ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ТАЪЛИМ, ФАН ВА ИННОВАЦИЯЛАР ВАЗИРЛИГИ

“ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ” МИЛЛИЙ ТАДҚИҚОТ УНИВЕРСИТЕТИ

“МЕХАНИКА ВА КОМПЮЬТЕРЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ “ КАФЕДРАСИ

Эластиклик назариясиси фани

МИРСАИДОВ МИРЗИЁД МИРСАИДОВИЧ

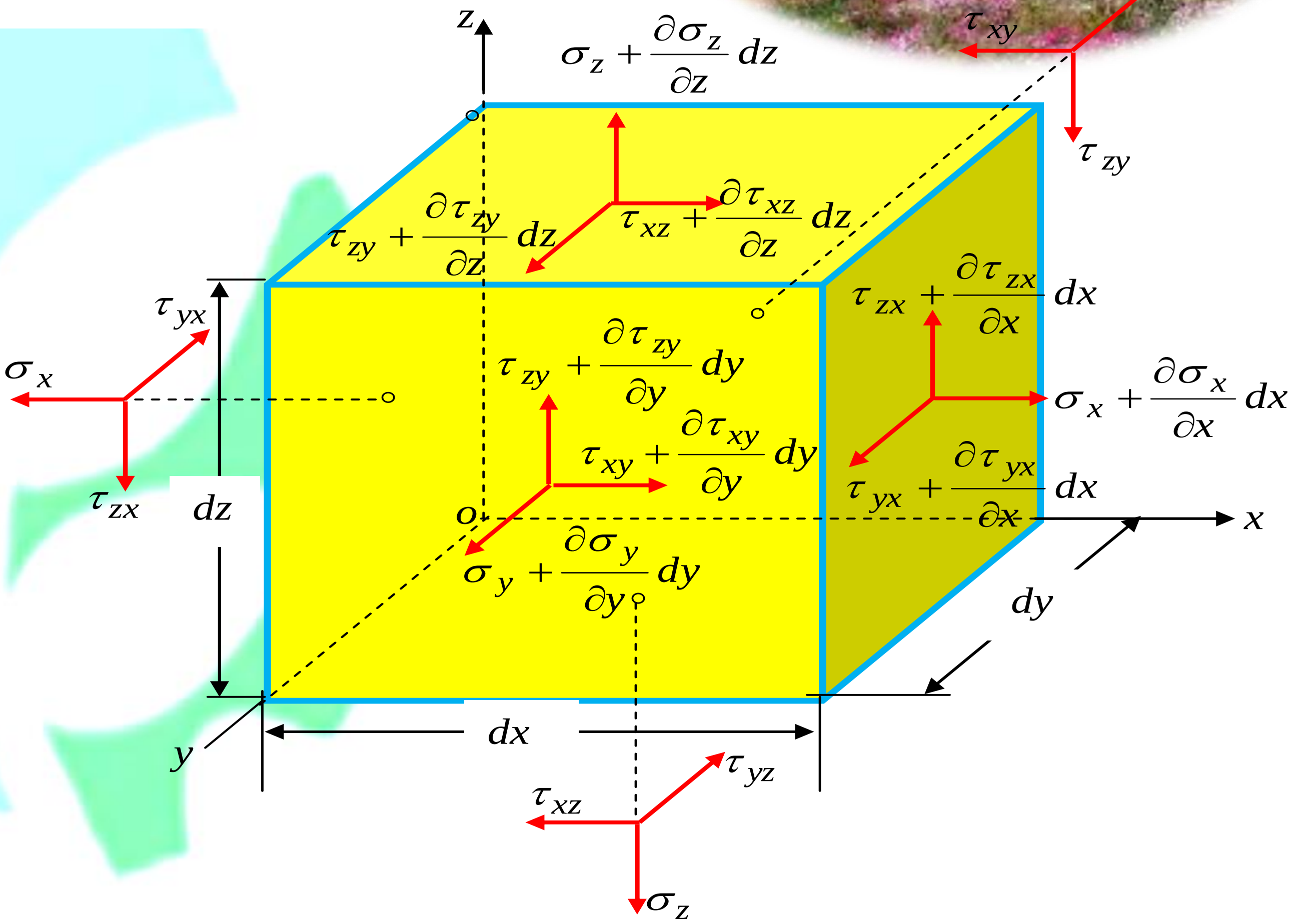
МАВЗУ 3, 4: КУЧЛАНИШЛАР НАЗАРИЯСИ

ТОШКЕНТ-2023

TIQXMMI MTU

"TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI"

MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI



МИРСАИДОВ МИРЗИЁД МИРСАИДОВИЧ

т.ф.д., профессор

• 3 ва 4-МАЪРУЗА

• РЕЖА:

1. Эластиклик назариясининг мувозанат дифференциал тенгламалар системаси.
2. Қия юзалардаги кучланишлар.
3. Сирт шартлари.
4. Бош кучланишлар.
5. Кучланганлик ҳолатининг инвариантлари.
6. Октаэдрик кучланишлар.
7. Энг катта уринма кучланишлар.
8. Кучланишнинг девиатори.
9. Кучланишлар интенсивлиги.

2.1. Эластиклик назариясининг мувозанат дифференциал тенгламаси

Ташқи таъсир (куч, температура ва бошқа таъсирлар) натижасида деформацияланувчан қаттиқ жисмнинг ихтиёрий нуқтасида ҳосил бўладиган кучланишлар умумий ҳолда ўзгарувчи бўлиб, улар нуқтанинг жойлашиш координаталари *(x,y,z)*га боғлиқ (нуқта координаталарининг функцияси) бўлган ҳолда ўзгариши мумкин, яъни

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_x(x,y,z); \quad \sigma_y = \sigma_y(x,y,z); \quad \sigma_z = \sigma_z(x,y,z);\\
&\tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,z); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y,z); \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x,y,z); \qquad \textbf{(2.1)}\\
&\tau_{yx} = \tau_{yx}(x,y,z); \quad \tau_{zy} = \tau_{zy}(x,y,z); \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y,z).
\end{aligned}$$

Агарда деформацияланувчан қаттиқ жисмнинг бирорта нуқтаси атрофидан томонлари *dx,dy,dz* га тенг бўлган параллелепипедни ажратиб олиб (2.1-расм) унинг ноль нуқтасидан чиққан томонларига таъсир қилувчи кучланишларни $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ деб фараз қилсак, у ҳолда шу томонларга параллел бўлган ва шу томонларда *dx,dy,dz* масофада жойлашган параллелепипедни томонларда ҳосил бўладиган кучланишлар:

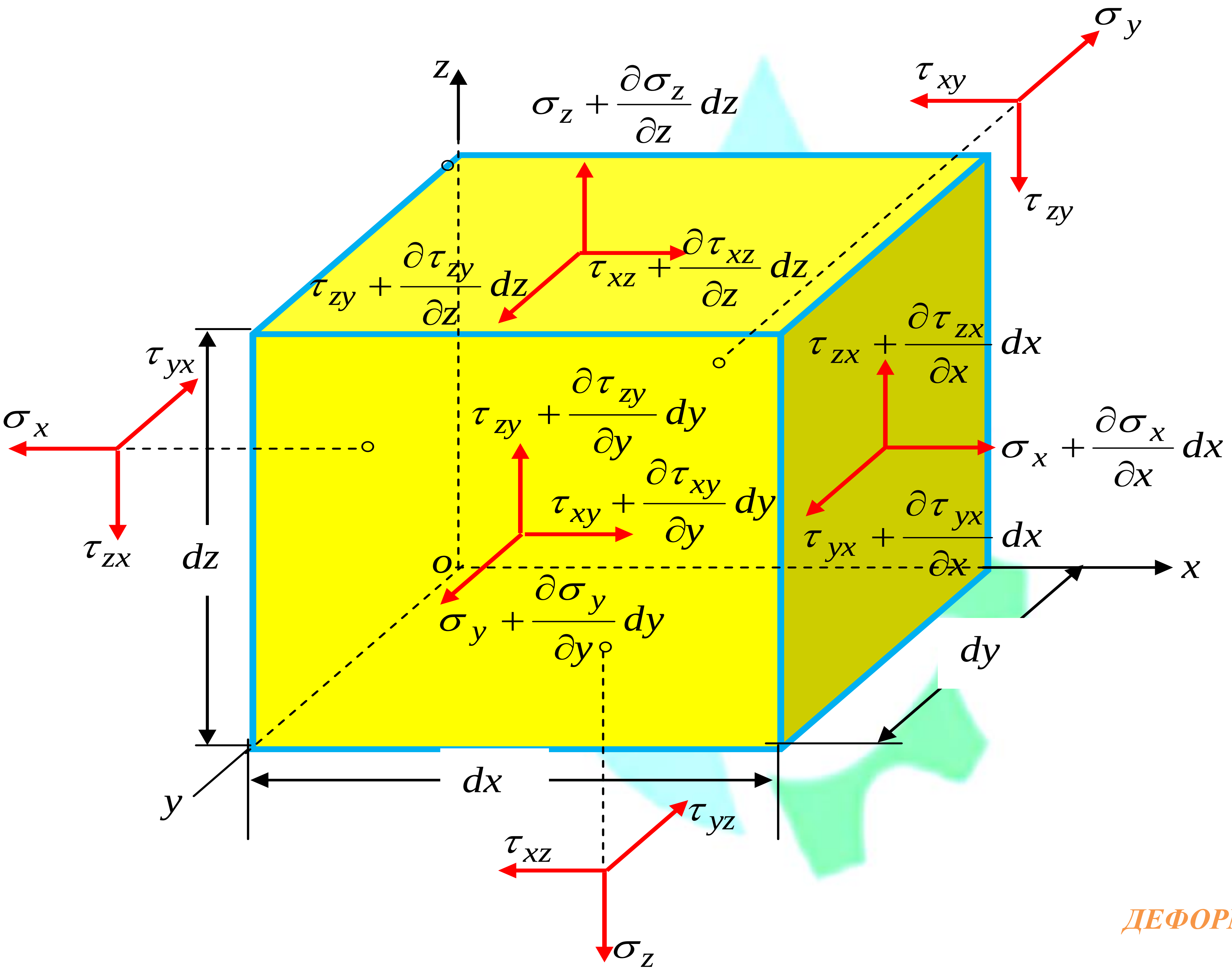
$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx; \quad \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx; \quad \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx.$$

бўлади (2.1-расм).

Бу ифодаларда $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx; \quad \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx; \quad \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx$

дифференциал оператор шу кучланишларни *dx* масофада ўзгаришларини ифодалайди. Қолган кучланиш комоненталари ҳам ва масофаларда шунга ўхшаб ўзгаради.

Агарда томонлари *dx,dy,dz* тенг бўлган параллелепипипедни массаси *dm* бўлса, у ҳолда параллелепипед материалини зичлиги ***ρ= dm / dx,dy,dz*** бўлади. У ҳолда параллелепипедга таъсир қилувчи ташқи кучни деб қарашимиз мумкин.



2.1-расм. Кучланишлар таъсиридаги чексиз кичик параллелепипед

Бу ташқи кучни (компоненталари) координата ўқлардаги проекциялари $X\rho dxdydz$, $Y\rho dxdydz$, $Z\rho dxdydz$ бўлади.

X,Y,Zлар бирлик ҳажмга таъсир қилувчи ташқи куч F ни координата ўқларидаги проекциялари, яъни солиштирма ҳажмий (масса) кучлари. Даламбер принципидан фойдаланиб элементар параллелепипедга таъсир қилаётган инерция кучларини ҳам қараш имкониятига эгамиз, яъни

$$\rho dxdydz\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\ \ddot{\upsilon}\rho dxdydz\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2};\ \ddot{w}\rho dxdydz\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Бу ерда: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2};\ \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2};\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ - элементар ҳажмнинг оғирлик марказини координата ўқларидаги тезланишлари.

Деформацияланувчан қаттиқ жисм мувозанатда бўлса, унда ажратиб олинган элементар ҳажм ҳам мувозанатда бўлади, демак барча таъсир қилаётган кучлар таъсирида элементар ҳажмни мувозанатини таъминлаш учун статиканинг мувозант тенгламаларини шарти бажарилиши керак, яъни:

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad \sum M_x = 0; \\ \sum Y &= 0; \quad \sum M_y = 0; \\ \sum Z &= 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Элементар параллелепипедга таъсир этувчи барча кучларни ўққа проекциялаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dxdz - \tau_{xy} dxdz + \\ &+ \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + X\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad \left(= \rho dxdydz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right). \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Тенгламадаги қавсларни очиб, икки томонини *dxdydz* га бўлиб юборсак, қуйидаги дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0\quad\left(=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right). \tag{2.4}$$

Худди шунингдек, элементар параллелепипедга таъсир этувчи барча кучларни *y,z* ўқларига нисбатан проекциялаб деформацияланувчан қаттиқ жисмнинг мувозанат холатини ифодаловчи дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қилиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0\quad\left(=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right);\\
&\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\quad\left(=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right);\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0\quad\left(=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Агар таъсир қилиши мумкин бўлган ҳажмий кучни Fdm десак.

Статикани қолган учта моментлар бўйича ҳам мувозанат тенгамаларидан фойдаланиш учун параллелепипедга (2.1-расм.) таъсир қилаётган барча кучлардан *x,y,z* ўқларига нисбатан моментлар олиб уларни мувозанат тенгламаларига олиб бориб қўйсак қуйидаги кўринишдаги тенгламаларни системаси ҳосил бўлади. Мисол тариқасида *y* ўқига нисбатан олинган моментларни моментлар бўйича (2.2) мувозанат тенгламанинг биринчисига қўйсак қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{gathered}
\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)(dydz)\cdot\frac{dz}{2}-\sigma_x(dydz)\cdot\frac{dz}{2}+\sigma_z(dxdy)\cdot\frac{dx}{2}-\\
-\left(\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\right)(dxdy)\cdot\frac{dx}{2}+\left(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}dz\right)(dxdy)\cdot dz-\\
-\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}dx\right)(dydz)\cdot dx-\tau_{xy}(dzdx)\cdot\frac{dz}{2}+\\
+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)(dzdx)\cdot\frac{dz}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}dy\right)(dzdx)\cdot\frac{dx}{2}+\\
+\tau_{zy}dzdx\cdot\frac{dz}{2}+X(dx\cdot dy\cdot dz)\cdot\frac{dz}{2}-Z(dxdydz)\cdot\frac{dx}{2}=0.
\end{gathered}\qquad \textbf{(2.6)}$$

Бу тенгламани соддалаштириб чексиз кичик миқдорларни ташлаб юборсак, у ҳолда

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

эканлигини келиб чиқади.

Демак, бошқа ўқларга нисбатан моментлар олиб, уларни момент бўйича мувозанат (2.2) тенгламаларга қўйсак, у ҳолда қуйидаги келиб чиқади.

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy}; \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz}; \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Маълумки, мувозанат дифференциал тенгламалар (2.5) системасини тўққизта номаълум кучланиш омиллари ташкил этади. Уринма кучланишлар жуфтлик (2.7) қонунини эътиборга олиб, олти номаълумли учта дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз. Демак, эластиклик назариясининг кучланишларга нисбатан тузилган тенгламлар системаси масалани ечиш учун етарли бўлмаганлиги сабабли эластиклик назарияси масалалари статик аниқмас эканлиги маълум бўлди. Эластиклик назарияси масалаларини ечиш учун эластик жисмнинг деформацияланиш ҳолатини ва унинг физик хусусиятларини эътиборга олиб қўшимча тенгламалар тузиш лозим. Шундан кейингина эластиклик назарияси масалаларини ечиш мумкин, яъни эластик жисмда ҳосил бўладиган кучланишларни координаталарнинг функциялари сифатида аниқлаш мумкин бўлади.

Цилиндрик $x\theta r$ координата системасида эластик жисмнинг мувозанат тенгламалар системаси қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{x\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{xr}}{\partial r}+\frac{\tau_{xr}}{r}+X=0;\\
&\frac{\partial\tau_{\theta x}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r}+\frac{2\tau_{\theta r}}{r}+\Theta=0;\\
&\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0.
\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{(2.8)}$$

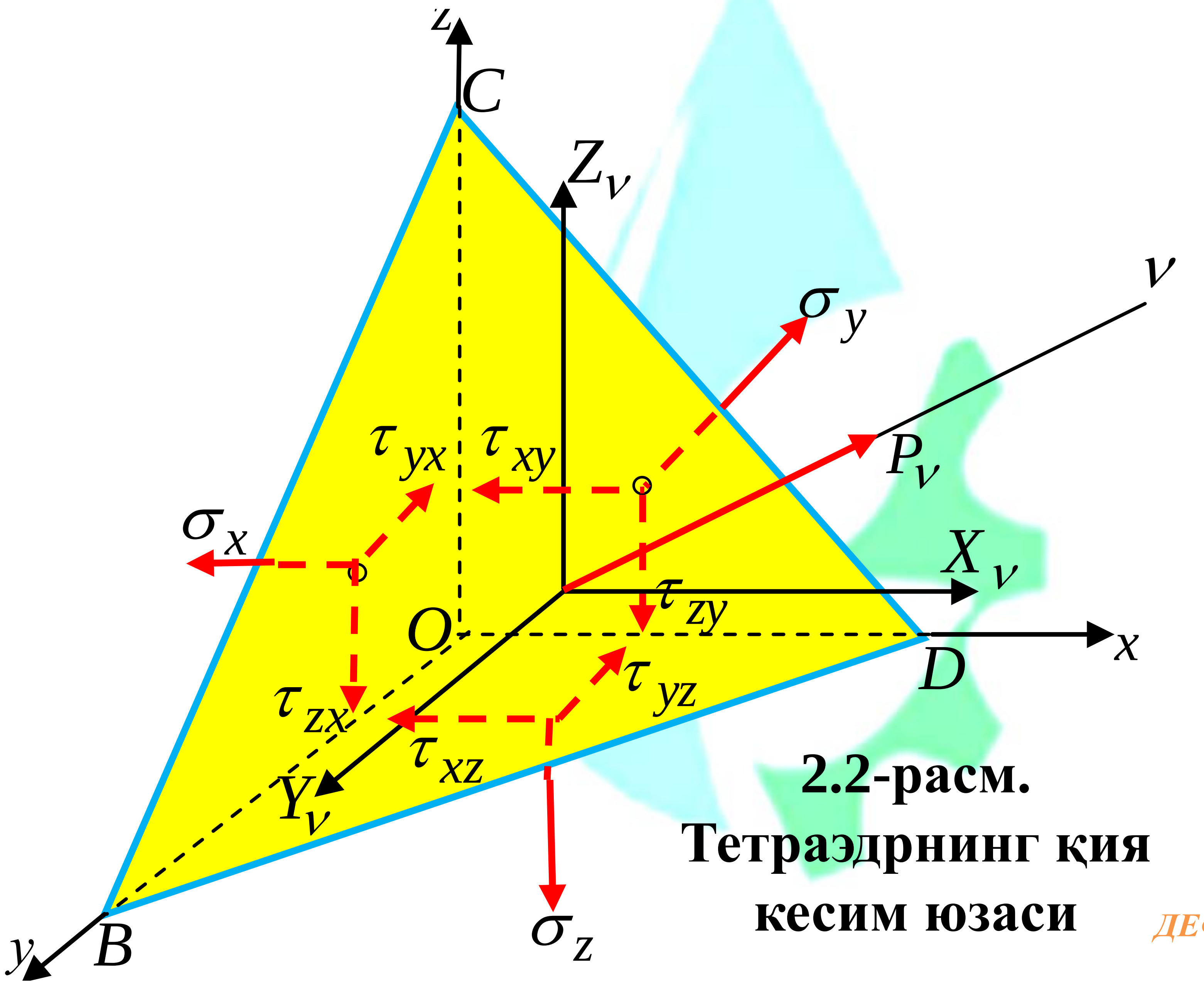
2.2. Қия юзалардаги кучланишлар. Сирт шартлари

Ташқи кучлар таъсирида бўлган жисмларнинг кучланганлик ҳолати тўғрисида тўлиқ тасаввурга эга бўлиш учун унинг координата ўқларига нисбатан ихтиёрий қия (оғма) юзаларида ҳосил бўладиган кучланишларни ҳам таҳлил қилиш зарур бўлади.

Мураккаб кучланиш ҳолатидаги (2.1-расм) параллелепипеддан *BCD* қия текислик бўйича қирқиб, бирорта *OBCD* тетраэдр ажратиб оламиз (2.2-расм). Қия *BCD* текисликнинг фазодаги ҳолатини ушбу текисликка ўтказилган ***v*** нормалининг йўналтирувчи косинуслари $\cos(x\ v)=\ell; \cos(y\ v)=n; \cos(z\ v)=m$ белгилайди.

Қия *BCD* текислик юзасини *dA*, координата текисликларидаги юзалар *B0C* учбурчакнинг юзасини dA_x , *C0D* учбурчакнинг юзасини dA_y , *D0B* учбурчакнинг юзасини dA_z билан белгилаймиз.

Бу юзалар орасидаги қуйидани муносабатларни аниқлаймиз:



$$dA_x = dA \cdot \ell;$$

$$dA_x = dA \cdot n;$$

$$dA_x = dA \cdot m.$$

2.2-расм. Тетраэдрнинг қия кесим юзаси

Ҳажмий кучларни X,Y,Z билан белгилаймиз. Қаралаётган тетраэдр координата текисликларида кучланишларнинг ташкил этувчилари $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ ва ҳажмий X,Y,Z кучлар ҳамда нормали $\boldsymbol{\nu}$ бўлган, қия BCD юзадаги тўла кучланиш $\boldsymbol{P}_\nu$ нинг ўқлар бўйича ташкил этувчилари X_ν, Y_ν, Z_ν эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда тетраэдрга таъсир қилаётган барча кучлар мувозанада бўлиши керак. Шуни эътиборга олиб, $0BCD$ тетраэдрга таъсир этаётган барча кучларни координата ўқига проекцияларининг йиғиндиларини нолга тенглаймиз:

$$X_\nu dA - (\sigma_x dA)\ell - (\tau_{xy} dA)m - (\tau_{xz} dA)n + XdV = 0,$$

Бунда dV тетраэдрнинг ҳажми.

Тенгламада ҳажмий кучлар учинчи тартибли чексиз кичик ҳад бўлгани учун ташлаб юборамиз. Унда бу тенгламадан қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$X_\nu = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n.$$

Ушбу *0BCD* тетраэдрга таъсир этаётган барча кучларни *y;z* координата ўқларига проекциялари йиғиндиларини ҳам нолга тенглаб, (баъзи бир математик амалларни бажариб), яна иккита тенглама ҳосил қиламиз. Демак, қаралаётган тетраэдр учун сирт шарти қуйидагича ифоаланади:

$$X_\nu = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n;$$

$$Y_\nu = \tau_{yx} \ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \qquad \textbf{(2.9)}$$

$$Z_\nu = \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + \sigma_z n.$$

Агар қия *BCD* юза жисм сирти билан устма-уст тушиб қолса, унда X_ν,Y_ν,Z_νлар сиртқи кучларнинг координата ўқлар бўйича ташкил этувчиларини ифодалайди. Унда бу тенглама ички кучлар билан ташқи кучлар орасидаги боғланишларни беради. Демак, бу тенглама жисм чегара ёки сирт шартини ифодалайди.

2.3.Бош кучланишлар. Кучланганлик ҳолати инвариантлари

Берилган жисмнинг ихтиёрий нуқтасига шундай ўзаро перпендикуляр текисликлар ўтказиш мумкинки, бу текисликларда уринма кучланишлар ҳосил бўлмасдан, фақат нормал кучланишлар мавжуд бўлади. У ҳолда бу текисликлар ***бош текисликлар*** дейилади. Бу текисликларга мос келувчи нормал кучланишлар эса ***бош кучланишлар*** **дейилади.**

Агар координата текисликларга параллел бўлган, учта ўзаро перпендикуляр юзалардаги кучланишларнинг ташкил этувчилари (σ_x; σ_y; σ_z; τ_{xy}; τ_{yz}; τ_{zx}) маълум бўлса, (2.9) фойдаланиб жисмнинг ихтиёрий қия текислигининг ихтиёрий нуқтасидаги кучланишларни аниқлаш мумкин.

Қия юзадаги X_v, Y_v, Z_v ташкил этувчи кучланишларнинг тенг таъсир этувчиси тўла кучланиш деб аталади ва ташкил этувчи кучланишларнинг геометрик йиғиндиси кўринишида аниқланади:

$$P_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Тўла кучланиш ***Pv*** ни нормал $\boldsymbol{\sigma_v}$ ва уринма ташкил этувчи $\boldsymbol{\tau_v}$ кучланишларга ажратамиз.

Нормал кучланиш координата ўқларига параллел бўлган ташкил этувчи кучланишларининг юза нормалига олинган проекциялари йиғиндисига тенг:

$$\sigma_v = X_v \ell + Y_v m + Z_v n =$$

$$= \sigma_x \ell^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} \ell m + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} n\ell. \quad \textbf{(2.11)}$$

Ушбу тенгликдан кўринадики, жисмнинг ихтиёрий қия юзасидаги нормал кучланиш координаталар текисликларига парараллел бўлган ўзаро перпедикуляр бўлган учта текисликлардаги олтита кучланиш компонентлари билан аниқланар экан.

Унда бу юзадаги уринма кучланиш тўла ва нормал кучланишлар айирмаси каби аниқланади:

$$\tau_v = \sqrt{P_v^2 - \sigma_v^2}\,. \qquad \mathbf{(2.12)}$$

Агар қаралаётган қия юза билан бош юзалар бир-бири билан устма-уст тушса, бу юзада уринма кучланиш нолга тенг бўлади.

Бош юзага таъсир этувчи бош кучланишни билан белгилаб (2.9)дан қуйидагича аникланади:

$$X_v = \sigma \cdot \ell; \quad Y_v = \sigma \cdot m; \quad Z_v = \sigma \cdot n.$$

Ушбу ифодани (2.9) ифода билан таққослаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sigma \cdot \ell = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n;$$
$$\sigma \cdot m = \tau_{yx} \ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \qquad \textbf{(2.13)}$$
$$\sigma \cdot n = \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + \sigma_z n.$$

Аналитик геометриядан маълумки, йўналтирувчи косинуслар орасида қуйидагича боғланиш мавжуд:

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Шунга асосан (2.13)-(2.14) тенгламаларда тўртта номаълумлар бўлиб, булар бош кучланиш ва унинг учта йўналтирувчи косинусларидир.

Юқоридаги (2.13) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0;\\
&\tau_{yx}\ell + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n = 0; \qquad \textbf{(2.15)}\\
&\tau_{zx}\ell + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n = 0.
\end{aligned}
$$

Ушбу бир жинсли тенгламалар системаси ечими $\ell = m = n = 0$ бўлиши мумкин эмас, чунки бу (2.14) шартга зиддир. Ҳеч бўлмаганда, йўналтирувчи косинусларининг бирортаси нолдан фарқли бўлганда, бу системанинг бошқа ечимлари мавжуд бўлиши учун системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши лозим, яъни:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \qquad \textbf{(2.16)}$$

Детерминантини очиб чиқамиз:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + \tau_{yx}\tau_{zy}\tau_{xz} + \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz} -$$

$$-(\sigma_y - \sigma)\tau_{zx}^2 - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0.$$

Бу ифодадаги қавсларни очиб чиқиб, бош кучланиш даражаси бўйича гуруҳлашдан кейин қуйидаги куб тенглама ҳосил бўлади:

$$\sigma^3 - I_{1\sigma}\sigma^2 + I_{2\sigma}\sigma - I_{3\sigma} = 0 \qquad \textbf{(2.17)}$$

Бу ерда

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \qquad \textbf{(2.18)}$$

$$I_{3\sigma} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Бу (2.18) ифодаларга кучланиш тензорининг биринчи, иккинчи ва учинчи инвариантлари дейилади. Улар бош кучланишлар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$I_{1\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$I_{3\sigma} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3.$$

Бош кучланиш σ га нисбатан учинчи даражали, яъни куб (2.17) тенгламани ечиш натижасида учта σ_1, σ_2, σ_3 илдизлар аниқланади.

Куб (2.17) тенгламани ечишнинг икки усулини кўриб чиқамиз.

1. *Куб тенглама (2.17)нинг чап томонини кўпҳадга ажратиш усули*. Агар (2.17) тенгламанинг чап томонини қуйидагича кўпайтувчиларга ажратиш мумкин бўлса:

$$(\sigma_v - \sigma_1)(\sigma_v - \sigma_2)(\sigma_v - \sigma_3) = 0 \qquad \textbf{(2.20)}$$

унда бу тенгламанинг илдизлари жуда осон топилади, яъни

$$\sigma_{v1} = \sigma_1; \quad \sigma_{v2} = \sigma_2; \quad \sigma_{v3} = \sigma_3 \qquad \textbf{(2.21)}$$

2. *Куб тенглама (1.21)ни тригонометрик усулда ечиш.*

Куб (2.17) тенгламага $\sigma = Y + I_{1\sigma}/3$ алмаштириш киритиб, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Y^3 + PY + q = 0 \qquad \textbf{(2.22)}$$

Бу ерда

$$P = I_{2\sigma} - \frac{I_{1\sigma}^2}{3}; \qquad q = -\frac{2}{27}I_{1\sigma}^3 + \frac{1}{3}I_{1\sigma}I_{2\sigma} - I_{3\sigma}. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Агар дискриминант манфий, яъни $\Delta = P^3 + q^2 < 0$ бўлса, (2.22) куб тенгламанинг учала ҳақиқий илдизи мавжуд. Улар қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$Y_1 = -2r\cos\frac{\varphi}{3}; \quad Y_2 = 2r\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right); \quad Y_3 = 2r\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right). \qquad \textbf{(2.24)}$$

Бунда

$$\cos\varphi = \frac{q}{2r^3}; \quad r = \pm 0{,}5774\sqrt{|P|}. \qquad \textbf{(2.25)}$$

Куб (2.22) тенглама ечимларининг тўғрилиги қуйидаги формула ёрдамида текширилади

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0. \qquad \textbf{(2.26)}$$

Бош кучланишлар эса қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\sigma' = Y_1 + \frac{I_{1\sigma}}{3}; \quad \sigma'' = Y_2 + \frac{I_{1\sigma}}{3}; \quad \sigma''' = Y_3 + \frac{I_{1\sigma}}{3}. \qquad \textbf{(2.27)}$$

Аниқланган кучланишларни тегишлича бош кучланишлар $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ билан белгилаймиз.

Куб (2.17) тенглама илдизларининг, яъни бош кучланишларнинг тўғрилиги қуйидаги тенгламалар ёрдамида текширилади:

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3;$$

$$\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1; \quad \textbf{(2.28)}$$

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2=\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Йўналтирувчи косинуслар қийматларининг тўғрилиги, бош кучланишлар векторларининг ортогоналлигидан фойдаланиб текширилади, яъни:

$$\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$$

$$\ell_2\ell_3+m_2m_3+n_2n_3=0; \quad \textbf{(2.29)}$$

$$\ell_3\ell_1+m_3m_1+n_3n_1=0.$$

Агар бош текисликлардан бири маълум бўлса, бош кучланишларни топиш учун қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad \sigma_3 = \sigma_z. \qquad \textbf{(2.30)}$$

Бош ўқларнинг ҳолати эса қуйидаги формуладан аниқланади:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \qquad \textbf{(2.31)}$$

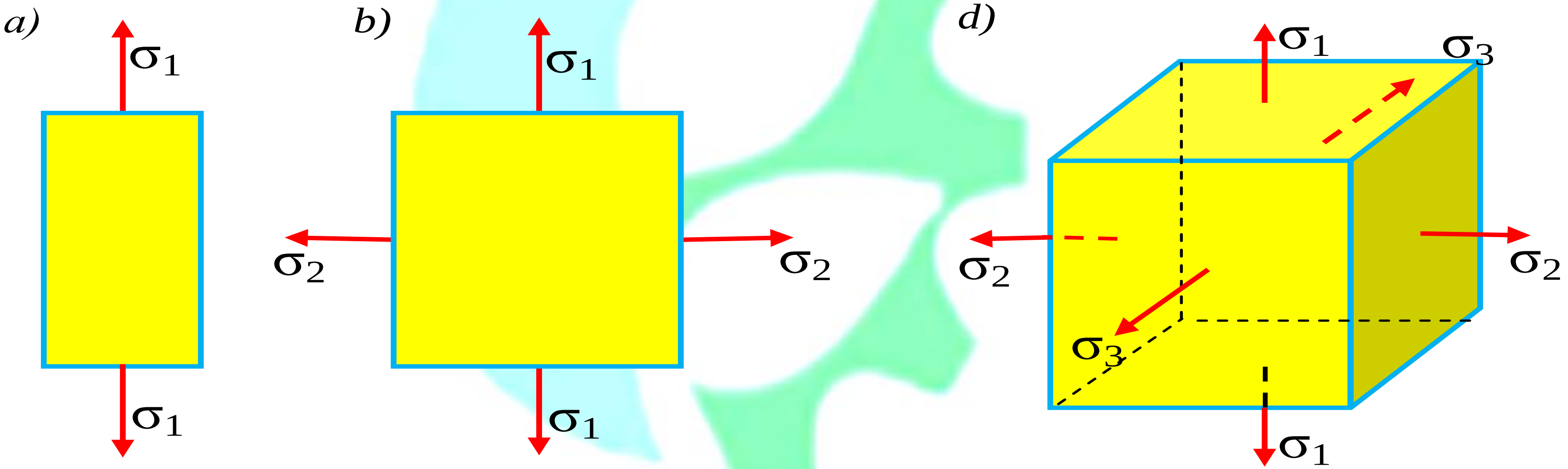
бу формуладан $\alpha_1 = \alpha_0$ ва $\alpha_2 = \alpha_0 + 90^0$ иккита бурчак топилиб, яъни биринчи ва иккинчи бош ўқларнинг ҳолати аниқланади.

Келтириб чиқарилган натижалар ёрдамида конструкция элементларида ташқи кучлар таъсирда ҳосил бўлиши мумкин бўлган кучланиш ҳолатларини кўриб чиқишимиз мумкин:

1.Оддий чўзилиш (сиқилиш) ҳолатида бош кучланишларни битта компонентаси ҳосил бўлиши мумкин, яъни (2.3 *а*-расм).

2.Текис кучланиш ҳолатида эса бош кучланишларнинг иккита компонентаси ҳосил бўлиши мумкин, яъни (2.3 *b*-расм). Бу ҳолда $\sigma_1 > \sigma_2$ деб қаралади.

3.Ҳажмий кучланиш ҳолатида эса бош кучларнинг ҳамма компоненталари ҳосил бўлади, яъни (2.3 *d*-расм). Бу ҳолда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ деб қаралади.



2.3-расм. Кучланганлик ҳолат турлари

2.4. Октаэдрик кучланишлар.Энг катта уринма кучланишлар

Ўзаро перпендикуляр бўлган учта бош юзага нисбатан бир хил бурчак ҳосил қилиб ўтган юза $\ell = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ октаэдрик юза деб аталади. Унда (2.9) формуладан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$X_1 = \sigma_1 \ell; \;\; X_2 = \sigma_2 m; \;\; X_3 = \sigma_3 n.$$

Бу юзадаги кучланишлар қуйидаги формулалар ёрдамида ниқланади:

Тўла кучланиш:

$$P_\nu = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Октаэдрик нормал кучланиш:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \qquad \textbf{(2.33)}$$

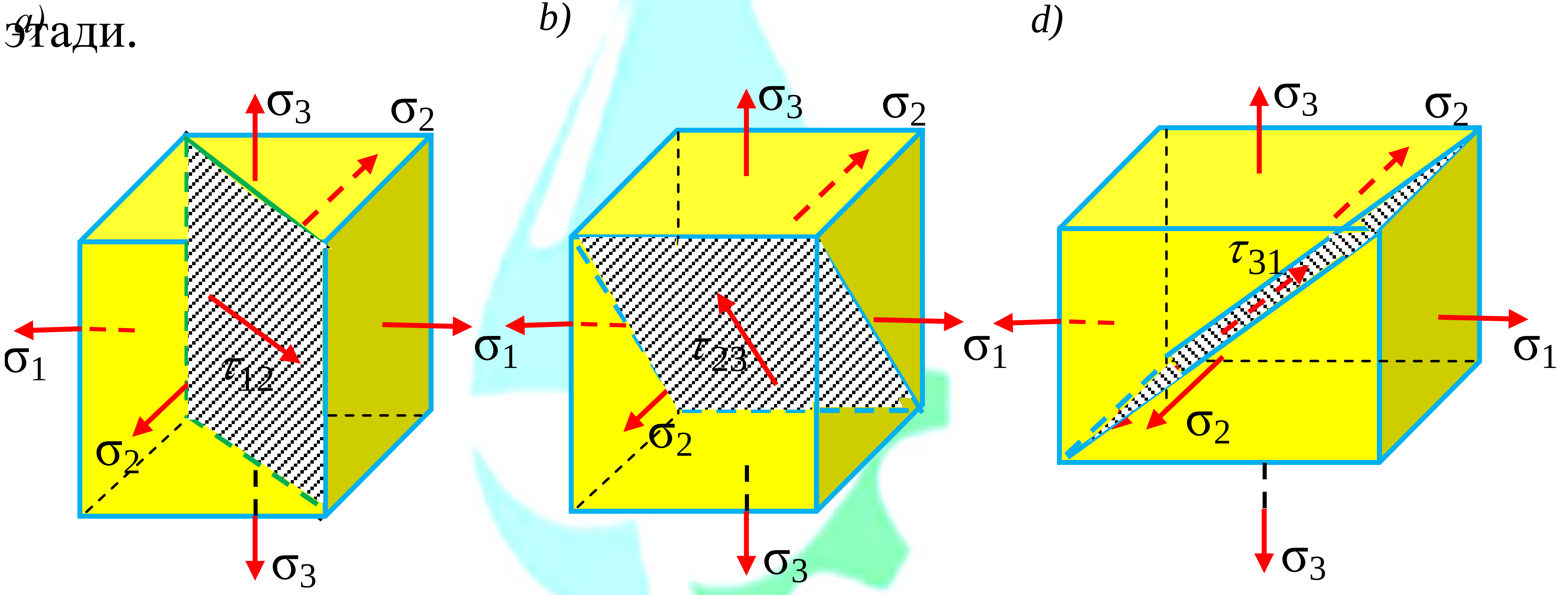
Октаэдрик уринма кучланиш:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad \textbf{(2.34)}$$

Бош уринма кучланишлар қуйидагича аниқланади, яъни:

$$\tau_{12} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \; \tau_{23} = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \; \tau_{31} = \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

Бу уринма кучланишлар ҳажмий кучланиш ҳолатида, бош юзаларга 45* бурчак остидаги бўлган юзаларга (2.4-расм) таъсир этади.



2.4- расм. Қия юзалардаги уринма кучланишлар

Октаэдрик юзалардаги уринма кучланиш бош уринма кучланишлар орқали қуйидагича ёзилади:

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2} \qquad \textbf{(2.35)}$$

Бунда

$$\tau_{12} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \; \tau_{23} = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \; \tau_{31} = \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \qquad \textbf{(2.36)}$$

Жисмнинг берилган нуқтасидаги максимал ва минимал уринма кучланишлар қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \; \tau_{\min} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad \textbf{(2.37)}$$

Октаэдрик уринма кучланиш максимал уринма кучланишдан жуда кам фарқ қилади ва улар орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$0{,}941 \cong \frac{2\sqrt{2}}{3} \geq \frac{\tau_{oct}}{\tau_{\max}} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \cong 0{,}816. \qquad \textbf{(2.38)}$$

2.5. Кучланишнинг девиатори. Кучланишлар интенсивлиги

Кучланишлар тензорини кучланишнинг шар тензорига ва кучланишнинг девиаторига ажратиш мумкин, яъни:

$$T_\sigma = Ш_\sigma + D_\sigma \qquad (2.39)$$

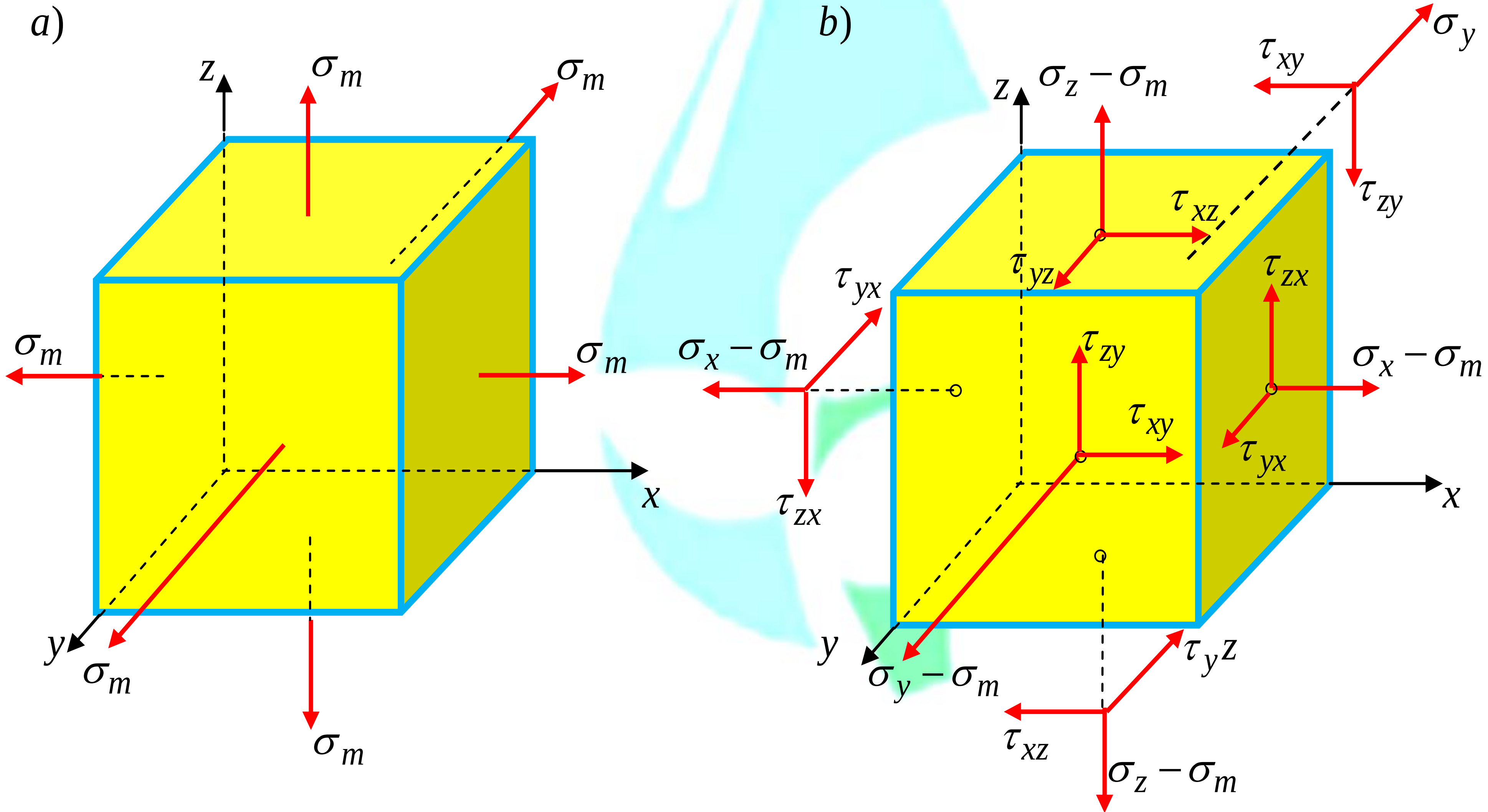
ёки

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_m, 0, & 0 \\ 0, & \sigma_m, 0 \\ 0, & 0, & \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y - \sigma_m, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z - \sigma_m \end{vmatrix} \qquad (2.40)$$

бунда

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \qquad (2.41)$$

Кучланишларнинг шар тензори таъсири натижасида жисмнинг ҳажми ўзгаради (2.5 *a*-расм). Кучланишларнинг девиатор тензори таъсири натижасида жисмнинг шакли ўзгаради (2.5 *b*-расм).



2.5 -расм. Кучланишнинг шар ва девятор тензорининг ҳолатлари

Кучланишнинг шар тензор кучланишнинг биринчи инварианти билан устма-уст тушади, яъни:

$$I_1^{Ш} = 3\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z .$$

Девиатор кучланишнинг биринчи инварианти эса нолга тенг бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$I_{1D(\sigma)} = (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_m = 0. \quad \textbf{(2.42)}$$

Девиатор кучланишнинг иккинчи инварианти аниқлаш учун тензор кучланишининг иккинчи инвариантидан фойдаланамиз $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ кучланшларни $(\sigma_x - \sigma_m); (\sigma_y - \sigma_m); (\sigma_z - \sigma_m)$ айирма билан алмаштириб, баъзи бир соддалаштиришларни бажарамиз.

Натижада девиатор кучланишнинг иккинчи инварианти қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$I_{2D(\sigma)} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right] \quad \textbf{(2.43)}$$

Кучланишлар девиаторининг учинчи инвариантини ҳам қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} I_{3D(\sigma)} = \frac{1}{27}\Big[& 2\left(\sigma_x^3+\sigma_y^3+\sigma_z^3\right) - 3\left(\sigma_x^2\sigma_y+\sigma_y^2\sigma_z+\sigma_z^2\sigma_x + \right. \\ & \left. +\sigma_x\sigma_y^2+\sigma_z\sigma_x^2+\sigma_y\sigma_z^2\right)+12\sigma_x\sigma_y\sigma_z+9\sigma_x\left(\tau_{xy}^2-2\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)+ \\ & +9\sigma_y\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2-2\tau_{zx}^2\right)+9\sigma_z\left(-2\tau_{xy}^2+\tau_{zy}^2+\tau_{zx}^2\right)+54\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}\Big] \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2.44)}$$

Кучланишлар итенсивлиги деб, кучланиш девиаторининг иккинчи инвариантининг квадрат илдизига айтилади. Нормаль ва уринма кучланишлар интенсивлиги қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$\sigma_i = \sqrt{3I_{2D(\sigma)}}. \qquad \textbf{(2.45)}$$

$$\tau_i = \sqrt{I_{2D(\sigma)}}. \qquad \textbf{(2.46)}$$

Бу формулалардан кўринадики, улар бир биридан фақат пропорционаллик коэффициентлари билан фарқ қилар экан, шунинг учун:

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau_i. \qquad \textbf{(2.47)}$$

(2.43) ифодани эътиборга олиб (2.45) ва (2.46) формулалар қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)}. \qquad \textbf{(2.48)}$$

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)}. \qquad \textbf{(2.49)}$$

Кучланишлар интенсивлигини бош кучланишлар орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}. \qquad \textbf{(2.50)}$$

Октаэдрик уринма кучланиш орқали эса қуйидагича ифодаланади:

$$\sigma_i = 3\tau_{oct}/\sqrt{2}.$$

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Кучланишлар деб нимага айтилади?
2. Жисм нуқтасининг кучланганлик ҳолатини изоҳлаб беринг?
3. Бош юза деб қандай юзага айтилади?
4. Бош кучланишлар қандай кучланишлар?
5. Жисм нуқтасининг кучланганлик ҳолатини қандай кучланишлар характерлайди?
6. Деформацияланувчан қаттиқ жисмнинг мувозанат дифференциал тенгламаларини изоҳ беринг?
7. Эластик жисм нуқтасининг кучланганлик ҳолатининг қандай турларини биласиз?
8. Қандай оғма юза октаэдрик юза деб аталади?
9. Оғма юзадаги кучланишларга изоҳ беринг?
10. Сирт чегара шартини изоҳлаб беринг?
11. Кучланишлар инвариантини изоҳлаб беринг?

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Ўрозбоев М.Т. Материаллар қаршилиги II қисм. Олий ўқув юртлари учун дарслик. “Ўқитувчи нашриёти” Тошкент –1966. 488 бет.
2. Xolmuradov R.I., Xudoynazarov X.X., Elastiklik nazariyasi: darslik. I-II qism. –Toshkent, FAN, 2003.
3. Хамраев П.Р., Рахманов Б.Қ. Эластиклик ва пластиклик назарияси" фанидан ўқув қўлланма /Тошкент архитетура–қурилиш институти . Тошкент, 2005, 103 бет.
4. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие для студентов вузов. –2-е изд., перераб. –М.: Высш. школа, 1982. –264 с.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

5. Shirinqulov T., Ismayilov K., Qo‘ldashev A. Elastik-plastik plastinkalar hisobi: –Toshkent. Tafakkur-bo‘stoni, 2012, 240 – b.
6. Mirsaidov M.M., Matkarimov P.J., Godovannikov A.M. Materiallar qarshiligi: darslik. Toshkent: “Fan va texnologiya”, 2010.- 412 бет.
7. Стружанов, В.В., Бурмашева Н.В. Теория упругости: основные положения : учеб. пособие/М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 204 с.

TIQXMMI MTU
"TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI"
MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

МИРСАИДОВ МИРЗИЁД МИРСАИДОВИЧ

☎+ 998 71 237 09 81

✉ theormir@mail.ru