S_b(x, y, 0) = S_b^H(x, y); \quad S_w(x, y, 0) = S_w^H(x, y); \\ S_g(x, y, 0) = S_g^H(x, y); \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P(0,y,t)}{\partial x} = \alpha_1(P(0,y,t) - P^v(x,y,t)); \\ \frac{k}{\mu} \frac{\partial P(L_x,y,t)}{\partial x} = \alpha_2(P(L_x,y,t) - P^v(x,y,t)); \\ \frac{k}{\mu} \frac{\partial P(x,0,t)}{\partial y} = \alpha_3(P(x,0,t) - P^v(x,y,t)); \\ \frac{k}{\mu} \frac{\partial P(x,L_y,t)}{\partial y} = \alpha_4(P(x,L_y,t) - P^v(x,y,t)), \end{cases} \quad (3)$$

где ρ - плотность; P, P^v - соответственно, давление в слое и за пределами области решения задачи; μ - вязкость; k - проницаемость пористой среды; k_r - относительная фазовая проницаемость пористой среды; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - безразмерные параметры, принимающие значение 0 или 1.

Для замыкания системы дифференциальных уравнений, описывающих фильтрацию многофазных смесей в пористой среде предполагается, что жидкие фазы (вода и нефть) несжимаемые, а плотность газа изменяется согласно уравнению состояния

$$\rho_g = \rho_b = \frac{PM}{RT},$$

где M - молярная масса газа; T - температура; R - универсальная газовая постоянная.

Для определения изменений температуры многофазных смесей в пористой среде будет использоваться уравнением теплопроводности:

$$(c\rho)_t \frac{\partial T}{\partial t} + (c\rho)_f v_f \frac{\partial T}{\partial x} + (c\rho)_f v_f \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями:

$$T(x,y,0) = T_0(x,y); \quad (5)$$

$$\begin{cases} \lambda_f \frac{\partial T(0,y,t)}{\partial x} = \beta(T(0,y,t) - T_v(x,y,t)); \\ \lambda_f \frac{\partial T(L_x,y,t)}{\partial x} = \beta(T(L_x,y,t) - T_v(x,y,t)); \\ \lambda_f \frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = \beta(T(x,0,t) - T_v(x,y,t)); \\ \lambda_f \frac{\partial T(x,L_y,t)}{\partial y} = \beta(T(x,L_y,t) - T_v(x,y,t)). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $(c\rho)_f = (c\rho)_w S_w + (c\rho)_0 S_0 + (c\rho)_g (S_b + S_g)$ - объемная теплоемкость флюида; $(c\rho)_\chi = m(c\rho)_f(1 - m)(c\rho)_s$ - объемная теплоемкость насыщенной пористой среды; $\lambda_f = [\lambda_w S_w + \lambda_0 S_0 + \lambda_g (S_b + S_g)] + (1 - m)\lambda_w$ - коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды; β - коэффициент влагоотдачи между границами области решения задачи; T_0, T_v - соответственно, начальная температура и температура за областью фильтрации многофазной смеси. Здесь индекс χ относится к насыщенной пористой среде, f - к флюиду, S - к скелету, а скорость фильтрации флюида рассчитывается с помощью соотношения:

$$v_f = v_0 + v_{wb} + v_g.$$

Водогазовая смесь может быть представлена как жидкость с эффективной проницаемостью, где учитывается эффект проскальзывания $k = k_0(1 + 4b/r)$, где b - коэффициент проскальзывания, r - средний радиус порового канала, k_0 - проницаемость, которая зависит от давления.

При разработке нефтегазовых месторождений пластовое давление в коллекторах со временем падает, следовательно напряжение в скелете σ_{Σ} возрастает, следовательно увеличивается объем зерен и уменьшается объем пор, а увеличение σ_{Σ} приводит к тому, что зерна породы испытывают дополнительную деформацию [23]. В таких случаях, пористость зависит только от давления в коллекторе. Вследствие малой деформации твердой фазы изменение пористости зависит от изменения давления линейно в обоих слоях пористых сред. Закон сжимаемости породы запишем через коэффициент упругости пласта β_c [21–23]:

$$\beta_c \frac{dV_{\Pi}}{V dP}$$

где dV_{Π} - изменение объема пор в элементе пласта, имеющем объем V при изменении давления на величину dP . Если объем элемента пласта считается неизменным, то

$$dV_{\Pi}/V = dm$$

и закон сжимаемости породы примет вид

$$dm = \beta_c dP$$

или, в конечной форме

$$m = m_0 + \beta_c (P - P_0),$$

где m_0 - начальная пористость при $P = P_0$.

При значительных изменениях давления изменение пористости описывается соотношением

$$m = m_0 e^{-\beta_c(P_0 - P)/m_0}.$$

Анализ проведенных исследований показал, что не только пористость, но и проницаемость пористых сред существенно меняется с изменением пластового давления коллектора, причем часто проницаемость изменяется в более сильной степени, чем пористость. При малых изменениях пластового давления эта зависимость может быть в виде линейного функционала:

$$k = k_0 [1 - a_K (P_0 - P)],$$

а при больших – экспоненциального функционала

$$k = k_0 e^{-a_K(P_0 - P)}.$$

Как было предложено во многих литературных источниках, для вычисления абсолютной проницаемости используем следующую эмпирическую зависимость:

$$K = K_0 \left(\frac{m}{m_0} \right)^n.$$

Для решения поставленной задачи и замыкания системы уравнений, фазовые проницаемости для нефти, воды и газа определяются согласно [24] и предполагается, что в начальный момент времени пористая среда равномерно насыщена нефтью и водой (S_{o0} , S_{w0}) при пластовых давлении (P_0) и температуре (T_0).

Из постановки задачи видно, что решение в аналитическом виде получить практически невозможно. Поэтому, для численного решения задачи используем конечно-разностный метод, основанный на замене дифференциальных операторов на разностные с высоким порядком аппроксимации по времени и пространственным переменным.

3 Метод решения

Так как поставленную задачу невозможно интегрировать в аналитическом виде, то для решения используем конечно-разностный метод, то есть непрерывную область решения заменяем на сеточную:

$$\omega_{\Delta x, \Delta y, \Delta t} = \left(\begin{array}{l} x_i = i \Delta x, \quad i = 0, 1, 2..N_x, \quad \Delta x = \frac{L_x}{N_x}; y_j = j \Delta y, \quad j = 0, 1, 2..N_y, \\ \Delta y = \frac{L_y}{N_y}; t_n = n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2..N_n, \quad \Delta t = \frac{T}{N_n}. \end{array} \right)$$

Далее, для численного интегрирования поставленной задачи первое уравнение системы (1) заменяем на разностный аналог со вторым порядком аппроксимации по времени и пространственным переменным:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j} \rho_{0,i,j} S_{0,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j} \rho_{0,i,j} S_{0,i,j}^n + \\ & + \frac{1}{2\Delta t} m_{i+1,j} \rho_{0,i+1,j} S_{0,i+1,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2\Delta t} m_{i+1,j} \rho_{0,i+1,j} S_{0,i+1,j}^n = \\ & = \frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^n - \left(\frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^n + \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^n + \\ & + \frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^n - \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^n + \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^n. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) группируя схожие члены получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_{i+1,j} \rho_{0,i+1,j} S_{0,i+1,j}^{n+1/2} - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{0,i,j} \right) S_{0,i,j}^{n+1/2} = \\ & = - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{0,i,j} S_{0,i,j}^n - \frac{1}{2} m_{i+1,j} \rho_{0,i+1,j} S_{0,i+1,j}^n + \right. \\ & + \left(\frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) + \\ & + \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} + \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^n - \\ & - \frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^n - \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^n - \\ & \left. - \frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^n - \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^n \right) \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$a_{S0,i,j} S_{0,i+1,j}^{n+1/2} - b_{S0,i,j} S_{0,i,j}^{n+1/2} + c_{S0,i,j} S_{0,i-1,j}^{n+1/2} = -d_{S0,i,j}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{S0,i,j} &= \frac{1}{2} m_{i+1,j} \rho_{0,i+1,j}; & b_{S0,i,j} &= -\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{0,i,j}; & c_{S0,i,j} &= 0; \\ d_{S0,i,j} &= -\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{0,i,j} S_{0,i,j}^n - \frac{1}{2} m_{i+1,j} \rho_{0,i+1,j} S_{0,i+1,j}^n + \\ &+ \left(\frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^n + \\ &+ \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta x^2} + \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^n - \\ &- \frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^n - \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^n - \\ &- \frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta x^2} P_{i,j+1}^n - \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta x^2} P_{i,j-1}^n. \end{aligned}$$

Аналогично, аппроксимируя первое уравнение системы (1) на конечно-разностные для времени $n + 1$ получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta t} m_{i,j} \rho_{0,i,j} S_{0,i,j}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j} \rho_{0,i,j} S_{0,i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j+1} \rho_{0,i,j+1} S_{0,i,j+1}^{n+1} - \\ &- \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j+1} \rho_{0,i,j+1} S_{0,i,j+1}^{n+1/2} = \frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1/2} - \\ &- \left(\frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\ &+ \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \\ &- \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} + \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\ &+ \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнение (10), группируя схожие члены, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{0,i,j+1} S_{0,i,j+1}^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{0,i,j} \right) S_{0,i,j}^{n+1} = \\ &= - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{0,i,j} S_{0,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{0,i,j+1} S_{0,i,j+1}^{n+1/2} + \right. \\ &+ \left(\frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\ &+ \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} + \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{k_{i+0,5,j} k_{r0,i+0,5,j} \rho_{0,i+0,5,j}}{\mu_{0,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{k_{i-0,5,j} k_{r0,i-0,5,j} \rho_{0,i-0,5,j}}{\mu_{0,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} - \\ &\left. - \frac{k_{i,j+0,5} k_{r0,i,j+0,5} \rho_{0,i,j+0,5}}{\mu_{0,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \frac{k_{i,j-0,5} k_{r0,i,j-0,5} \rho_{0,i,j-0,5}}{\mu_{0,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

или

$$\bar{a}_{S_0, i, j} S_{0, i, j+1}^{n+1} - \bar{b}_{S_0, i, j} S_{0, i, j}^{n+1} + \bar{c}_{S_0, i, j} S_{0, i, j-1}^{n+1} = -\bar{d}_{S_0, i, j}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{S_0, i, j} &= \frac{1}{2} m_{i, j+1} \rho_{0, i, j+1}; & \bar{b}_{S_0, i, j} &= -\frac{1}{2} m_{i, j} \rho_{0, i, j}; & \bar{c}_{S_0, i, j} &= 0; \\ \bar{d}_{S_0, i, j} &= -\frac{1}{2} m_{i, j} \rho_{0, i, j} S_{0, i, j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} m_{i, j+1} \rho_{0, i, j+1} S_{0, i, j+1}^{n+1/2} + \\ &+ \left(\frac{k_{i+0,5, j} k_{r0, i+0,5, j} \rho_{0, i+0,5, j}}{\mu_{0, i+0,5, j} \Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5, j} k_{r0, i-0,5, j} \rho_{0, i-0,5, j}}{\mu_{0, i-0,5, j} \Delta x^2} \right) P_{i, j}^{n+1/2} + \\ &+ \left(\frac{k_{i, j+0,5} k_{r0, i, j+0,5} \rho_{0, i, j+0,5}}{\mu_{0, i, j+0,5} \Delta x^2} + \frac{k_{i, j-0,5} k_{r0, i, j-0,5} \rho_{0, i, j-0,5}}{\mu_{0, i, j-0,5} \Delta x^2} \right) P_{i, j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{k_{i+0,5, j} k_{r0, i+0,5, j} \rho_{0, i+0,5, j}}{\mu_{0, i+0,5, j} \Delta x^2} P_{i+1, j}^{n+1/2} - \frac{k_{i-0,5, j} k_{r0, i-0,5, j} \rho_{0, i-0,5, j}}{\mu_{0, i-0,5, j} \Delta x^2} P_{i-1, j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{k_{i, j+0,5} k_{r0, i, j+0,5} \rho_{0, i, j+0,5}}{\mu_{0, i, j+0,5} \Delta x^2} P_{i, j+1}^{n+1/2} - \frac{k_{i, j-0,5} k_{r0, i, j-0,5} \rho_{0, i, j-0,5}}{\mu_{0, i, j-0,5} \Delta x^2} P_{i, j-1}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Далее, аналогичную процедуру применяем для второго уравнения системы (1) при времени интегрирования $n + \frac{1}{2}$, и получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta t} m_{i, j} \rho_{w, i, j} S_{w, i, j}^{n+1/2} - \frac{1}{2\Delta t} m_{i, j} \rho_{w, i, j} S_{w, i, j}^n + \frac{1}{2\Delta t} m_{i+1, j} \rho_{w, i+1, j} S_{w, i+1, j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{1}{2\Delta t} m_{i+1, j} \rho_{w, i+1, j} S_{w, i+1, j}^n = \frac{(1 - R_{b, i+0,5, j}) k_{i+0,5, j} k_{rw, i+0,5, j} \rho_{w, i+0,5, j}}{\mu_{wb, i+0,5, j} \Delta x^2} P_{i+1, j}^n - \\ &- \left(\frac{(1 - R_{b, i+0,5, j}) k_{i+0,5, j} k_{rw, i+0,5, j} \rho_{w, i+0,5, j}}{\mu_{wb, i+0,5, j} \Delta x^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(1 - R_{b, i-0,5, j}) k_{i-0,5, j} k_{rw, i-0,5, j} \rho_{w, i-0,5, j}}{\mu_{wb, i-0,5, j} \Delta x^2} \right) P_{i, j}^n + \\ &+ \frac{(1 - R_{b, i-0,5, j}) k_{i-0,5, j} k_{rw, i-0,5, j} \rho_{w, i-0,5, j}}{\mu_{wb, i-0,5, j} \Delta x^2} P_{i-1, j}^n + \\ &+ \frac{(1 - R_{b, i, j+0,5}) k_{i, j+0,5} k_{rw, i, j+0,5} \rho_{w, i, j+0,5}}{\mu_{wb, i, j+0,5} \Delta y^2} P_{i, j+1}^n - \\ &- \left(\frac{(1 - R_{b, i, j+0,5}) k_{i, j+0,5} k_{rw, i, j+0,5} \rho_{w, i, j+0,5}}{\mu_{wb, i, j+0,5} \Delta y^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(1 - R_{b, i, j-0,5}) k_{i, j-0,5} k_{rw, i, j-0,5} \rho_{w, i, j-0,5}}{\mu_{wb, i, j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i, j}^n + \\ &+ \frac{(1 - R_{b, i, j-0,5}) k_{i, j-0,5} k_{rw, i, j-0,5} \rho_{w, i, j-0,5}}{\mu_{wb, i, j-0,5} \Delta y^2} P_{i, j-1}^n. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнение (13), группируя схожие члены, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} m_{i+1, j} \rho_{w, i+1, j} S_{w, i+1, j}^{n+1/2} - \left(-\frac{1}{2} m_{i, j} \rho_{w, i, j} \right) S_{w, i, j}^{n+1/2} = \\ &= - \left(-\frac{1}{2} m_{i, j} \rho_{w, i, j} S_{w, i, j}^n - \frac{1}{2} m_{i+1, j} \rho_{w, i+1, j} S_{w, i+1, j}^n + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{(1 - R_{b, i+0,5, j}) k_{i+0,5, j} k_{rw, i+0,5, j} \rho_{w, i+0,5, j}}{\mu_{wb, i+0,5, j} \Delta x^2} + \right. \\
& + \left. \frac{(1 - R_{b, i-0,5, j}) k_{i-0,5, j} k_{rw, i-0,5, j} \rho_{w, i-0,5, j}}{\mu_{wb, i-0,5, j} \Delta x^2} \right) P_{i, j}^n + \\
& + \left(\frac{(1 - R_{b, i, j+0,5}) k_{i, j+0,5} k_{rw, i, j+0,5} \rho_{w, i, j+0,5}}{\mu_{wb, i, j+0,5} \Delta y^2} + \right. \\
& + \left. \frac{(1 - R_{b, i, j-0,5}) k_{i, j-0,5} k_{rw, i, j-0,5} \rho_{w, i, j-0,5}}{\mu_{wb, i, j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i, j}^n - \\
& - \frac{(1 - R_{b, i+0,5, j}) k_{i+0,5, j} k_{rw, i+0,5, j} \rho_{w, i+0,5, j}}{\mu_{wb, i+0,5, j} \Delta x^2} P_{i+1, j}^n - \\
& - \frac{(1 - R_{b, i-0,5, j}) k_{i-0,5, j} k_{rw, i-0,5, j} \rho_{w, i-0,5, j}}{\mu_{wb, i-0,5, j} \Delta x^2} P_{i-1, j}^n - \\
& - \frac{(1 - R_{b, i, j+0,5}) k_{i, j+0,5} k_{rw, i, j+0,5} \rho_{w, i, j+0,5}}{\mu_{wb, i, j+0,5} \Delta y^2} P_{i, j+1}^n - \\
& - \left. \frac{(1 - R_{b, i, j-0,5}) k_{i, j-0,5} k_{rw, i, j-0,5} \rho_{w, i, j-0,5}}{\mu_{wb, i, j-0,5} \Delta y^2} P_{i, j-1}^n \right)
\end{aligned}$$

или

$$a_{Sw, i, j} S_{w, i+1, j}^{n+1/2} - b_{Sw, i, j} S_{w, i, j}^{n+1/2} + c_{Sw, i, j} S_{w, i-1, j}^{n+1/2} = -d_{Sw, i, j}, \quad (14)$$

где

$$a_{Sw, i, j} = \frac{1}{2} m_{i+1, j} \rho_{w, i+1, j}; \quad b_{Sw, i, j} = -\frac{1}{2} m_{i, j} \rho_{w, i, j}; \quad c_{Sw, i, j} = 0;$$

$$\begin{aligned}
d_{Sw, i, j} = & -\frac{1}{2} m_{i, j} \rho_{w, i, j} S_{w, i, j}^n - \frac{1}{2} m_{i+1, j} \rho_{w, i+1, j} S_{w, i+1, j}^n + \\
& + \left(\frac{(1 - R_{b, i+0,5, j}) k_{i+0,5, j} k_{rw, i+0,5, j} \rho_{w, i+0,5, j}}{\mu_{wb, i+0,5, j} \Delta x^2} + \right. \\
& + \left. \frac{(1 - R_{b, i-0,5, j}) k_{i-0,5, j} k_{rw, i-0,5, j} \rho_{w, i-0,5, j}}{\mu_{wb, i-0,5, j} \Delta x^2} \right) P_{i, j}^n + \\
& + \left(\frac{(1 - R_{b, i, j+0,5}) k_{i, j+0,5} k_{rw, i, j+0,5} \rho_{w, i, j+0,5}}{\mu_{wb, i, j+0,5} \Delta x^2} + \right. \\
& + \left. \frac{(1 - R_{b, i, j-0,5}) k_{i, j-0,5} k_{rw, i, j-0,5} \rho_{w, i, j-0,5}}{\mu_{wb, i, j-0,5} \Delta x^2} \right) P_{i, j}^n - \\
& - \frac{(1 - R_{b, i+0,5, j}) k_{i+0,5, j} k_{rw, i+0,5, j} \rho_{w, i+0,5, j}}{\mu_{wb, i+0,5, j} \Delta x^2} P_{i+1, j}^n - \\
& - \frac{(1 - R_{b, i-0,5, j}) k_{i-0,5, j} k_{rw, i-0,5, j} \rho_{w, i-0,5, j}}{\mu_{wb, i-0,5, j} \Delta x^2} P_{i-1, j}^n - \\
& - \frac{(1 - R_{b, i, j+0,5}) k_{i, j+0,5} k_{rw, i, j+0,5} \rho_{w, i, j+0,5}}{\mu_{wb, i, j+0,5} \Delta x^2} P_{i, j+1}^n - \\
& - \frac{(1 - R_{b, i, j-0,5}) k_{i, j-0,5} k_{rw, i, j-0,5} \rho_{w, i, j-0,5}}{\mu_{wb, i, j-0,5} \Delta x^2} P_{i, j-1}^n.
\end{aligned}$$

Далее, аналогично для времени $n + 1$ получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j} \rho_{w,i,j} S_{w,i,j}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j} \rho_{w,i,j} S_{w,i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j+1} \rho_{w,i,j+1} S_{w,i,j+1}^{n+1} - \\
 & - \frac{1}{2\Delta t} m_{i,j+1} \rho_{w,i,j+1} S_{w,i,j+1}^{n+1/2} = \frac{(1 - R_{b,i+0,5,j}) k_{i+0,5,j} k_{rw,i+0,5,j} \rho_{w,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1/2} - \\
 & - \left(\frac{(1 - R_{b,i+0,5,j}) k_{i+0,5,j} k_{rw,i+0,5,j} \rho_{w,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j} \Delta x^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{(1 - R_{b,i-0,5,j}) k_{i-0,5,j} k_{rw,i-0,5,j} \rho_{w,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\
 & + \frac{(1 - R_{b,i-0,5,j}) k_{i-0,5,j} k_{rw,i-0,5,j} \rho_{w,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} + \\
 & + \frac{(1 - R_{b,i,j+0,5}) k_{i,j+0,5} k_{rw,i,j+0,5} \rho_{w,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \\
 & - \left(\frac{(1 - R_{b,i,j+0,5}) k_{i,j+0,5} k_{rw,i,j+0,5} \rho_{w,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5} \Delta y^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{(1 - R_{b,i,j-0,5}) k_{i,j-0,5} k_{rw,i,j-0,5} \rho_{w,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\
 & + \frac{(1 - R_{b,i,j-0,5}) k_{i,j-0,5} k_{rw,i,j-0,5} \rho_{w,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1/2}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

В уравнения (15), группируя схожие члены, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{w,i,j+1} S_{w,i,j+1}^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{w,i,j} \right) S_{w,i,j}^{n+1} = \\
 & = - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{w,i,j} S_{w,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{w,i,j+1} S_{w,i,j+1}^{n+1/2} + \right. \\
 & + \left(\frac{(1 - R_{b,i+0,5,j}) k_{i+0,5,j} k_{rw,i+0,5,j} \rho_{w,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j} \Delta x^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{(1 - R_{b,i-0,5,j}) k_{i-0,5,j} k_{rw,i-0,5,j} \rho_{w,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\
 & + \left(\frac{(1 - R_{b,i,j+0,5}) k_{i,j+0,5} k_{rw,i,j+0,5} \rho_{w,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5} \Delta y^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{(1 - R_{b,i,j-0,5}) k_{i,j-0,5} k_{rw,i,j-0,5} \rho_{w,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(1 - R_{b,i+0,5,j}) k_{i+0,5,j} k_{rw,i+0,5,j} \rho_{w,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(1 - R_{b,i-0,5,j}) k_{i-0,5,j} k_{rw,i-0,5,j} \rho_{w,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(1 - R_{b,i,j+0,5}) k_{i,j+0,5} k_{rw,i,j+0,5} \rho_{w,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \\
 & - \left. \frac{(1 - R_{b,i,j-0,5}) k_{i,j-0,5} k_{rw,i,j-0,5} \rho_{w,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1/2} \right)
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\bar{a}_{Sw,i,j} S_{w,i,j+1}^{n+1} - \bar{b}_{Sw,i,j} S_{w,i,j}^{n+1} + \bar{c}_{Sw,i,j} S_{w,i,j-1}^{n+1} = -\bar{d}_{Sw,i,j}. \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{a}_{Sw,i,j} &= \frac{1}{2}m_{i,j+1}\rho_{w,i,j+1}; & \bar{b}_{Sw,i,j} &= -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{w,i,j}; & \bar{c}_{Sw,i,j} &= 0; \\ \bar{d}_{Sw,i,j} &= -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{w,i,j}S_{w,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2}m_{i,j+1}\rho_{w,i,j+1}S_{w,i,j+1}^{n+1/2} + \\ &+ \left(\frac{(1-R_{b,i+0,5,j})k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{w,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(1-R_{b,i-0,5,j})k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{w,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\ &+ \left(\frac{(1-R_{b,i,j+0,5})k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{w,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta x^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(1-R_{b,i,j-0,5})k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{w,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{(1-R_{b,i+0,5,j})k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{w,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{(1-R_{b,i-0,5,j})k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{w,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{(1-R_{b,i,j+0,5})k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{w,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta x^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \\ &- \frac{(1-R_{b,i,j-0,5})k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{w,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta x^2} P_{i,j-1}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Далее, третье уравнение системы (1), заменяем на конечно-разностный аналог со вторым порядком точности по времени и пространственным переменным:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^n + \frac{1}{2\Delta t}m_{i+1,j}\rho_{b,i+1,j}S_{b,i+1,j}^{n+1/2} - \\ &- \frac{1}{2\Delta t}m_{i+1,j}\rho_{b,i+1,j}S_{b,i+1,j}^n = \frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} P_{i+1,j}^n - \\ &- \left(\frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2} \right) P_{i,j}^n + \\ &+ \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2} P_{i-1,j}^n + \\ &+ \frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2} P_{i,j+1}^n - \\ &- \left(\frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2} \right) P_{i,j}^n + \\ &+ \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2} P_{i,j-1}^n; \end{aligned} \tag{17}$$

В уравнении (17), группируя схожие члены, окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{b,i+1,j}S_{b,i+1,j}^{n+1/2} - \left(-\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}\right)S_{b,i,j}^{n+1/2} = \\ & = -\left(-\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^n - \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{b,i+1,j}S_{b,i+1,j}^n + \right. \\ & + \left(\frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^n + \\ & + \left(\frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2} + \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2}\right)P_{i,j}^n - \\ & - \frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^n - \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^n - \\ & \left. - \frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2}P_{i,j+1}^n - \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2}P_{i,j-1}^n\right) \end{aligned}$$

или

$$a_{Sb,i,j}S_{b,i+1,j}^{n+1/2} - b_{Sb,i,j}S_{b,i,j}^{n+1/2} + c_{Sb,i,j}S_{b,i-1,j}^{n+1/2} = -d_{Sb,i,j}, \quad (18)$$

где

$$a_{Sb,i,j} = \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{b,i+1,j}; \quad b_{Sb,i,j} = -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}; \quad c_{Sb,i,j} = 0;$$

$$\begin{aligned} d_{Sb,i,j} = & -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^n - \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{b,i+1,j}S_{b,i+1,j}^n + \\ & + \left(\frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^n + \\ & + \left(\frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta x^2} + \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^n - \\ & - \frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^n - \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^n - \\ & - \frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta x^2}P_{i,j+1}^n - \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta x^2}P_{i,j-1}^n. \end{aligned}$$

Вышеуказанная процедура, применяется для времени: $n + 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j+1}\rho_{b,i,j+1}S_{b,i,j+1}^{n+1} - \\ & - \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j+1}\rho_{b,i,j+1}S_{b,i,j+1}^{n+1/2} = \frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^{n+1/2} - \\ & - \left(\frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^{n+1/2} + \\ & + \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2}P_{i,j+1}^{n+1/2} - \\ & - \left(\frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2} + \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2}\right)P_{i,j}^{n+1/2} + \\ & + \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2}P_{i,j-1}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

В уравнении (19), группируя схожие члены, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}m_{i,j+1}\rho_{b,i,j+1}S_{b,i,j+1}^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}\right)S_{b,i,j}^{n+1} = \\
& = -\left(-\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2}m_{i,j+1}\rho_{b,i,j+1}S_{b,i,j+1}^{n+1/2} + \right. \\
& + \left(\frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^{n+1/2} + \\
& + \left(\frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2} + \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2}\right)P_{i,j}^{n+1/2} - \\
& - \frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^{n+1/2} - \\
& - \left.\frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta y^2}P_{i,j+1}^{n+1/2} - \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta y^2}P_{i,j-1}^{n+1/2}\right)
\end{aligned}$$

или

$$\bar{a}_{Sb,i,j}S_{b,i,j+1}^{n+1} - \bar{b}_{Sb,i,j}S_{b,i,j}^{n+1} + \bar{c}_{Sb,i,j}S_{b,i,j-1}^{n+1} = -\bar{d}_{Sb,i,j}. \quad (20)$$

Здесь

$$\bar{a}_{Sb,i,j} = \frac{1}{2}m_{i,j+1}\rho_{b,i,j+1}; \quad \bar{b}_{Sb,i,j} = -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}; \quad \bar{c}_{Sb,i,j} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{Sb,i,j} = & -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{b,i,j}S_{b,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2}m_{i,j+1}\rho_{b,i,j+1}S_{b,i,j+1}^{n+1/2} + \\
& + \left(\frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^{n+1/2} + \\
& + \left(\frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta x^2} + \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^{n+1/2} - \\
& - \frac{R_{b,i+0,5,j}k_{i+0,5,j}k_{rw,i+0,5,j}\rho_{b,i+0,5,j}}{\mu_{wb,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{R_{b,i-0,5,j}k_{i-0,5,j}k_{rw,i-0,5,j}\rho_{b,i-0,5,j}}{\mu_{wb,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^{n+1/2} - \\
& - \frac{R_{b,i,j+0,5}k_{i,j+0,5}k_{rw,i,j+0,5}\rho_{b,i,j+0,5}}{\mu_{wb,i,j+0,5}\Delta x^2}P_{i,j+1}^{n+1/2} - \frac{R_{b,i,j-0,5}k_{i,j-0,5}k_{rw,i,j-0,5}\rho_{b,i,j-0,5}}{\mu_{wb,i,j-0,5}\Delta x^2}P_{i,j-1}^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

Аналогично, вышеуказанная процедура применяется для времени $n + \frac{1}{2}$ для четвертого уравнения системы (1):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{g,i,j}S_{g,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{g,i,j}S_{g,i,j}^n + \frac{1}{2\Delta t}m_{i+1,j}\rho_{g,i+1,j}S_{g,i+1,j}^{n+1/2} - \\
& - \frac{1}{2\Delta t}m_{i+1,j}\rho_{g,i+1,j}S_{g,i+1,j}^n = \frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^n - \\
& - \left(\frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j}k_{rg,i-0,5,j}\rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^n + \\
& + \frac{k_{i-0,5,j}k_{rg,i-0,5,j}\rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^n + \\
& + \frac{k_{i,j+0,5}k_{rg,i,j+0,5}\rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5}\Delta y^2}P_{i,j+1}^n - \left(\frac{k_{i,j+0,5}k_{rg,i,j+0,5}\rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5}\Delta y^2} + \right. \\
& + \left.\frac{k_{i,j-0,5}k_{rg,i,j-0,5}\rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5}\Delta y^2}\right)P_{i,j}^n + \frac{k_{i,j-0,5}k_{rg,i,j-0,5}\rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5}\Delta y^2}P_{i,j-1}^n.
\end{aligned} \quad (21)$$

В конечно-разностном уравнении (21) группируем схожие члены и получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{g,i+1,j}S_{g,i+1,j}^{n+1/2} - \left(-\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{g,i,j}\right)S_{g,i,j}^{n+1/2} = \\ & = -\left(-\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{g,i,j}S_{g,i,j}^n - \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{g,i+1,j}S_{g,i+1,j}^n + \right. \\ & + \left(\frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j}k_{rg,i-0,5,j}\rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^n + \\ & + \left(\frac{k_{i,j+0,5}k_{rg,i,j+0,5}\rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5}\Delta y^2} + \frac{k_{i,j-0,5}k_{rg,i,j-0,5}\rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5}\Delta y^2}\right)P_{i,j}^n - \\ & - \frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^n - \frac{k_{i-0,5,j}k_{rg,i-0,5,j}\rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^n - \\ & \left. - \frac{k_{i,j+0,5}k_{rg,i,j+0,5}\rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5}\Delta y^2}P_{i,j+1}^n - \frac{k_{i,j-0,5}k_{rg,i,j-0,5}\rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5}\Delta y^2}P_{i,j-1}^n\right) \end{aligned}$$

или

$$a_{Sg,i,j}S_{g,i+1,j}^{n+1/2} - b_{Sg,i,j}S_{g,i,j}^{n+1/2} + c_{Sg,i,j}S_{g,i-1,j}^{n+1/2} = -d_{Sg,i,j}. \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{Sg,i,j} &= \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{g,i+1,j}; & b_{Sg,i,j} &= -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{g,i,j}; & c_{Sg,i,j} &= 0; \\ d_{Sg,i,j} &= -\frac{1}{2}m_{i,j}\rho_{g,i,j}S_{g,i,j}^n - \frac{1}{2}m_{i+1,j}\rho_{g,i+1,j}S_{g,i+1,j}^n + \\ & + \left(\frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j}k_{rg,i-0,5,j}\rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^n + \\ & + \left(\frac{k_{i,j+0,5}k_{rg,i,j+0,5}\rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5}\Delta x^2} + \frac{k_{i,j-0,5}k_{rg,i,j-0,5}\rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^n - \\ & - \frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^n - \frac{k_{i-0,5,j}k_{rg,i-0,5,j}\rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j}\Delta x^2}P_{i-1,j}^n - \\ & - \frac{k_{i,j+0,5}k_{rg,i,j+0,5}\rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5}\Delta x^2}P_{i,j+1}^n - \frac{k_{i,j-0,5}k_{rg,i,j-0,5}\rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5}\Delta x^2}P_{i,j-1}^n. \end{aligned}$$

Далее, указанную выше процедуру применяем для времени $n + 1$ для четвёртого уравнения системы (1) и получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{g,i,j}S_{g,i,j}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j}\rho_{g,i,j}S_{g,i,j}^{n+1/2} + \\ & + \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j+1}\rho_{g,i,j+1}S_{g,i,j+1}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta t}m_{i,j+1}\rho_{g,i,j+1}S_{g,i,j+1}^{n+1/2} = \\ & = \frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2}P_{i+1,j}^{n+1/2} - \\ & - \left(\frac{k_{i+0,5,j}k_{rg,i+0,5,j}\rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j}\Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j}k_{rg,i-0,5,j}\rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j}\Delta x^2}\right)P_{i,j}^{n+1/2} + \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_{i-0,5,j} k_{rg,i-0,5,j} \rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} + \\
& + \frac{k_{i,j+0,5} k_{rg,i,j+0,5} \rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{rg,i,j+0,5} \rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5} \Delta y^2} + \right. \\
& \left. + \frac{k_{i,j-0,5} k_{rg,i,j-0,5} \rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \frac{k_{i,j-0,5} k_{rg,i,j-0,5} \rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

В уравнении (23) группируем схожие члены и получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{g,i,j+1} S_{g,i,j+1}^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{g,i,j} \right) S_{g,i,j}^{n+1} = \\
& = - \left(-\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{g,i,j} S_{g,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{g,i,j+1} S_{g,i,j+1}^{n+1/2} + \right. \\
& + \left(\frac{k_{i+0,5,j} k_{rg,i+0,5,j} \rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j} \Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j} k_{rg,i-0,5,j} \rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\
& + \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{rg,i,j+0,5} \rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5} \Delta y^2} + \frac{k_{i,j-0,5} k_{rg,i,j-0,5} \rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} - \\
& - \frac{k_{i+0,5,j} k_{rg,i+0,5,j} \rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{k_{i-0,5,j} k_{rg,i-0,5,j} \rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} - \\
& \left. - \frac{k_{i,j+0,5} k_{rg,i,j+0,5} \rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \frac{k_{i,j-0,5} k_{rg,i,j-0,5} \rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1/2} \right)
\end{aligned}$$

или

$$\bar{a}_{Sg,i,j} S_{g,i,j+1}^{n+1} - \bar{b}_{Sg,i,j} S_{g,i,j}^{n+1} + \bar{c}_{Sg,i,j} S_{g,i,j-1}^{n+1} = -\bar{d}_{Sg,i,j}. \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
& \bar{a}_{Sg,i,j} = \frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{g,i,j+1}; \quad \bar{b}_{Sg,i,j} = -\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{g,i,j}; \quad \bar{c}_{Sg,i,j} = 0; \\
& \bar{d}_{Sg,i,j} = -\frac{1}{2} m_{i,j} \rho_{g,i,j} S_{g,i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} m_{i,j+1} \rho_{g,i,j+1} S_{g,i,j+1}^{n+1/2} + \\
& + \left(\frac{k_{i+0,5,j} k_{rg,i+0,5,j} \rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j} \Delta x^2} + \frac{k_{i-0,5,j} k_{rg,i-0,5,j} \rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j} \Delta x^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} + \\
& + \left(\frac{k_{i,j+0,5} k_{rg,i,j+0,5} \rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5} \Delta y^2} + \frac{k_{i,j-0,5} k_{rg,i,j-0,5} \rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5} \Delta y^2} \right) P_{i,j}^{n+1/2} - \\
& - \frac{k_{i+0,5,j} k_{rg,i+0,5,j} \rho_{g,i+0,5,j}}{\mu_{g,i+0,5,j} \Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{k_{i-0,5,j} k_{rg,i-0,5,j} \rho_{g,i-0,5,j}}{\mu_{g,i-0,5,j} \Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1/2} - \\
& + \frac{k_{i,j+0,5} k_{rg,i,j+0,5} \rho_{g,i,j+0,5}}{\mu_{g,i,j+0,5} \Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1/2} - \frac{k_{i,j-0,5} k_{rg,i,j-0,5} \rho_{g,i,j-0,5}}{\mu_{g,i,j-0,5} \Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

Для определения изменений температуры многофазных смесей в пористой среде заменим уравнения (4)-(6) на конечно-разностные для временного слоя $n = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^n}{2\Delta t} + \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i+1,j}^n}{2\Delta t} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n}{\Delta x} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2} \right) \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n}{\Delta y} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2} \right) \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n}{\Delta y} = \\
 & = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\lambda_{t,i+0,5,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} - (\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}) T_{i,j}^{n+1/2} + \lambda_{t,i-0,5,j} T_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\
 & + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\lambda_{t,i,j+0,5} T_{i,j+1}^n - (\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}) T_{i,j}^n + \lambda_{t,i,j-0,5} T_{i,j-1}^n \right);
 \end{aligned} \tag{25}$$

В уравнении (25), раскрывая скобки, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^n}{2\Delta t} + \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i+1,j}^n}{2\Delta t} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i+1,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i,j}^{n+1/2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i+1,j}^n - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i,j}^n + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i,j}^n - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i-1,j}^n + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta y} T_{i,j+1}^n - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta y} T_{i,j}^n + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta y} T_{i,j}^n - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta y} T_{i,j-1}^n = \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} - \\
 & - \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i,j}^{n+1/2} + \frac{\lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^{n+1/2} + \\
 & + \frac{\lambda_{t,i,j+0,5}}{\Delta y^2} T_{i,j+1}^n - \frac{\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} T_{i,j}^n + \frac{\lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} T_{i,j-1}^n.
 \end{aligned} \tag{26}$$

В уравнении (26) группируем схожие члены и получаем:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x} \right) T_{i-1,j}^{n+1/2} - \\
& - \left(\frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} + \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \\
& + \left(\frac{\lambda_{t,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x} \right) T_{i+1,j}^{n+1/2} = \\
& = - \left(\left(\frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x} \right) T_{i+1,j}^n + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i-1,j}^n + \right. \\
& + \left. \left(\frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{\Delta y} - \frac{\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} \right) T_{i,j}^n + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\lambda_{t,i,j+0,5}}{\Delta y^2} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y} \right) T_{i,j+1}^n + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y} \right) T_{i,j-1}^n \right)
\end{aligned}$$

или

$$a_{i,j}T_{i+1,j}^{n+1/2} - b_{i,j}T_{i,j}^{n+1/2} + c_{i,j}T_{i-1,j}^{n+1/2} = -d_{i,j}. \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \frac{\lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x}; \\
b_{i,j} &= \frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} + \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x}; \\
c_{i,j} &= \frac{\lambda_{t,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x}; \\
d_{i,j} &= \left(\frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x} \right) T_{i+1,j}^n + \\
& \quad + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta x} T_{i-1,j}^n + \\
& + \left(\frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{\Delta y} - \frac{\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} \right) T_{i,j}^n + \\
& \quad + \left(\frac{\lambda_{t,i,j+0,5}}{\Delta y^2} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y} \right) T_{i,j+1}^n + \\
& \quad + \left(\frac{\lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y} \right) T_{i,j-1}^n.
\end{aligned}$$

Вышеуказанную процедуру будем выполнять для временного слоя $n + 1$, в результате чего получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} + \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta t} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta t} + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2} \right) \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2} \right) \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i,j+1}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} + \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = \\
 & + \left(\frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4} \right) \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} = \\
 & = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\lambda_{t,i+0,5,j} T_{i+1,j}^{n+1/2} - (\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}) T_{i,j}^{n+1/2} + \lambda_{t,i-0,5,j} T_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \\
 & + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\lambda_{t,i,j+0,5} T_{i,j+1}^{n+1} - (\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}) T_{i,j}^{n+1} + \lambda_{t,i,j-0,5} T_{i,j-1}^{n+1} \right).
 \end{aligned} \tag{28}$$

В уравнение (28), раскрывая скобки, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{t,i,j} T_{i,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} + \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta t} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j} T_{i+1,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta x} T_{i+1,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta x} T_{i,j}^{n+1/2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta x} T_{i,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{2\Delta x} T_{i-1,j}^{n+1/2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j+1}^{n+1} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j}^{n+1} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j+1}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j}^{n+1/2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j}^{n+1} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j-1}^{n+1} + \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j}^{n+1/2} - \\
 & - \frac{(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j} v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j-1}^{n+1/2} = \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} T_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} - \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} T_{i,j}^{n+1/2} + \\
 & + \frac{\lambda_{t,i-0,5,j} T_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{\lambda_{t,i,j+0,5} T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} - \frac{\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} T_{i,j}^{n+1} + \frac{\lambda_{t,i,j-0,5} T_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2},
 \end{aligned}$$

и группируя схожие члены, окончательно получим:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y} \right) T_{i,j-1}^{n+1} - \\
& - \left(\frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} + \frac{\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y} \right) T_{i,j}^{n+1} + \\
& + \left(\frac{\lambda_{t,i,j+0,5}}{\Delta y^2} - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y} \right) T_{i,j+1}^{n+1} = \\
& = - \left(\left(\frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y} \right) T_{i,j+1}^{n+1/2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j-1}^{n+1/2} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{\Delta x} - \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\lambda_{t,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x} \right) T_{i+1,j}^{n+1/2} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x} \right) T_{i-1,j}^{n+1/2} \right). \tag{29}
\end{aligned}$$

Уравнение (29) в матричной форме можно записать как:

$$\bar{a}_{i,j}T_{i,j+1}^{n+1} - \bar{b}_{i,j}T_{i,j}^{n+1} + \bar{c}_{i,j}T_{i,j-1}^{n+1} = -\bar{d}_{i,j}. \tag{30}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{i,j} &= \frac{\lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y}; \\
\bar{b}_{i,j} &= \frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} + \frac{\lambda_{t,i,j+0,5} + \lambda_{t,i,j-0,5}}{\Delta y^2} + \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y}; \\
\bar{c}_{i,j} &= \frac{\lambda_{t,i,j+0,5}}{\Delta y^2} - \frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y}; \\
\bar{d}_{i,j} &= \left(\frac{(c\rho)_{t,i+1,j}}{2\Delta t} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y} \right) T_{i,j+1}^{n+1/2} + \\
& \quad + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{4\Delta y} T_{i,j-1}^{n+1/2} + \\
& \quad + \left(\frac{(c\rho)_{t,i,j}}{2\Delta t} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta y} - \frac{|(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{\Delta x} - \frac{\lambda_{t,i+0,5,j} + \lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} \right) T_{i,j}^{n+1/2} + \\
& \quad + \left(\frac{\lambda_{t,i+0,5,j}}{\Delta x^2} - \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} - |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x} \right) T_{i+1,j}^{n+1/2} + \\
& \quad + \left(\frac{\lambda_{t,i-0,5,j}}{\Delta x^2} + \frac{(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j} + |(c\rho)_{f,i,j}v_{f,i,j}|}{2\Delta x} \right) T_{i-1,j}^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

Далее, для решение поставленной задачи граничное условие (6) заменим на разностный аналог и получим:

$$\lambda_f \frac{-3T_{0,j}^{n+1/2} + 4T_{1,j}^{n+1/2} - T_{2,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = \beta T_{0,j}^{n+1/2} - \beta T_{v,0,j}^n. \quad (31)$$

Группируя в уравнение (31) схожие члены, можно получить соотношение

$$T_{0,j}^{n+1/2} = \frac{\lambda_f b_{1,j} - 4\lambda_f c_{1,j}}{\lambda_f a_{1,j} - 2\Delta x \beta c_{1,j} - 3\lambda_f c_{1,j}} T_{1,j}^{n+1/2} + \frac{-2\Delta x \beta c_{1,j} T_{v,0,j}^n - \lambda_f d_{1,j}}{\lambda_f a_{1,j} - 2\Delta x \beta c_{1,j} - 3\lambda_f c_{1,j}}. \quad (32)$$

Используя соотношение (32), можно определить прогоночные коэффициенты следующим образом:

$$\alpha_{0,j} = \frac{\lambda_f b_{1,j} - 4\lambda_f c_{1,j}}{\lambda_f a_{1,j} - 2\Delta x \beta c_{1,j} - 3\lambda_f c_{1,j}}; \quad \beta_{0,j} = \frac{-2\Delta x \beta c_{1,j} T_{v,0,j}^n - \lambda_f d_{1,j}}{\lambda_f a_{1,j} - 2\Delta x \beta c_{1,j} - 3\lambda_f c_{1,j}}.$$

Соответственно, граничное условие (6) при $x = L_x$ заменяем на конечно-разностные и получим:

$$\lambda_f \frac{T_{N-2,j}^{n+1/2} - 4T_{N-1,j}^{n+1/2} + 3T_{N,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} = \beta T_{N,j}^{n+1/2} - \beta T_{v,N,j}^n. \quad (33)$$

Группируя схожие члены в соотношении (33), окончательно получим:

$$T_{N,j}^{n+1/2} = \frac{4\beta_{N-1,j} \lambda_f - \alpha_{N-2,j} \beta_{N-1,j} \lambda_f - \beta_{N-2,j} \lambda_f - 2\Delta x \beta T_{v,N,j}^n}{\alpha_{N-2,j} \alpha_{N-1,j} \lambda_f - 4\alpha_{N-1,j} \lambda_f + 3\lambda_f - 2\Delta x \beta}.$$

Аналогичную процедуру применяем для граничного условия (6) при $y=0$:

$$\lambda_f \frac{-3T_{i,0}^{n+1} + 4T_{i,1}^{n+1} - T_{i,2}^{n+1}}{2\Delta y} = \beta T_{i,0}^{n+1} - \beta T_{v,i,0}^{n+1/2}. \quad (34)$$

Группируя схожие члены в (34), окончательно получим:

$$T_{0,j}^{n+1} = \frac{\lambda_f \bar{b}_{i,1} - 4\lambda_f \bar{c}_{i,1}}{\lambda_f \bar{a}_{i,1} - 2\Delta y \beta \bar{c}_{i,1} - 3\lambda_f \bar{c}_{i,1}} T_{i,1}^{n+1} + \frac{-2\Delta y \beta \bar{c}_{i,1} T_{v,i,0}^{n+1/2} - \lambda_f \bar{d}_{i,1}}{\lambda_f \bar{a}_{i,1} - 2\Delta y \beta \bar{c}_{i,1} - 3\lambda_f \bar{c}_{i,1}},$$

где прогоночные коэффициенты можно вычислить с помощью соотношений

$$\bar{\alpha}_{0,j} = \frac{\lambda_f \bar{b}_{i,1} - 4\lambda_f \bar{c}_{i,1}}{\lambda_f \bar{a}_{i,1} - 2\Delta y \beta \bar{c}_{i,1} - 3\lambda_f \bar{c}_{i,1}}; \quad \bar{\beta}_{0,j} = \frac{-2\Delta y \beta \bar{c}_{i,1} T_{v,i,0}^{n+1/2} - \lambda_f \bar{d}_{i,1}}{\lambda_f \bar{a}_{i,1} - 2\Delta y \beta \bar{c}_{i,1} - 3\lambda_f \bar{c}_{i,1}}$$

Далее, в граничном условии (6) при $y = L_y$, заменяем операторы на конечно-разностные и получим:

$$T_{N,j}^{n+1} = \frac{4\bar{\beta}_{i,M-1} \lambda_f - \bar{\alpha}_{i,M-2} \bar{\beta}_{i,M-1} \lambda_f - \bar{\beta}_{i,M-2} \lambda_f - 2\Delta y \beta T_{v,i,J}^{n+1/2}}{\bar{\alpha}_{i,M-2} \bar{\alpha}_{i,M-1} \lambda_f - 4\bar{\alpha}_{i,M-1} \lambda_f + 3\lambda_f - 2\Delta y \beta}.$$

4 Выводы

Итак, можно сказать, что для проведения исследования нестационарного процесса фильтрации водогазовой смеси в пористой среде разработаны многомерная математическая модель и численный алгоритм.

Литература

- [1] *Равшанов Н., Аминов С.* Численное моделирование фильтрации газа в неоднородной пористой среде для расчета газодинамических параметров процесса // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – № 3(41). – 2022. – С. 60–78.

- [2] *Питюк Ю.А., Мусин А.А., Ковалева Л.А., Фахреева Р.Р.* Численное моделирование фильтрации водогазовой смеси в пористых средах // Вестник Башкирского университета. Т. 24. №2. – 2019. – С. 295–300.
- [3] *Egorov Yu. A.* Razrabotka tekhnologii vodogazovogo vozdeistviya s ispol'zovaniem nasosno-ezhektornykh sistem dlya povysheniya nefteotdachi plastov // diss. ... k.t.n. Moscow: RGU nefti i gaza im. I. M. Gubkina. – 2006.
- [4] *Bolotov A. A.* Izv. AN SSSR. Ser. Mekhanika zhidkosti i gaza. – No. 1. – 1988. – P. 172–175.
- [5] *Васильева М.В., Прокопьев Г.А.* Численное решение задачи двухфазной фильтрации с неоднородными коэффициентами методом конечных элементов. // Математические заметки СВФУ Апрель—июнь, – 2017. Том 24, – №2. – С. 46-60. DOI 10.25587/SVFU.2017.2.9245
- [6] *Шарафутдинов Р.Ф., Канафин И.В., Хабиров Т.Р.* Численное исследование температурного поля в скважине с многопластовой системой при движении газированной нефти // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. Т. 60, – №5. – С. 125–135. DOI: 10.15372/PMTF20190512
- [7] *Шарафутдинов Р.Ф., Бочков А.С., Шарипов А.М., Садретдинов А.А.* Фильтрация газированной нефти при наличии фазовых переходов в пористой среде с неоднородной проницаемостью // ПМТФ. Т. 58, – № 2. – 2017. – С. 98–102.
- [8] *Izges B.* MathematiTransient fluid and heat flow modeling in coupled wellbore/reservoir systems // Diss. Austin, – 2008.
- [9] *Zhe Wang.* Analyzing wellbore temperature distributions using nonisothermal multiphase flow simulation // SPE Western North Amer. region. meeting, Anchorage (USA), 7–11 May 2011. Houston: Soc. Petrol. Engrs, – 2011. SPE 144577.
- [10] *Люпа А.А., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г.* Моделирование неизотермической многофазной фильтрации с применением явных разностных схем - // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2016. – № 103. 20 с. doi:10.20948/prepr-2016-103 <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-103>
- [11] *Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В.* Об одной схеме для решения задач фильтрации // Математическое моделирование. – Т.22, – №4. – 2010. – С. 99–109.
- [12] *Гиззатуллина А.А.* Исследование двумерной задачи фильтрации высоковязкой нефти в пласте при тепловом воздействии // Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. Том 12 – 2017. – № 2. – С. 232–237.
- [13] *Лубянин А.А.* Численно-аналитическое моделирование фильтрации в стохастически неоднородной пористой среде // Диссерт. работа на соискания ученой степени кандидата физ. Мат. Наук. Москва – 2013.
- [14] *Галагуз Ю.П., Сафина Г.Л.* Моделирование фильтрации в неоднородной пористой среде // Вестник БГТУ им. В.Г.Шухова – 2017 г. №11. <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-filtratsii-v-neodnorodnoy-poristoy-srede/viewer>
- [15] *Ахмед-Заки Д.Ж.* Моделирование фильтрации жидкости в неоднородном пласте // Л.Н. Гумилев атындагы ЕҰҰ Хабаршы - Вестник ЕНУ им.Л.Н. Гумилева, – 2010. – №6. – С.22–27.
- [16] *Келбалиев Г.И., Расулов С.Р., Рзаев А.Г., Сулейманов Г.З., Мустафаева Г.Р.* Моделирование фильтрации нефтей в пористой среде и технология жидкофазной экстракции асфальтенов // January 2016 Теоретические основы химической технологии 50(6): 673–682. DOI:10.7868/S0040357116060087

- [17] *Васильев В.И., Васильева М.В., Григорьев А.В., Прокопьев Г.А.* Математическое моделирование задачи двухфазной фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах с использованием модели двойной пористости и метода конечных элементов // Ученые записки казанского университета. серия физико-математические науки Т. 160, кн. 1 ISSN 2541-7746. – 2018. – С. 165–182.
- [18] *Мурадов А.А.* Нелинейные модели и законы фильтрации для изотропных и анизотропных пористых сред // Диссертации на учинённой степени канд. физико-математических наук. Москва, – 2010. – 129 с.
- [19] *Зайцев М.В., Михайлов Н.Н., Туманова Е.С.* Модели нелинейной фильтрации и влияние параметров нелинейности на дебит скважин в низкопроницаемых коллекторах // Георесурсы/Georesursy – 2021. Т. 23. № 4. – С. 44–50.
- [20] *Бутнев О.И., Горев И.В., Колесников С.С., Кузнецов В.Ю., Пронин В.А., Сидоров М.Л., Яруллин А.Д.* Полностью неявная схема решения задач трехфазной фильтрации на неструктурированных сетках в комплексе программ НИМФА // Математическое моделирование физических процессов. 102-119 ст. <http://book.sarov.ru/wp-content/uploads/2021/05/Works-RFNC-VNIEF-v23-1-8.pdf>
- [21] *Biot M.A.* General Theory of Three Dimensional Consolidation // General Theory of Three Dimensional Consolidation / M. A. Biot // Journal of Applied Physics. – 1941. – Vol. 12. № 2. – P. 155–161.
- [22] *Biot M.A.* Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid // M.A. Biot // Journal of Applied Physics. – Vol. 26. № 2. – 1955. – P. 182–185.
- [23] *Бурнашев В.Ф., Кайтаров З.Д.* Математическое моделирование многофазной фильтрации с учетом деформации пористой среды // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2022. – №3(41). – С. 5–20.
- [24] *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. // М.: Гостоптехиздат, – 1963. – 396 с.

Поступила в редакцию 11.10.2023

UDC 519.6

MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL ALGORITHM FOR STUDYING THE FILTRATION PROCESS OF A WATER-GAS MIXTURE IN POROUS MEDIA

Ravshanov N.

ravshanzade-09@mail.ru

Research Institute for the Development of
Digital Technologies and artificial intelligence,

100124, 17A, Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan.

The article is devoted to the development of a multidimensional mathematical model for a comprehensive study of the filtration process of multiphase fluids in a porous medium. To integrate the problem posed, an effective numerical algorithm of high order approximation is proposed. Using the proposed mathematical tool, this work examines the filtration of a three-phase mixture (water with bubbles, oil and free gas) in a porous medium. When modeling the process of filtration of a water-gas mixture in porous media, the growth and enlargement of small bubbles in the pore space of the rock, the formation of a free gas phase, the slippage effect, pore compressibility and the non-isothermal nature of the process are taken into account. To take into account the variability of filtration

coefficients and layer porosity, a mathematical formula (functional dependencies) is obtained, which takes into account the pressure drop in the deformable reservoir skeleton.

Keywords: mathematical model, effective numerical algorithm, water-gas mixture, filtration of water-gas mixture, porous medium.

Citation: Ravshanov N. 2023. Mathematical model and numerical algorithm for studying the filtration process of a water-gas mixture in porous media. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52):90-114.

УДК 539.3

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

^{1*} Юсупов М., ¹ Каршиев Д.К., ² Шарипов Х.Д.

*yusupovmajid1956@mail.ru

¹Ташкентский государственный аграрный университет,
Узбекистан, Ташкентская область, Кибрайский р-н, ул. Университетская, 2 А;²Научно-исследовательский институт развития цифровых
технологий и искусственного интеллекта,
100125, Узбекистан, Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.

Рассмотрены вертикальные колебания трех грузов с различными массами, соединенных нелинейно-вязкоупругими пружинами (подвесками). Учёт реологические свойства подвески использована интегральная модель с ядром релаксации Колтунова-Ржаницына. Разработаны эффективные вычислительные алгоритмы решения задач основанного на использование квадратурные формуле. Исследовано влияние реологические свойство подвески на смещение массы от положения статического равновесия. Исследованы влияние нелинейные свойства подвески на форме колебание и частоты.

Ключевые слова: алгоритм, ядро релаксации, интегро-дифференциальное уравнение, частота, амплитуда, упругость, вязкоупругость, напряжение, деформация, интегральный оператор.

Цитирование: Юсупов М., Каршиев Д.К., Шарипов Х.Д. Вертикальные нелинейные колебания вязкоупругих систем с тремя степенями свободы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 115-122.

1 Введение

Известно, что практически все композитные материалы с полимерной матрицей обладают также свойством обратной ползучести. При разгрузке часть деформации композитов вследствие упругих свойств полимерного связующего восстанавливается, а затем происходит процесс упругого последействия вследствие постепенного исчезновения высокоэластичной деформации. Таким образом, композитные материалы с полимерными матрицами проявляют под нагрузкой вязкоупругие свойства. Наиболее полно это явление – вязкоупругость – учитывается в наследственных теориях ползучести. При определении напряжённо-деформированного состояния конструкций из вязкоупругих материалов используются соотношения, связывающие напряжения, деформации и время [1].

Выражение для релаксации напряжений при постоянных уровнях деформаций можно получить из общего уравнения вязкоупругости для релаксации материала [2, 3]:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - E \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau$$

Для описания релаксации композитного материала была выбрана функция влияния в виде слабо сингулярного ядра Колтунова - Ржаницына: $R(t) = Ae^{-\beta t}t^{\alpha-1}$.

В нелинейных вязкоупругих системах с учетом нескольких форм колебаний значительно сложнее, чем в системах с одной степенью свободы, но результаты такого

анализа представляет несомненный интерес. Отметим что, одним из важных приложений эффекта изменение диссипативных характеристик механическим систем являются задачи вязкоупругих систем с несколькими степенями свободы.

2 Постановка задачи

Рассмотрим вертикальные колебания трех грузов (рис. 1) с массами m_1 , m_2 и m_3 , соединенных нелинейно-вязкоупругими подвесками. Обозначим смещения масс m_1 , m_2 и m_3 от положения статического равновесия через x_1 , x_2 и x_3 , а силу действия подвесками на массу – через $F(z)$. Используя принцип Даламбера и рассматривая фиктивной равновесия (рис. 2) масс, к которым приложены силы инерции и восстанавливающей силы, получим [4, 5]:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + F(x_1) - F(x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + F(x_2 - x_1) - F(x_3 - x_2) &= 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 + F(x_3 - x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для функции $F(z)$ примем выражение [6–9]:

$$F(z) = k \left\{ z (1 + \gamma z^2) - \int_0^t R(t, \tau) z(\tau) [1 + \gamma z^2(\tau) d\tau] \right\}, \quad (2)$$

где k - жесткость подвески; γ - коэффициент нелинейности, зависящий от физических свойств материала подвески; $R(t, \tau)$ - ядро релаксации.

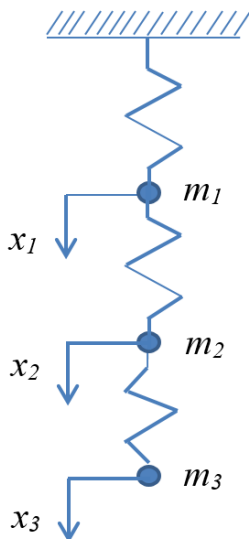


Рис. 1

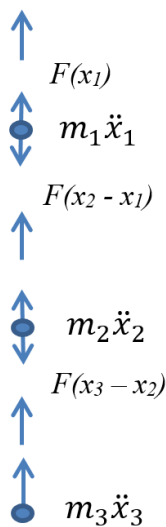


Рис. 2

Если k_1 , k_2 и k_3 - соответственно жесткости первой, второй и третьей подвески, тогда с учетом (2) система (1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \omega_{21}^2 (x_2 - x_1) [1 + \gamma_2 (x_2 - x_1)^2] - \omega_1^2 \gamma_1 x_1^2 + \\ &+ \omega_1^2 \int_0^t R_1(t, \tau) x_1(\tau) [1 + \gamma_1 x_1^2(\tau)] d\tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_{21}^2 \int_0^t R_2(t, \tau) [x_2(\tau) - x_1(\tau)] \{1 + \gamma_2[x_2(\tau) - x_1(\tau)]^2\} d\tau, \\
& \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \omega_2^2 x_1 [1 + \gamma_2(x_2 - x_1)^2] + \omega_{32}^2 (x_3 - x_2) [1 + \gamma_3(x_3 - x_2)^2] - \\
& -\omega_2^2 \gamma_2 x_2 (x_2 - x_1)^2 + \omega_2^2 \int_0^t R_2(t, \tau) [x_2(\tau) - x_1(\tau)] \cdot \{1 + \gamma_2[x_2(\tau) - x_1(\tau)]^2\} d\tau - \\
& -\omega_{32}^2 \int_0^t R_3(t, \tau) [x_3(\tau) - x_2(\tau)] \cdots \{1 + \gamma_3[x_3(\tau) - x_2(\tau)]^2\} d\tau, \\
& \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 = \omega_3^2 x_2 [1 + \gamma_3(x_3 - x_2)^2] - \omega_3^2 \gamma_3 x_3 (x_3 - x_2)^2 + \\
& + \omega_3^2 \int_0^t R_3(t, \tau) [x_3(\tau) - x_2(\tau)] \{1 + \gamma_3[x_3(\tau) - x_2(\tau)]^2\} d\tau,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$, $i = 1, 2, 3$; $\omega_{21}^2 = \frac{k_2}{m_1}$, $\omega_{32}^2 = \frac{k_3}{m_2}$.

Пусть заданы начальные значения смещения масс и их скорости, т.е.

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad \dot{x}_i(0) = \vartheta_{i0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

3 Метод решения

Система (3) решается методами основанной на использование квадратурной формулы [10–12]. Два раза интегрируя по t системы (3), на интервале $[0; t]$ имеем:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_{10} + \vartheta_{10}t + \int_0^t (t-s) \{ \omega_{21}^2 [x_2(s) - x_1(s)] [1 + \gamma_2[x_2(s) - x_1(s)]^2] - \\
& -\omega_1^2 x_1(s) - \omega_1^2 \gamma_1 x_1^2(s) \} ds + \omega_1^2 \int_0^t \Gamma_1(t-s) x_1(s) [1 + \gamma_1 x_1^2(s)] ds - \\
& -\omega_{21}^2 \int_0^t \Gamma_2(t-s) [x_2(s) - x_1(s)] \{1 + \gamma_2[x_2(s) - x_1(s)]^2\} ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= x_{20} + \vartheta_{20}t + \int_0^t (t-s) \{ \omega_2^2 x_1(s) [1 + \gamma_2[x_2(s) - x_1(s)]^2] - \omega_2^2 x_2(s) + \\
& + \omega_{32}^2 [x_3(s) - x_2(s)] \{1 + \gamma_3[x_3(s) - x_2(s)]^2\} - \omega_2^2 \gamma_2 x_2(s) [x_2(s) - x_1(s)]^2 \} ds + \\
& + \omega_2^2 \int_0^t \Gamma_2(t-s) [x_2(s) - x_1(s)] \{1 + \gamma_2[x_2(s) - x_1(s)]^2\} ds - \\
& -\omega_{32}^2 \int_0^t \Gamma_3(t-s) [x_3(s) - x_2(s)] \{1 + \gamma_3[x_3(s) - x_2(s)]^2\} ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= x_{30} + \vartheta_{30}t + \int_0^t (t-s) \{ \omega_3^2 x_2(s) [1 + \gamma_3[x_3(s) - x_2(s)]^2] - \omega_3^2 x_3(s) - \\
& -\omega_3^2 \gamma_3 x_3(s) [x_3(s) - x_2(s)]^2 \} ds + \\
& + \omega_3^2 \int_0^t \Gamma_3(t-s) [x_3(s) - x_2(s)] [1 + \gamma_3[x_3(s) - x_2(s)]^2] ds,
\end{aligned}$$

где

$$\Gamma_i(t-s) = \int_0^{t-s} (t-s-\tau) R_i(\tau) d\tau, \quad (i = 1, 3); \quad R_i(t) = \varepsilon_i e^{-\beta_i t} \cdot t^{\alpha_i - 1}.$$

В последние системе заменяя интегралы квадратурными формулами трапеции, для определения смещение груза от положения статического равновесия $x_{1i} = x_1(t_i)$, $x_{2i} = x_2(t_i)$ и $x_{3i} = x_3(t_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
x_{1n} &= x_{10} + \vartheta_{10}t_n + \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i) \{ \omega_{21}^2(x_{2i} - x_{1i}) [1 + \gamma_2(x_{2i} - x_{1i})^2] - \omega_1^2 x_{1i} - \omega_1^2 \gamma_1 x_{1i}^2 \} + \\
&\quad + \omega_1^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Gamma_1(t_n - t_i) x_{1i} (1 + \gamma_1 x_{1i}^2) - \\
&\quad - \omega_{21}^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Gamma_2(t_n - t_i) (x_{2i} - x_{1i}) [1 + \gamma_2(x_{2i} - x_{1i})^2], \\
x_{2n} &= x_{20} + \vartheta_{20}t_n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i) \{ \omega_2^2 x_{1i} [1 + \gamma_2(x_{2i} - x_{1i})^2] - \omega_2^2 x_{2i} + \\
&\quad \omega_{32}^2(x_{3i} - x_{2i}) [1 + \gamma_3(x_{3i} - x_{2i})^2] - \omega_2^2 \gamma_2 x_{2i} (x_{2i} - x_{1i})^2 \} \\
&\quad + \omega_2^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Gamma_2(t_n - t_i) (x_{2i} - x_{1i}) [1 + \gamma_2(x_{2i} - x_{1i})^2] - \\
&\quad - \omega_{32}^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Gamma_3(t_n - t_i) (x_{3i} - x_{2i}) [1 + \gamma_3(x_{3i} - x_{2i})^2], \\
x_{3n} &= x_{30} + \vartheta_{30}t_n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i) \{ \omega_3^2 x_{2i} [1 + \gamma_3(x_{3i} - x_{2i})^2] - \omega_3^2 x_{3i} - \\
&\quad - \omega_3^2 \gamma_3 x_{3i} (x_{3i} - x_{2i})^2 \} + \omega_3^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Gamma_3(t_n - t_i) (x_{3i} - x_{2i}) [1 + \gamma_3(x_{3i} - x_{2i})^2],
\end{aligned} \tag{4}$$

где $A_0 = A_n = \frac{\Delta t}{2}$; $A_j = \Delta t$, $j = \overline{1, n-1}$.

4 Результаты

Для проведения, вычислительного эксперимента разработана компьютерная программа, которая полученные результаты отражаются в виде графиков. При расчёта использована следующие исходные данные: $x_{10} = x_{20} = 0$; $x_{30} = 1$; $\vartheta_{10} = \vartheta_{20} = \vartheta_{30} = 0$; $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = \omega_{21}^2 = \omega_{32}^2 = 1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,25$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,05$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,05$; $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,462$. На рис. 1,2,3 изображены нелинейные ($\gamma_i = 0,462$) колебания грузы с массами m_1 , m_2 и m_3 от положения статического равновесия, где $\varepsilon_i = 0$ (сплошная линия), $\varepsilon_i = 0,01$ (пунктирная линия) и $\varepsilon_i = 0,05$ (точечная линия). Из графика (рис. 3,4,5) видно, что учёт реологические свойство подвески приводит к уменьшению амплитуды грузы от положение статического равновесия. Уменьшение частота колебаний грузы, приводит к сдвигу фаз. С течением времени вязкоупругие свойства подвески существенно влияет на амплитуды и частоты.

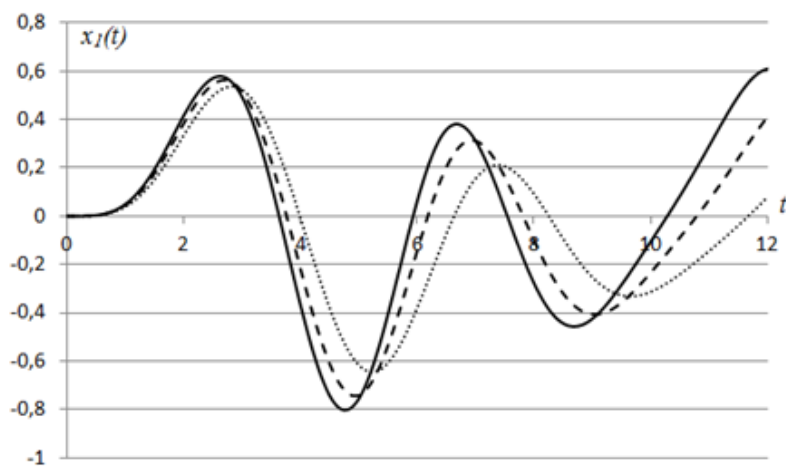


Рис. 3 Форма нелинейные колебание грузы с массами m_1 .

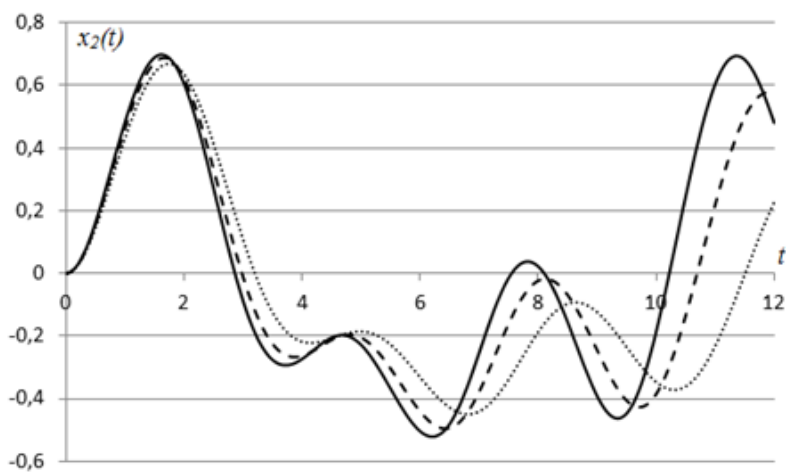


Рис. 4 Форма нелинейные колебание грузы с массами m_2 .

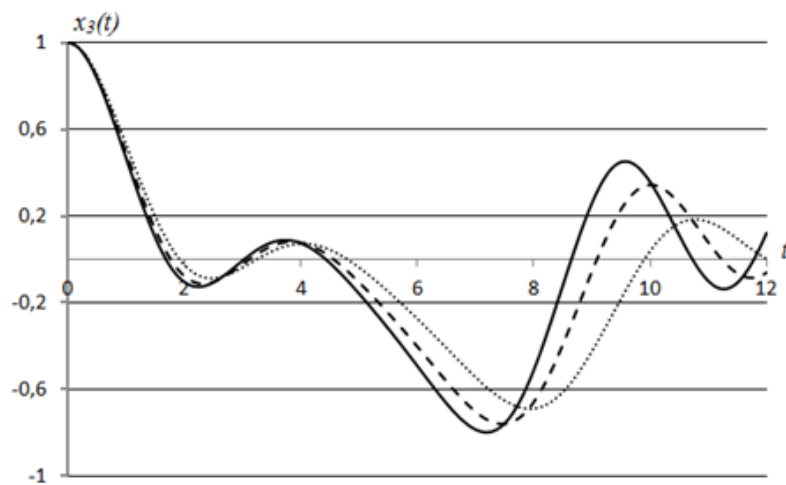


Рис. 5 Форма нелинейные колебание грузы с массами m_3 .

Исследованы влияние нелинейные свойства подвески на смещение грузы от положения статического равновесия. На рис. 6 показаны влияние нелинейные свойство подвески на форме колебание груза с массой m_1 . Здесь $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ (сплошная линия) и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,462$ (пунктирная линия); $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,645$ (точечная линия). Из графика видно что, с увеличением нелинейное свойство подвески, увеличивается частоты, которое приходит на сдвиг фазы. Влияние нелинейности на амплитуды колебания масс незначительно.

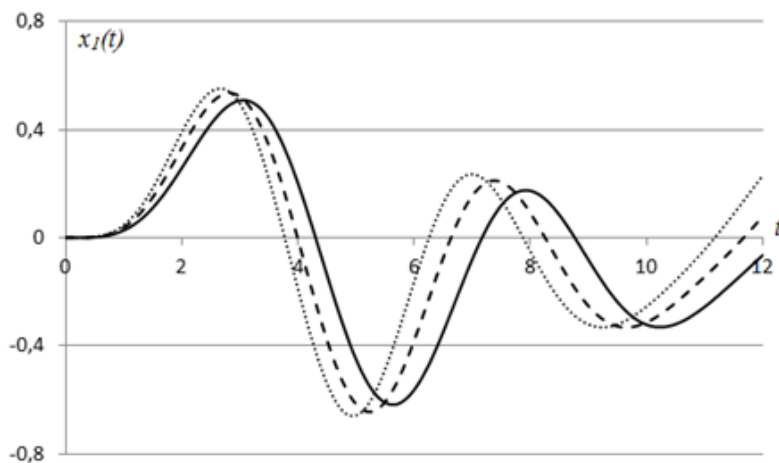


Рис. 6 Влияние нелинейные свойства подвеска на форму колебание груза с массой m_1 .

Как влияет реологические параметры на формы колебание вязкоупругих масс? Исследован изменение параметра α (рис. 7) и параметра ε (рис. 8) на форму колебаний. Из графика видно что, малое изменение этих параметров чувствительно влияет на изменение частоты колебания. Зависимости параметра α и частота пропорционально; параметра β и частота обратно пропорционально. Это объясняется следующим образом: с увеличением параметра α , материал подвески становится более вязким, а с увеличением параметра β наоборот.

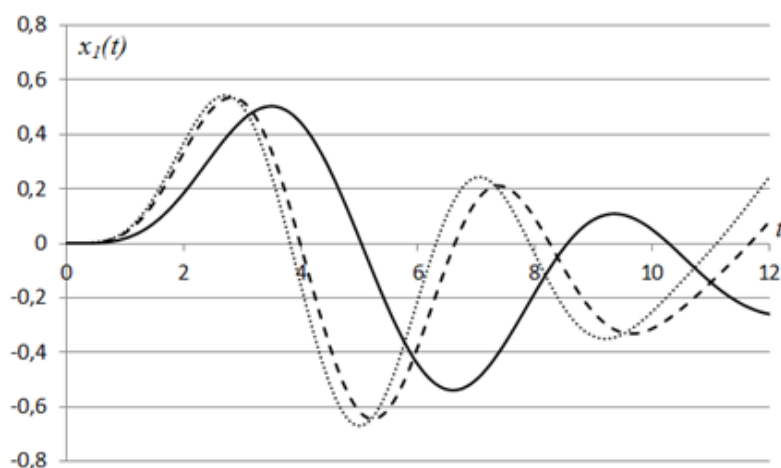


Рис. 7 Влияние параметра α на форму колебание груза с массой m_1 . Сплошная линия ($\alpha = 0,1$), пунктирная линия ($\alpha = 0,25$), точечная линия ($\alpha = 0,4$). $\gamma_i = 0,462$, $\varepsilon_i = 0,05$,

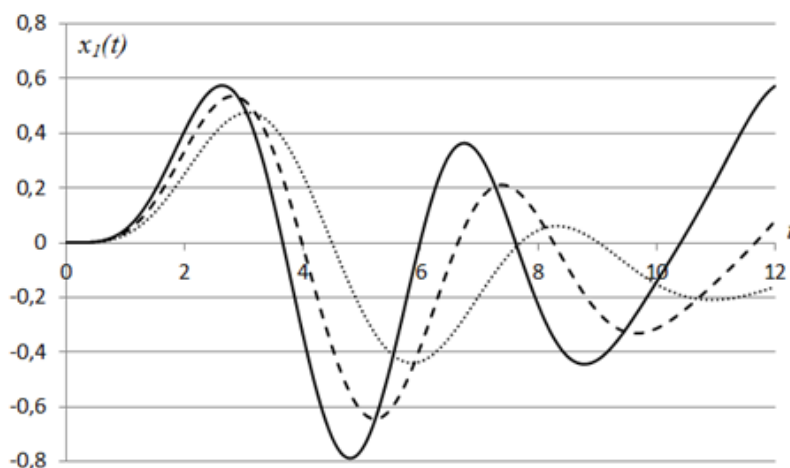


Рис. 8 Влияние параметра ε на форму колебание груза с массой m_1 . Сплошная линия ($\varepsilon = 0,005$), пунктирная линия ($\varepsilon = 0,05$), точечная линия ($\varepsilon = 0,1$).

5 Заключение

Разработаны методика, позволяющие спрогнозировать на стадии проектирования механических систем с тремя степенями свободы учётам вязкоупругих характеристик материалов их частей.

Использование схем, допускающих получение решения рассматриваемой задачи в замкнутом виде или с помощью алгоритмов типа (4), представляет собой весьма большой интерес. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности учета наследственно-деформируемых свойств динамических систем с несколькими степенями свободы.

На основе разработанному алгоритма для практического использования создан комплекс программ для персональной компьютере, предназначенный для расчета напряженно-деформированного состояния вязкоупругой динамических систем с несколькими степенями свободы. Математической модель (3), являющиеся базой комплекса программ, отличаются универсальностью и позволяют прогнозировать поведение систем подвесок различной формы, состоящих из композиции нескольких материалов.

Литература

- [1] *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твёрдого тела. // М.: Наука, – 1988. – 712 с.
- [2] *Победра Б.Е.* Механика композиционных материалов. // М.: Изд-во Моск. ун-та, – 1984. – 336 с.
- [3] *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твёрдых тел. // М.: Наука, – 1977. – 384 с.
- [4] *Бондарь Н.Г.* Нелинейные автономные системы строительной механики. М.: Стройиздат, – 1972. – 128 с.
- [5] *Бондарь Н.Г.* Колебания нелинейных консервативных систем с несколькими степенями свободы. // М.: ПМ, – 1967. т.3, вып.5, – С. 1–8.
- [6] *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. // Механика полимеров, 1962, №2, – С. 170–189.
- [7] *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Мир, – 1961. – 778 с.

- [8] *Алдошин Г.Т.* Теория линейных и нелинейных колебаний. Санкт-Петербург, Издательский дом ЛАНЬ, – 2013. – 320 с.
- [9] *Старжунский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, – 1977. – 256 с.
- [10] *Abdullaev Z., Yusupov M., Mirzaev S., Noraliyev N., Kusharov Z.* Dynamic dampers of vibrations of inherited-deformable systems with finite number of degrees of freedom. // – 2020. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vladimir, Russian Federation).
- [11] *Yusupov M., Rakhmankulova B., Ziyaeva Sh., Kushaev A.* Vehicle oscillation taking into account the rheological properties of the suspension. – 2020. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vladimir, Russian Federation).
- [12] *Mirzaev S., Yusupov M., Rakhmankulova B., Abdikayimova G.* Vibrations of high-rise buildings under seismic impact taking into account physical nonlinearity. - Journal of Physics: Conference Series this link is disabled, – 2022. 2176(1), 012052

Поступила в редакцию 09.10.2023

UDC 539.3

VERTICAL NONLINEAR OSCILLATIONS OF VISCOELASTIC SYSTEMS WITH THREE DEGREES OF FREEDOM

^{1*} *Yusupov M.,* ¹ *Karshiev D.K.,* ² *Sharipov Kh.D.*

*yusupovmajid1956@mail.ru

¹Tashkent State Agrarian University,
Uzbekistan, Tashkent region, Kibray district, st. Universitetskaya, 2A;

²Research Institute for the Development of
Digital Technologies and artificial intelligence,
100124, 17A, Buz-2, Mirzo-Ulugbek district, Tashkent, Uzbekistan.

Vertical vibrations of three loads with different masses connected by nonlinear viscoelastic springs (suspensions) are considered. Taking into account the rheological properties of the suspension, an integral model with a Koltunov-Rzhanitsyn relaxation core was used. Effective computational algorithms for solving problems based on the use of quadrature formulas have been developed. The influence of the rheological properties of the suspension on the displacement of the mass from the static equilibrium position is investigated. The influence of the nonlinear properties of the suspension on the shape of the oscillation and frequency is investigated.

Keywords: algorithm, relaxation kernel, integro-differential equation, frequency, amplitude, elasticity, viscoelasticity, stress, deformation, integral operator.

Citation: Yusupov M., Karshiev D.K., Sharipov Kh.D. 2023. Vertical nonlinear oscillations of viscoelastic systems with three degrees of freedom. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52): 115-122.

УДК 519.644

ОБ ОДНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

^{1,2} *Нуралиев Ф.А.*

nuralievf@mail.ru

¹Ташкентский государственный транспортный университет,
100167, Узбекистан, Ташкент, ул. Одилходжаева, 1;²Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Узбекистана,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская 9.

В статье рассматривается проблема построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве Соболева. Эта формула интерполяции состоит из линейной комбинации значений функции во всех узлах и значений первой производной функции на концах интервала $[0,1]$. Найдена экстремальная функция, и с помощью этой функции получено общее представление квадрат нормы функционала погрешности. Система линейных уравнений получена методом неизвестных множителей Лагранжа для нахождения условного минимума функций многих переменных. Оптимальные коэффициенты интерполяционной формулы были найдены при данной системе линейных уравнений, равно $m = 2$.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, функционал погрешности, оптимальные коэффициенты.

Цитирование: *Нуралиев Ф.А.* Об одной оптимальной интерполяционной формуле в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 123-132.

1 Введение

Типичной задачей приближения является задача интерполяции. Классический метод ее решения состоит в построении интерполяционного многочлена. Однако, многочлены обладают ряд недостатков, как аппарат приближения функций с особенностями и функций с не слишком большой гладкостью. Доказано, что последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа, построенных для конкретной непрерывной функции по равностоящим узлам, с возрастанием степени многочлена не стремятся к данной функции. Поэтому на практике для того, чтобы достаточно хорошо приблизить функцию, вместо построения интерполяционного полинома высокой степени используют сплайны. Первые сплайн функции, предложенные И.Шенбергом, были склеены из кусков кубических многочленов. В дальнейшем эта конструкция модифицировалась, повышалась степень многочленов, изменялись краевые условия, но идея осталась неизменной. Следующий существенный шаг в теории сплайнов это результат Дж.Холлидея, связывающие кубические сплайны Шенберга с решением вариационной задачи о минимуме квадрата нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее, результат Дж.Холлидея был обобщен де Буром, т.е. им доказана, что натуральный сплайн степени $2m - 1$ дает минимум к квадрату нормы функций в $L_2^{(m)}$, где $L_2^{(m)}$ пространство функций m -е обобщенное производное интегрируемые с квадратом. Эти результаты вызвали большой интерес и далее появились большое количество работ, где в зависимости от конкретных требований модифицировался вариационный функционал. С течением времени от решения задач интерполяции, когда в узлах сетки заданы значения функций, исследователи стали переходить к решению задач, где в узлах задавались производные и

сложные дифференциальные выражения. На этом этапе в каждом конкретном случае изучались вопросы существования, единственности, сходимости сплайнов, алгоритмы построения, которые становились все более сложными, а формулы все более громоздкими. Теория сплайнов основанных на вариационные методы изучались и развивались в работах Дж.Алберга, Э.Нильсона, Дж.Уолша, П.Ж.Лорана, С. deBoor, L.L.Schumaker, R.Arcangeli, M.C.LopezdeSilanes, J.J.Torres, В.А. Василенко, М.Атеа, Barlinet, Tomas-Agnan, Т.Лыче, В.Вожанов, Стечкина, Субботина, Игнатьева, Певного, Nurnberger, Бежаева и др.

Настоящая работа посвящена к построению оптимальных интерполяционных формул.

2 Постановка задачи

В связи с этим рассмотрим следующее приближенное равенство

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\varphi(x_\beta) + \sum_{\alpha=1}^s (A_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0) + B_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1)), \quad (1)$$

Здесь $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$, $m = 2s$, $s = 1, 2, 3, \dots$, $x_\beta \in [0, 1]$ - коэффициенты и узлы интерполяционной формулы (1), соответственно.

Теперь, следуя Соболеву [1], можем поставить задачу построение оптимальной интерполяционной формулы.

Предположим, что функции φ принадлежат пространству Соболева $L_2^{(m)}(0, 1)$.

Погрешность интерполяционной формулы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x, z)\varphi(x)dx = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \\ &= \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\varphi(x_\beta) - \sum_{\alpha=1}^s (A_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0) + B_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1)) \end{aligned} \quad (2)$$

где δ - это дельта-функция Дирака, и

$$\ell(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\delta(x - h_\beta) + \sum_{\alpha=1}^s (A_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x) + B_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x - 1)) \quad (3)$$

это функционал погрешности интерполяционной формулы (1) и он принадлежит пространству $L_2^{(m)*}(0, 1)$. Далее, для удобства $\ell(x, z)$ обозначим как $\ell(x)$, и в данном параграфе ℓ это функционал (3).

Абсолютное значение погрешности (2) оценивается с помощью неравенства Коши-Шварца следующим образом:

$$|(\ell, \varphi)| \leq \| \varphi \|_{L_2^{(m)}} \cdot \| \ell \|_{L_2^{(m)*}}$$

где

$$\| \ell \|_{L_2^{(m)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\| \varphi \|}$$

Следовательно, чтобы оценить погрешность интерполяционной формулы (1) для функций из пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$ необходимо найти норму функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$.

Отсюда получаем

Задача 1. Найти норму функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) в пространстве $L_2^{(m)*}(0, 1)$.

Очевидно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ $\alpha = 1, \dots, s$ и узлов x_β . Задача минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ является линейной задачей, а по узлам x_β , вообще говоря, является задачей нелинейной и довольно трудной. Рассмотрим задачу минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ при фиксированных узлах x_β .

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $\overset{\circ}{A}_\alpha(z)$, $\overset{\circ}{B}_\alpha(z)$ (если таковые существуют) удовлетворяющие уравнению

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} / L_2^{(m)*} \right\| = \inf_{C_\beta(z), A_\alpha(z), B_\alpha(z)} \left\| \ell | L_2^{(m)*} \right\| \quad (4)$$

называются оптимальными коэффициентами, а соответствующая интерполяционная формула

$$P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N \overset{\circ}{C}_\beta(z) \varphi(x_\beta) + \sum_{\alpha=1}^s (\overset{\circ}{A}_\alpha(z) \varphi^{(2\alpha-1)}(0) + \overset{\circ}{B}_\alpha(z) \varphi^{(2\alpha-1)}(1))$$

называется оптимальной интерполяции одной формулой в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$. Таким образом, для построения оптимальной интерполяционной формулы вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $\overset{\circ}{A}_\alpha(z)$, $\overset{\circ}{B}_\alpha(z)$, $\alpha = \overline{1, s}$ удовлетворяющие уравнению (4) при фиксированных узлах x_β .

Построением и изучением свойств оптимальных интерполяционных формул в различных пространствах занимались многие авторы (см., [2–7, 10–12]).

В работе [2] С.Л.Соболевым исследована задача интерполирования функций n -переменных в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ и решена задача 1. В пространстве $L_2^{(m)}(R)$ задача 1 и 2 исследованы в [8]. Структура настоящей статьи следующая. Во втором параграфе решается задача 1, т.е. найдется экстремальная функция и с помощью этой функции вычисляется квадрат нормы функционала погрешности $\ell(x)$. Затем минимизируя эту норму по коэффициентам получена система типа Винера -Хопфа для нахождения оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $\overset{\circ}{A}_\alpha(z)$, $\overset{\circ}{B}_\alpha(z)$.

3 Экстремальная функция. Норма функционала погрешности

Чтобы решить задачу 1, т.е. для нахождения нормы функционала погрешности (2) в пространстве $L_2^{(m)*}(0, 1)$ используется понятие экстремальной функции данного функционала. Функция $\psi_\ell(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell(x)$ (см. [1]), если выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell | L_2^{(m)*} \right\| \left\| \psi_\ell | L_2^{(m)} \right\|. \quad (5)$$

В пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$, с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовых пространствах, экстремальная функция выражается через заданный функционал и

$$\left\| \ell | L_2^{(m)*} \right\| = \left\| \psi_\ell | L_2^{(m)} \right\| \quad (6)$$

Поэтому из (5) и (6) заключаем, что

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell |L_2^{(m)*} \right\|^2. \quad (7)$$

С другой стороны по той же теореме для любого элемента $\varphi(x)$ пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$ получаем

$$(\ell, \varphi) = \langle \varphi, \psi_\ell \rangle, \quad (8)$$

где

$$\langle \varphi, \psi_\ell \rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \psi_\ell^{(m)}(x) dx \quad (9)$$

-скалярное произведение в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$. Пусть $\varphi(x)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция, $\varphi(x) \in C^\infty(0, 1)$. Интегрируя по частям m раз правую часть равенства (9), для функции $\psi_\ell(x)$ получаем

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) = (-1)^m \ell(x). \quad (10)$$

Известно, что пространство $C^\infty(0, 1)$ плотно в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$. Следовательно, мы можем приблизить сколь угодно точно функции из пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$ последовательностью функций из $C^\infty(0, 1)$. Тогда для функции $\varphi(x)$ из пространства $L_2^{(m)}(0, 1)$ рассматривая скалярное произведение $\langle \varphi, \psi_\ell \rangle$ и, интегрируя по частям m раз, получим

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \langle \varphi, \psi_\ell \rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \psi_\ell^{(m)}(x) dx = \\ &= \sum_{s=1}^m \varphi^{(s-1)}(x) \psi_\ell^{(2m-s)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} + (-1)^m \int_0^1 \varphi(x) \psi_\ell^{(2m)}(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из произвольности функций $\varphi(x)$ и единственности функции $\psi_\ell(x)$ (с точностью до многочлена степени $m-1$) в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$, с учетом (10), должны выполняться следующие равенства

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) = (-1)^m \ell(x), \quad (11)$$

$$\psi_\ell^{(2m-s)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0 \quad \text{при } s = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Справедлива

Теорема 1. Решение $\psi_\ell(x)$ краевой задачи (11)-(12) является экстремальной функцией функционала погрешности (2) интерполяционной формулы (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$ и имеет вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

где

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} \operatorname{sign} x}{2 \cdot (2m-1)!}$$

является решением уравнения

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) = \delta(x),$$

$$\text{sign}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad P_{m-1}(x) - \text{многочлен степени } m - 1.$$

Теорема 1 доказана в работе [9]. Кроме того, в [9] доказана, что функционал погрешности $\ell(x)$ удовлетворяет условия

$$(\ell(x), x^\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}. \quad (13)$$

Равенства (13) означают, что полученная нами интерполяционная формула (1) будет точна для многочленов до $m - 1$ - й степени, т.е.

$$(\ell(x), x^\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)x^\alpha dx = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}.$$

Теперь, учитывая равенство (7) и используя теорему 1, мы вычислим норму функционала погрешности. Для квадрата нормы функционала погрешности $\ell(x)$, с учетом (13), из равенства (7) имеем

$$\begin{aligned} & \| \ell \left| L_2^{(m)*}(0, 1) \right. \|^2 = (\ell, \psi_\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\psi_\ell(x)dx = \quad (14) \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\delta(x-h\beta) + \sum_{\alpha=1}^s (A_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x) + B_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x-1)) \right) \times \\ & \times \left((-1)^m \ell(x) * \frac{x^{2m-1}\text{sgn}x}{2(2m-1)!} + P_{m-1}(x) \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \left((-1)^m \ell(x) * \frac{x^{2m-1}\text{sgn}x}{2(2m-1)!} \right) dx. \end{aligned}$$

Сначала вычислим свертку $\ell(x) * \frac{x^{2m-1}\text{sgn}x}{2(2m-1)!}$

$$\begin{aligned} & \ell(x) * G_m(x) = \ell(x) * \frac{x^{2m-1}\text{sgn}x}{2(2m-1)!} = \quad (15) \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(y)G_m(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(y-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\delta(y-h\beta) + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha=1}^s (A_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(y) + B_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(y-1)) \right) \frac{(y-x)^{2m-1}\text{sign}(y-x)}{2(2m-1)!} dy = \\ & = \frac{(z-x)^{2m-1}\text{sign}(z-x)}{2(2m-1)!} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \frac{(h\beta-x)^{2m-1}\text{sign}(h\beta-x)}{2(2m-1)!} - \\ & - \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{(-x)^{2m-2\alpha}\text{sign}(-x)}{2(2m-2\alpha)!} + B_\alpha(z) \frac{(1-x)^{2m-2\alpha}\text{sign}(1-x)}{2(2m-2\alpha)!} \right) \end{aligned}$$

Тогда, подставляя (16) в (14), последовательно получаем

$$\begin{aligned}
& \| \ell / L_2^{(m)*} \|^2 = (\ell, \psi_\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \psi_\ell(x) dx = \\
& = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-z) - \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \delta(x-h\gamma) + \sum_{n=1}^s \left(A_\alpha(z) \delta^{(2n-1)}(x) + B_\alpha(z) \delta^{(2n-1)}(x-1) \right) \right) \times \\
& \quad \times \left(\frac{(z-x)^{2m-1} \text{sign}(z-x)}{2(2m-1)!} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \frac{(h\beta-x)^{2m-1} \text{sign}(h\beta-x)}{2(2m-1)!} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{(-x)^{2m-2\alpha} \text{sign}(-x)}{2(2m-2\alpha)!} + B_\alpha(z) \frac{(1-x)^{2m-2\alpha} \text{sign}(1-x)}{2(2m-2\alpha)!} \right) \right) dx = \\
& \quad - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \frac{(h\beta-z)^{2m-1} \text{sign}(h\beta-z)}{2(2m-1)!} - \\
& \quad - \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{(-z)^{2m-2\alpha} \text{sign}(-z)}{2(2m-2\alpha)!} + B_\alpha(z) \frac{(1-z)^{2m-2\alpha} \text{sign}(1-z)}{2(2m-2\alpha)!} \right) - \\
& \quad - \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \left(\frac{(z-h\gamma)^{2m-1} \text{sign}(z-h\gamma)}{2(2m-1)!} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-1} \text{sign}(h\beta-h\gamma)}{2(2m-1)!} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{(-h\gamma)^{2m-2\alpha} \text{sign}(-h\gamma)}{2(2m-2\alpha)!} + B_\alpha(z) \frac{(1-h\gamma)^{2m-2\alpha} \text{sign}(1-h\gamma)}{2(2m-2\alpha)!} \right) \right) + \\
& \quad + \sum_{n=1}^s A_n(z) (-1)^{2n-1} \left(\frac{(-z)^{2m-2n} \text{sign}(-z)}{2(2m-2n)!} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \frac{(-h\beta)^{2m-2n} \text{sign}(-h\beta)}{2(2m-2n)!} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{x^{2m-2\alpha-2n+1} \text{sign} x}{2(2m-2\alpha-2n+1)!} + B_\alpha(z) \frac{(x-1)^{2m-2\alpha-2n+1} \text{sign}(x-1)}{2(2m-2\alpha-2n+1)!} \right) \right) + \\
& \quad + \sum_{n=1}^s B_n(z) (-1)^{2n-1} \left(\frac{(1-z)^{2m-2n} \text{sign}(1-z)}{2(2m-2n)!} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \frac{(1-h\beta)^{2m-2n} \text{sign}(1-h\beta)}{2(2m-2n)!} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{x^{2m-2\alpha-2n+1} \text{sign} x}{2(2m-2\alpha-2n+1)!} + B_\alpha(z) \frac{(x-1)^{2m-2\alpha-2n+1} \text{sign}(x-1)}{2(2m-2\alpha-2n+1)!} \right) \right).
\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что $G_m(x)$, является четной функцией, имеем

$$\begin{aligned}
\| \ell / L_2^{(m)*} \|^2 &= \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta(z) C_\gamma(z) \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-1} \text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2 \cdot (2m-1)!} - \\
&- 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \frac{(h\beta - z)^{2m-1} \text{sign}(h\beta - z)}{2 \cdot (2m-1)!} + \\
&+ 2 \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{z^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} + B_\alpha(z) \frac{(1-z)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} \right) - \\
&- 2 \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{(h\gamma)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} - B_\alpha(z) \frac{(1-h\gamma)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} \right) - \\
&- 2 \sum_{n=1}^s \sum_{\alpha=1}^s A_n(z) B_\alpha(z) \frac{1}{2(2m-2\alpha-2n+1)!}. \tag{16}
\end{aligned}$$

Таким образом, задача 1 решена.

4 Система для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул

Задача 2 в такой общей постановке довольно сложна. Минимизация нормы функционала погрешности по коэффициентам $C_\beta(z)$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ $\alpha = \overline{1, s}$ это линейная задача, а по узлам x_β вообще нелинейная, поэтому для упрощения мы рассмотрим задачу 2 при фиксированных узлах x_β . Предположим, что узлы x_β интерполяционной формулы (1) фиксированы. Функционал погрешности (2) удовлетворяет условиям (13). Норма функционала погрешности $\ell(x)$ это функция многих переменных относительно коэффициентов $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$ $\alpha = \overline{1, s}$. Для нахождения точки условного минимума выражения (16) при условий (13) мы применим метод Лагранжа.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
\Psi(C_0(z), C_1(z), \dots, C_N(z), A_1(z), \dots, A_s(z), B_1(z), \dots, B_s(z), \lambda_0(z), \dots, \lambda_{m-1}(z)) = \\
= \| \ell \Big| L_2^{(m)*} \|^2 - 2(-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k(z) (\ell, x^k).
\end{aligned}$$

Приравнявая частные производные функции Ψ по $C_\beta(z)$, $\beta = \overline{0, N}$, $A_1(z), \dots, A_s(z)$, $B_1(z), \dots, B_s(z)$ и $\lambda_0(z), \lambda_1(z), \dots, \lambda_{m-1}(z)$ к нулю, мы получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - \sum_{\alpha=1}^s \left(A_\alpha(z) \frac{(h\beta)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} - B_\alpha(z) \frac{(1-h\beta)^{2m-2\alpha}}{2(2m-2\alpha)!} \right) + \\
+ \sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_\alpha (h\beta)^\alpha = \frac{|h\beta - z|^{2m-1}}{2(2m-1)!}, \quad \beta = \overline{0, N}, \tag{17} \\
\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \frac{(h\gamma)^{2m-2n}}{2(2m-2n)!} + \sum_{p=1}^s B_p(z) \frac{1}{2(2m-2p-2n+1)} - (2n-1)! \lambda_{2n-1}(z) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{z^{2m-2n}}{2(2m-2n)!}, \quad n = \overline{1, s}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z) \frac{(1-h\gamma)^{2m-2n}}{2(2m-2n)!} + \sum_{p=1}^s A_p(z) \frac{1}{2(2m-2p-2n+1)} + \\ & + \sum_{\alpha=2n-1}^{2s-1} \lambda_{\alpha}(z) \frac{\alpha!}{(\alpha-2n+1)!} = \frac{(1-z)^{2m-2n}}{2(2m-2n)!}, \quad n = \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma}(z)(h\gamma)^{\alpha} = z^{\alpha} - \frac{\alpha!(1-(-1)^{\alpha})}{2} A_{\lfloor \frac{\alpha+1}{2} \rfloor} - \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{\alpha+1}{2} \rfloor} \frac{\alpha! B_n(z)}{(\alpha-2n+1)!}, \quad \alpha = \overline{0, 2s-1}. \quad (20)$$

Система (17) - (20) имеет единственное решение. Доказательство единственности решения системы (17) - (20) аналогично доказательству единственности решения системы для оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(m)}$, полученных в [10].

В данной работе мы приводим решения системы (17)-(20) в пространстве $L_2^{(2)}(0, 1)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$ оптимальной интерполяционной формулы (1) в пространстве $L_2^{(2)}(0, 1)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}_0(z) &= \frac{1}{2h^3} [6\sqrt{3} \sum_{\gamma=0}^N q^{\gamma} |z-h\gamma|^3 + |z-h|^3 + h^3 - z^3(4+3\sqrt{3}) + \\ & + 3z^2h(1-\sqrt{3}) + q^N N_1(z)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}_{\beta}(z) &= \frac{1}{2h^3} [6\sqrt{3} \sum_{\gamma=0}^N q^{|\beta-\gamma|} |z-h\gamma|^3 + |z-h(\beta-1)|^3 - 8|z-h\beta|^3 + \\ & + |z-h(\beta+1)|^3 + q^{\beta} M_1(z) + q^{N-\beta} N_1(z)], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}_N(z) &= \frac{1}{2h^3} [6\sqrt{3} \sum_{\gamma=0}^N q^{N-\gamma} |z-h\gamma|^3 + |z-h(N-1)|^3 + h^3 - \\ & - (1-z)^3(4+3\sqrt{3}) + 3h(1-z)^2(1-\sqrt{3}) + q^N M_1(z)], \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{A}(z) = \frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},$$

$$\overset{\circ}{B}(z) = \frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$

где

$$M_1(z) = 3z(z+h)(z-h-\sqrt{3}z) + 6h^2 \frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},$$

$$N_1(z) = 3(1-z)(1-z+h)(1-z-h-\sqrt{3}+\sqrt{3}z) - 6h^2 \frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$

$$f_1(z) = \frac{1}{2h^2} [2\sqrt{3} \sum_{\gamma=0}^N (q^{\gamma+1} + q^{2N+1-\gamma}) |z-h\gamma|^3 + h^2 z q(1-q^{2N}) +$$

$$\begin{aligned}
& +hz^2(2q+1)(1+q^{2N}) + z^3(q+1) + z^3q^{2N}(3q+1) + \\
& +2h(1-z)^2(2q+1)q^N + (1-z)^3q^N(4q+2)], \\
f_2(z) = & -\frac{1}{2h^2}[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^N(q^{N-\gamma+1} + q^{N+1+\gamma})|z-h\gamma|^3 + \\
& +h^2(1-z)q(1-q^{2N}) + h(1-z)^2(2q+1)(1+q^{2N}) + (1-z)^3(q+1) + \\
& +(1-z)^3q^{2N}(3q+1) + 2hz^2(2q+1)q^N + z^3q^N(4q+2)],
\end{aligned}$$

$$q = \sqrt{3} - 2.$$

5 Заключение

Одной из основных задач вычислительной математики является оптимизация вычислительных методов в функциональных пространствах. Оптимизация вычислительных методов хорошо освещается задачами теории интерполяционных формул. В данной работе исследована задача построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Здесь первая часть задачи решалась методом Соболева, то есть находился квадрат нормы функции ошибок оптимальных интерполяционных формул, решалась система линейных уравнений типа Виннера-Хопфа и найден аналитический вид коэффициентов.

Литература

- [1] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. - 1974. - 808 с.
- [2] *Соболев С.Л.* Интерполирование функций переменных. Доклады АН СССР, - 1961. - Т.137, - С. 778-781.
- [3] *Лоран П.Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, - 1975. - 496 с.
- [4] *Игнатов М.И., Певный А.Б.* Натуральные сплайны многих переменных. Ленинград. Наука, - 1991.
- [5] *Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А.* Экстремальные свойства полином и сплайнов. Киев, Науково думка, - 1992. - 304 с.
- [6] *Arcangeli R., Lopez de Silanes M.C., Torres J.J.* Multidimensional minimizing splines. Kluwer Academic publishers. Boston, - 2004. - 261 p.
- [7] *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Construction of interpolation splines minimizing seminorm in space. Springer, BIT Numer Math. - 2013. - v.53. - С. 545-563.
- [8] *Nuraliev F.A.* Cubature formulas of Hermite type in the space of periodic functions of two variables AIP Conference Proceedings, - 2021. 2365, 020031
- [9] *Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А.* Об одной оптимальной квадратурной формуле с производными УзМЖ, - 2005. - №3. - С. 90-103.
- [10] *Абдуллаева Г., Нуралиев Ф.А.* Свойства обобщенного сплайна четвертого порядка. натуральные сплайны // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - 2023. - №3/1(50). - С. 118-137.
- [11] *Азамов С.С.* Об экстремальной функции одной оптимальной квадратурной формулы // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - 2022. - №5/1(44). - С. 23-33.
- [12] *Shadimetov K., Nuraliev F., Ulikov S.* Optimal Formulas for Approximate Integration in the Sobolev Factor Space AIP Conference Proceedings, - 2023. 2781, 020075

Поступила в редакцию 21.10.2023

UDC 519.644

ABOUT ONE OPTIMAL INTERPOLATION FORMULA IN SOBOLEV SPACE

^{1,2}*Nuraliev F.A.*

nuralievf@mail.ru

¹Tashkent State Transport University,
Odilkhodjaev street, 1, Tashkent, 100167, Uzbekistan;

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
University str. 9, 100174, Tashkent, Uzbekistan.

The article discusses the problem of constructing optimal interpolation formulas in Sobolev space. This interpolation formula consists of a linear combination of the values of the function at all nodes and the values of the first derivative of the function at the ends of the interval $[0,1]$. An extremal function is found, and with the help of this function a general representation of the squared norm of the error functional is obtained. A system of linear equations is obtained by the method of unknown Lagrange multipliers to find the conditional minimum of functions of many variables. The optimal coefficients of the interpolation formula were found for a given system of linear equations, equal to $m = 2$.

Keywords: Sobolev space, extremal function, error functional, optimal coefficients.

Citation: Nuraliev F.A. 2023. About one optimal interpolation formula in Sobolev space. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52): 123-132.

УДК 519.95

ОТБОР ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ ПО МЕРЕ КОМПАКТНОСТИ

Турсунмуротов Д.Х.

mr.davrbek@mail.ru

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 4.

Рассматривается отбор информативных признаков с использованием меры компактности по обучающей выборке объектов. Процедура отбора связана с решением проблемы проклятия размерности. Мера компактности используется для анализа структуры отношений объектов по определяемой метрике и способу нормирования данных. Компактность определяется как среднее число объектов обучающей выборки за вычетом шумовых, притягиваемое одним эталоном минимального покрытия. Множество значений меры компактности зависит от выбора метрики для вычисления расстояния между объектами и способа нормирования данных. Комбинаторную сложность задачи отбора предлагается уменьшить за счёт предобработки данных. Смысл предобработки сводится к построению матрицы попарной различимости признаков и построению по ней упорядоченной последовательности. Для вычисления меры компактности предложено использовать минимальное покрытие обучающей выборки объектами-эталонами. Объекты - эталоны применяются в качестве базы прецедентов для алгоритмов распознавания. Повышения обобщающей способности на информативном наборе признаков гарантируется за счёт удаления шумовых объектов и максимального значения меры компактности. Оптимальное число шумовых объектов определяется по дополнительному критерию-регуляризатору. Вычисление коэффициенты регуляризации производится по значениям разности между плотностями распределений объектов в двух гипершарах с общим центром.

Ключевые слова: мера компактности, информативных признаков, объектов-эталонов, база прецедентов.

Цитирование: *Турсунмуротов Д.Х.* Отбор информативных признаков по мере компактности // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 5(52). – С. 133-140.

1 Введение

Проблема отбора информативных наборов признаков связана с наличием множества критериев и комбинаторной сложностью поиска их экстремальных значений. При численной реализации критериев отбора используют различные эвристики исходя из наличия определенных (как правило, скрытых) закономерностей.

В качестве эвристики в данной исследовании для сведения к минимуму числа переборов используется упорядочение признаков по отношению попарной различимости между объектами классов. В идеальном для практической реализации варианте минимальный набор должны представлять независимые признаки. С позиции прикладного статистического анализа требуется выбирать исходные (не искусственные) признаки, коррелированность между собой которых минимальна, т.е. признаки с максимально выраженной независимостью.

Процесс отбора информативных признаков предлагается реализовывать через меру компактности, определяемую по множеству шумовых объектов и объектов – эталонов минимального покрытия обучающей выборки.

При теоретическом обосновании эффективности метода отбора желательным свойством является монотонность значений меры компактности по определяемым наборам из упорядоченной последовательности признаков. Аналитической формы зависимости между упорядоченным набором и мерой компактности нет.

При построении последовательности признаков в общем – то приходится абстрагироваться от шкал и масштабов измерений. Инструментом для абстрагирования являются оптимизация критериев для разбиения данных на не пересекающие интервалы. Через такое разбиение достигается инвариантность к масштабам измерений и представления значений признаков в номинальной шкале.

Последовательность, полученная по результатам дискретизации количественных признаков, необходима для решения проблемы поиска метрики, максимально адаптированной под порядок следования её (последовательности) значений.

Коррелированность между наборами признаков и отношениями между объектами классов предлагается отслеживать через меру компактности. Примером подбора базовой метрики для вычисления меры компактности может служить вычисление весов признаков с использованием неопределённых множителей Лагранжа.

Под оценкой (мерой) сложности алгоритма принятия решения по допустимому объекту S будем понимать количество элементарных операций для его распознавания по определяемому набору признаков.

2 Постановка задачи. Предобработка данных

Рассматривается построение упорядоченной по не убыванию сложности алгоритмов распознавания последовательности признаков. Пусть задано множество объектов $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$, разделённое на l непересекающихся классов (подмножеств E_0) K_1, \dots, K_l . Для описания объектов используется набор из n разнотипных признаков $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$, σ из которых измеряются в номинальной шкале, $n - \sigma$ в количественных шкалах.

Считается, что определена мера компактности $\mu(E_0, T, \rho)$. Вычисление по метрике ρ и выборке E_0 после удаления шумовых объектов T приводит к увеличению значения $\mu(E_0, T, \rho)$ на наборе $X(u)$ относительно набора $X(v)$. Существует корреляция значений меры компактности и меры сложности вычислений алгоритма распознавания $R(X(\alpha))$ на $X(\alpha)$.

Требуется найти последовательность информативных наборов $X(n), X(n-1), \dots, X(k), k \leq n$ на которых значения меры сложности алгоритмов $R(X(n)), R(X(n-1)), \dots, R(X(k))$ образуют невозрастающую последовательность $R(X(n)) \geq R(X(n-1)) \geq \dots \geq R(X(k))$.

Обозначим через I, J множество номеров соответственно количественных и номинальных признаков в описании допустимых объектов, $|I| + |J| = n$. Селекции обучающих выборок реализуется через удаление шумовых объектов и признаков. В процессе реализации решается задача о минимальном покрытии обучающей выборки E_0 объектами-эталоном множества $\Pi_j = \{S_1, \dots, S_\alpha\}, \alpha \leq m, \alpha \leq m, \Pi_j \subset E_0, j = 1, 2, \dots$. Единственность множества $\Pi_j = \{S_1, \dots, S_\alpha\}$ как по мощности так и по составу зависит от единственности выбора множества шумовых объектов T на наборе $X(\alpha)$, $\alpha \leq n$.

Для введения меры близости на множестве разнотипных признаков и унификации шкал измерений предлагается предобработка данных. Известно, что от сильных (интервальных) шкал измерений всегда можно перейти к слабым шкалам. Упорядо-

чим множество значений признака $x_j, j \in I$.

$$r_{j1}, \dots, r_{jm}. \tag{1}$$

Разобьем последовательность (1) на непересекающиеся интервалы $(c_{2k-1}, c_{2k}], c_{2k-1} < c_{2k}, k = 1, \dots, l$ по критерию

$$\left(\frac{\sum_{p=1}^l \sum_{i=1}^l (u_i^p - 1) u_i^p}{\sum_{i=1}^l |K_i| (|K_i| - 1)} \right) \left(\frac{\sum_{p=1}^l \sum_{i=1}^l u_i^p \left(m - |K_i| - \sum_{j=1}^l u_j^p + u_i^p \right)}{\sum_{i=1}^l |K_i| (m - |K_i|)} \right) \rightarrow \max_{\{A\}} \tag{2}$$

где u_j^p - количество различных значений признака $x_j, j \in I$ у объектов класса K_i в границах интервала $(c_{2p-1}, c_{2p}]$, $A = (a_0, \dots, a_l), a_0 = 0, a_l = m, a_p$ - номер по порядку элемента упорядоченной последовательности значений признака x_j у объектов из E_0 , определяющий правую границу интервала $c_{2p} = r_{a_p}$.

Значению признака в границах интервала ставится в соответствие градация номинального признака. Критерий (2) позволяет вычислять оптимальные значения границ интервалов $\{(c_{2p-1}, c_{2p})\}$ и использовать их для определения градаций количественного признака в номинальной шкале измерений. Процесс преобразования при этом оказывается неразрывным от классификации, вводимой на множестве объектов обучения и предобработка данных. Результаты предобработки используются для вычисления значения вклада каждого признака $x_p, p \in I \cup J$ в принятие решения о разделении объектов классов как

$$\lambda_p = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{u_p} z_{pj}^i (z_{pj}^i - 1)}{\sum_{i=1}^l \tau_i} - \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{u_p} z_{pj}^i \overline{z_{pj}^i}}{\sum_{i=1}^l b_{ip} \overline{b_{ip}}}, \tag{3}$$

где $z_{pj}^i, \overline{z_{pj}^i}$ - количество значений j - й градаций p - го признака соответственно класса K_i и его дополнения $CK_i = E_0 \setminus K_i, u_p, \overline{u_p}$ - число градаций p - го признака, b_{ip} - число градаций p - го признака в классе $K_i, \overline{b_{ip}}$ - число значений p - го признака без пропусков соответственно в K_i и CK_i

$$\tau_i = \begin{cases} (b_{ip} - l_{ip} + 1)(b_{ip} - l_{ip}), & l_{ip} > l, \\ b_{ip}(b_{ip} - 1), & l_{ip} \leq l \end{cases}$$

Множество значений $\{\lambda_p\}$, вычисленных по (3), может быть использовано для предварительного удаления неинформативных признаков для случая с большой размерностью (от 500 и более) пространства в описании объектов. Кандидатами на удаление являются признаки с относительно малыми значениями λ_p .

3 Выбор шумовых объектов и вычисления меры компактности. Минимальное покрытие выборки эталонами

Обозначим через $B(E, \rho) = \left\{ S \in E \mid \rho(S_i, S) = \min_{S_i \in K_j, S_d \in CK_j} \rho(S_i, S_d) \right\}$ - множество граничных объектов классов, $E = E_0 \setminus T, T(T \subset B(E_0, \rho))$ - множество шумовых объектов, определяемых на E_0 по метрике $\rho(x, y)$.

Объекты $S_i, S_j \in K_t, t = 1, \dots, l$ считаются связанными между собой ($S_i \leftrightarrow S_j$), если $\{S \in B(E, \rho) | \rho(S, S_i) < r_i \text{ и } \rho(S, S_j) < r_j\} \neq \emptyset$, где $r_i(r_j)$ – расстояние до ближайшего от $S_i(S_j)$ объекта из $CK_t(CK_t = E \setminus K_t)$ по метрике $\rho(x, y)$.

Множество $\{G_{tv} = S_{v_1}, \dots, S_{v_c}\}, c \geq 2, G_{tv} \subset K_t, v < |K_t|$ представляет область (группу) со связанными объектами в классе K_t , если для любых $S_{v_i}, S_{v_j} \in G_{tv}$ существует путь $S_{v_i} \leftrightarrow S_{v_k} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow S_{v_j}$. Объект $S_i \in K_t, t = 1, \dots, l$ принадлежит группе из одного элемента и считается несвязанным, если не существует пути $S_i \leftrightarrow S_j$ ни для одного объекта $S_j \neq S_i$ и $S_j \in K_t$.

Считается, что на множестве $E = E_0 \setminus T$ определён жадный алгоритм формирования множества объектов-эталонов минимального покрытия E_{ob} и вычисления меры компактности

$$\mu(E, \rho) = |E| / |E_{ob}| \quad (4)$$

Близость к объекту-эталону $S \in E_{ob} \cap K_t$ вычисляется по локальной метрике $\rho_s(x, y) = \alpha_s \rho(x, y)$, где α_s – параметр, определяемый по граничным объектам из $E \cap CK_t$.

Требуется определить мощность множества шумовых объектов T и его состав при котором

$$\mu(E, \rho) = \max_{T \subset E_0} \mu(E_0 \setminus T, \rho) \quad (5)$$

В процесс формирования минимального покрытия обучающей выборки объектами – эталонами из [2] вводится модификация в виде поиска и удаления шумовых объектов $T \subset B(E_0, \rho)$ из множества граничных. С этой целью выделяется подмножество обучающей выборки, в котором ближайшим к каждому граничному объекту класса будет граничный объект из дополнения к этому классу. Определяется подмножество граничных объектов $BG \subset B(E_0, \rho)$ следующим образом

$$BG = \left\{ S \in B(E_0, \rho) \cap K_t \left| \min_{S_i \in CK_t} \rho(S_i, S) = \min_{S_i \in B(E_0, \rho) \cap CK_t} \rho(S_i, S), t = \{1, \dots, l\} \right. \right\}$$

Из множества BG формируется множество пар

$$Juv1 = \left\{ (S_i, S_j) \subset BG, S_i \in K_t \left| \rho(S_i, S_j) = \min_{S_d \in CK_t \cap BG} \rho(S_i, S_d), t = \{1, \dots, l\} \right. \right\} \text{ и}$$

$$Juv2 = \left\{ (S_i, S_j), S_i \in BG \cap K_t, \left| \rho(S_i, S_j) - \min_{S_d \in CK_t \cap BG} \rho(S_i, S_d) > 0 \text{ и} \right. \right. \\ \left. \left. \rho(S_i, S_j) - \min_{S_d \in CK_t \cap BG} \rho(S_i, S_d) = \min_{S_j \in CK_t} \rho(S_i, S_d), t = \{1, \dots, l\} \right. \right\}$$

Радиусы гипершаров с центром в $S_i \in BG$ по множеству пар из $Juv1$ и $Juv2$ определяются следующим образом. Для $(S_i, S_j) \subset Juv1, r(S_i) = \rho(S_i, S_j)$, соответственно для $(S_i, S_j) \subset Juv2, R(S_i) = \rho(S_i, S_j)$. Плотность распределения по гипершарам с центром в $S_i \in BG \cap K_t$ вычисляются как

$$zch1(S_i) = \sum_{\rho(S, S_i) < r(S_i)} \left(1 - \frac{\rho(S, S_i)}{r(S_i)} \right)$$

и

$$zch2(S_i) = \sum_{S \in K_t \text{ \& } \rho(S, S_i) < R(S_i)} \left(1 - \frac{\rho(S, S_i)}{R(S_i)} \right) - \left(1 - \frac{r(S_i)}{R(S_i)} \right).$$

Анализ множества значений разностей $zch2(S_i) - zch1(S_i)$ на превышение определяемого порога β , позволяет выделить объект S_j из $(S_i, S_j) \subset Juv1, S_i \in K_t, S_j \in CK_t$ в качестве шумового. Значение β рассматривается в качестве параметра регуляризатора, предназначенного для поиска экстремального значения меры компактности (5) при фиксированной базовой метрике. Решение об эффективности выбора состав набора признаков, изменяющих структуру отношений объектов, как правило, принимается по результатам вычислительного эксперимента.

4 Отбор информативных признаков с максимальной выраженной независимостью

Для сведения к минимуму числа переборov будем использовать упорядочение признаков по отношению их информативности без относительно меры расстояния между объектами. На множестве пар объектов $(S_a = (x_{a1}, \dots, x_{an}), S_b = (x_{b1}, \dots, x_{bn}))$, определим функции:

$$g(a, b, i, j) = \begin{cases} 2, x_{ai} \neq x_{bi} \text{ и } x_{aj} \neq x_{bj} \\ 1, x_{ai} = x_{bi} \text{ или } x_{aj} = x_{bj} \\ 0, x_{ai} = x_{bi} \text{ и } x_{aj} = x_{bj} \end{cases}$$

$$\alpha(a, b) = \begin{cases} 0, S_a, S_b \in K_i, i = \overline{1, l}, \\ 1, S_a \in K_i, S_b \in K_j, i \neq j. \end{cases}$$

Меру близости между парой номинальных признаков x_i, x_j на E_0 зададим как

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^m \alpha(a, b) g(a, b, i, j)}{2 \sum_{p=1}^l |K_p| (m - |K_p|)}, & i \neq j \\ 0, & i = j. \end{cases} \quad (6)$$

Допустим, что по результатам селекции получено минимальное покрытие множества E_0 набором объектов – эталонов $\Pi_j = \{S_1, \dots, S_\alpha\}, \alpha \leq m, \Pi_j \subset E_0, j = 1, 2, \dots$. Критерием для отбора информативного набора признаков $X(k) = (x_1, \dots, x_k), k \leq n$ служит сложность алгоритма [10]

$$\min_{\{\Pi_j\}} |\Pi_j| k \rightarrow \min_{E_0^T} \min_{\{\Pi_j\}} |\Pi_j| k \rightarrow \min_{E_0 \setminus T} \quad (7)$$

где k – число признаков в наборе, Π_j – множество объектов минимального покрытия, получаемого на $X(k)$ и обеспечивающее корректное (без ошибок) распознавание на $E_0 \setminus T$ с помощью (7). Ставится задача построения упорядоченной последовательности признаков с целью реализации направленного отбора информативных признаков. В форме вычислительного эксперимента доказывается утверждение, что удаление (в заданном порядке) признака из последовательности должно приводить к монотонному невозрастанию сложности

$$R(X(k)) = |\Pi_j| k \quad (8)$$

алгоритмов распознавания. Далее будем считать, что матрица $B = \{b_{ij}\}$ построена по (6) и значения вкладов $\{\lambda\}_1^n$ вычислены по (3) на множестве разнотипных

признаков $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$. Для определения информативного набора $X(k) = (x_1, \dots, x_k)$, $k \leq n$ используются рекурсивные вычисления. Разработана процедура для формирования упорядоченного по отношению информативности набора признаков

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \quad (9)$$

Пусть по матрице B определена пара $(x_i, x_j)(\lambda_i \geq \lambda_j)$, с максимальным значением b_{ij} . Эта пара помещается в начало (слева направо) набора (9). Строки и столбцы с номерами i и j . Рекурсивность вычислений выражается в том, что следующая пара признаков аналогичным образом определяется из усечённой матрицы B . Эффективность поиска информативного набора обеспечивается за счёт ограниченного перебора признаков-кандидатов (справа налево) на последовательное исключение из (9). Инвариантность к масштабам измерений признаков в последовательности (9) рассматривается как глобальное ограничение в моделях алгоритмов распознавания.

5 Вычислительный эксперимент

Эксперимент проводился на выборке данных по 4-канальному жидкостному расходомеру USM [12]. Параметры выборки: 180 объектов, описываемые 43 количественными признаками. Процесс отбора информативных признаков по мере компактности с учетом структуры отношений объектов демонстрируется в табл.1 и в табл.2 .

Таблица 1 Отбор информативных признаков в исходные данные

Метрика	Количество признаков	(параметр регуляризация)	Число объектов		Среднее эталону
			шумовых	эталонов	
Евклида	43	0.4	3	27	6.446
	32	0.4	5	23	7.397
	31	0.4	6	31	5.301
	3	0.4	2	53	4.684
Чебышева	43	0.1	11	24	6.611
	32	0.1	22	21	7.466
	31	0.1	9	35	4.641
	3	0.1	2	38	4.632

Таблица 2 Отбор информативных признаков при нормировании в $[0;1]$

Метрика	Количество признаков	(параметр регуляризация)	Число объектов		Среднее эталону
			шумовых	эталонов	
Евклида	43	0.1	9	27	6.016
	14	0.1	9	17	9.555
	13	0.1	8	21	8.217
	3	0.1	3	52	3.347
Чебышева	43	0.2	5	34	5.004
	14	0.2	6	21	8.009
	13	0.2	7	21	7.917
	3	0.2	3	52	3.347

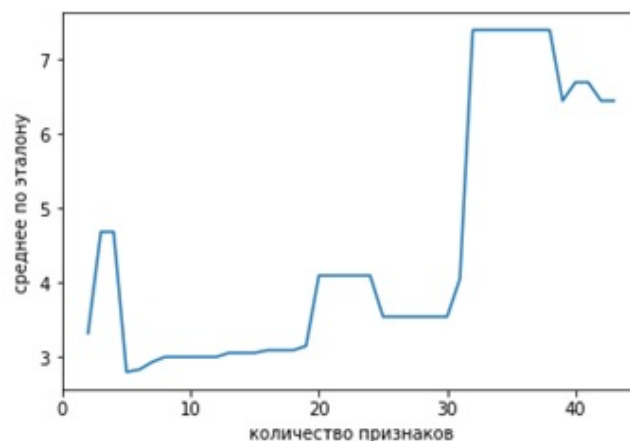


Рис. 1 График отбора информативных признаков по мере компактности по метрике Евклида

6 Заключение

Мы рассмотрели, что мера компактности по отношению связанности объектов классов является эффективным средством для интеллектуального анализа данных. Продемонстрированы особенности использования различных методов нормирования данных и метрик для принятия решений в слабо формализованных предметных областях.

Литература

- [1] Загоруйко Н.Г., Кутненко О.А., Зырянов А.О., Леванов Д.А. Обучение распознаванию образов без переобучения // Машинное обучение и анализ данных, Т.1. № 7. – 2014. – С. 891–901.
- [2] Ignatyev N.A. Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis, V. 28. – № 4. – 2018. – P. 590–597.
- [3] Зухова А.В. Оценка вычислительной сложности задач отбора эталонных объектов и признаков. // Долгопрудный, – 2018. – 113 с.
- [4] Мирзаев А.И. Об выборе пространства для описания объектов при машинном обучении на больших выборках данных // Проблемы вычислительной и прикладной математики, № 6 (36). – 2021. – С. 120–127.
- [5] Ignatyev N.A. On Nonlinear Transformations of Features Based on the Functions of Objects Belonging to Classes // Pattern Recognition and Image Analysis, – V. 31. № 2. – 2021. – P. 197–204.
- [6] Саидов Д.Ю. Информационные модели на основе нелинейных преобразований признакового пространства в задачах распознавания // Дисс. ... доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам,, Ташкент – 2017. – 93 с.
- [7] Зиновьев А.Ю. Визуализация многомерных данных // Красноярск, Изд. КГТУ, – 2000. – 180 с.
- [8] Загоруйко Н.Г. Гипотезы компактности и λ -компактности в методах анализа данных // Сиб. журн. индустр. математики, – 1998. Т. 1. № 1. – С. 114–126.
- [9] Adilova F.T., Ignat'ev N.A., Madrakhimov Sh.F. The Approach to Individualized Teleconsultations of Patients with Arterial Hypertension // Global Telemedicine and eHealth Updates: Knowledge Resources, – 2010. Vol. 3. № 3. – P. 372–375.

- [10] *Згуральская Е.Н.* Устойчивость разбиения данных на интервалы в задачах распознавания и поиск скрытых закономерностей // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, – 2018. – С. 826–829.
- [11] *Жамбю М.* Иерархический кластер-анализ и соответствия // Пер. с фр. - М.: Финансы и статистика, – 1988. – 342 с.
- [12] *Gyamfi K.S., Brusey J., Hunt A Gaura,* Linear dimensionality reduction for classification via a sequential Bayes error minimisation with an application to flow meter diagnostics // Expert Systems with Applications, – 2018. vol. 91. – № 1. – P. 252–262. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2017.09.010>.
- [13] URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.manifold.TSNE.html>.

Поступила в редакцию 10.10.2023

UDC 519.95

SELECTION OF INFORMATIVE FEATURES IN TERMS OF COMPACTNESS

Tursunmurotov D.Kh.

mr.davrbek@mail.ru

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, University str., Tashkent 100174, Uzbekistan.

The selection of informative features is considered using the compactness measure for the training sample of objects. The selection procedure is related to solving the curse of dimensionality. The measure of compactness is used to analyze the structure of object relations according to the defined metric and data normalization method. Compactness is defined as the average number of objects in the training sample, minus the noise, attracted by one minimum coverage standard. The set of values of the measure of compactness depends on the choice of metric for calculating the distance between objects and the method of data normalization. It is proposed to reduce the combinatorial complexity of the selection problem by preprocessing the data. The meaning of preprocessing is reduced to the construction of a matrix of pairwise distinguishability of features and the construction of an ordered sequence based on it. To calculate the measure of compactness, it is proposed to use the minimum coverage of the training sample by objects-standards. Object references are used as a precedent base for recognition algorithms. An increase in the generalizing ability on an informative set of features is guaranteed by removing noise objects and the maximum value of the measure of compactness. The optimal number of noise objects is determined by an additional criterion the regularizer. The calculation of the regularization coefficients is based on the values of the difference between the distribution densities of objects in two hyperballs with a common center.

Keywords: measure of compactness, informative features, reference objects, base of precedents.

Citation: Tursunmurotov D.Kh. 2023. Selection of informative features in terms of compactness. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 5(52): 133-140.

Об издании

Научный журнал «Проблемы вычислительной и прикладной математики» основан в 2015 году.

Свидетельство о регистрации СМИ за № 0856 выдано 5 августа 2015 года Агентством информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.

Периодичность выхода – 6 выпусков в год.

Тематика журнала включает в себя следующие основные направления:

- математическое моделирование физических, технических, биологических и социально-экономических систем;
- вычислительная математика и численные методы для решения прикладных задач;
- решение обратных и некорректно поставленных задач;
- интеллектуальный анализ данных, распознавание образов и обработка изображений;
- искусственный интеллект и технологии обработки баз знаний;
- технологии параллельных и распределенных вычислений;
- технологии программирования.

Правила для авторов

1. Правила подготовки и пример оформления статей можно загрузить с веб-страницы журнала <http://www.pvpm.uz>
2. Подготовленные файлы статей и экспертных заключений отправлять на адрес: submission@pvpm.uz
3. Статьи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются.
4. Представленные в редакцию рукописи авторам не возвращаются.
5. Плата с авторов за публикацию статей не взимается, и гонорары авторам не выплачиваются.