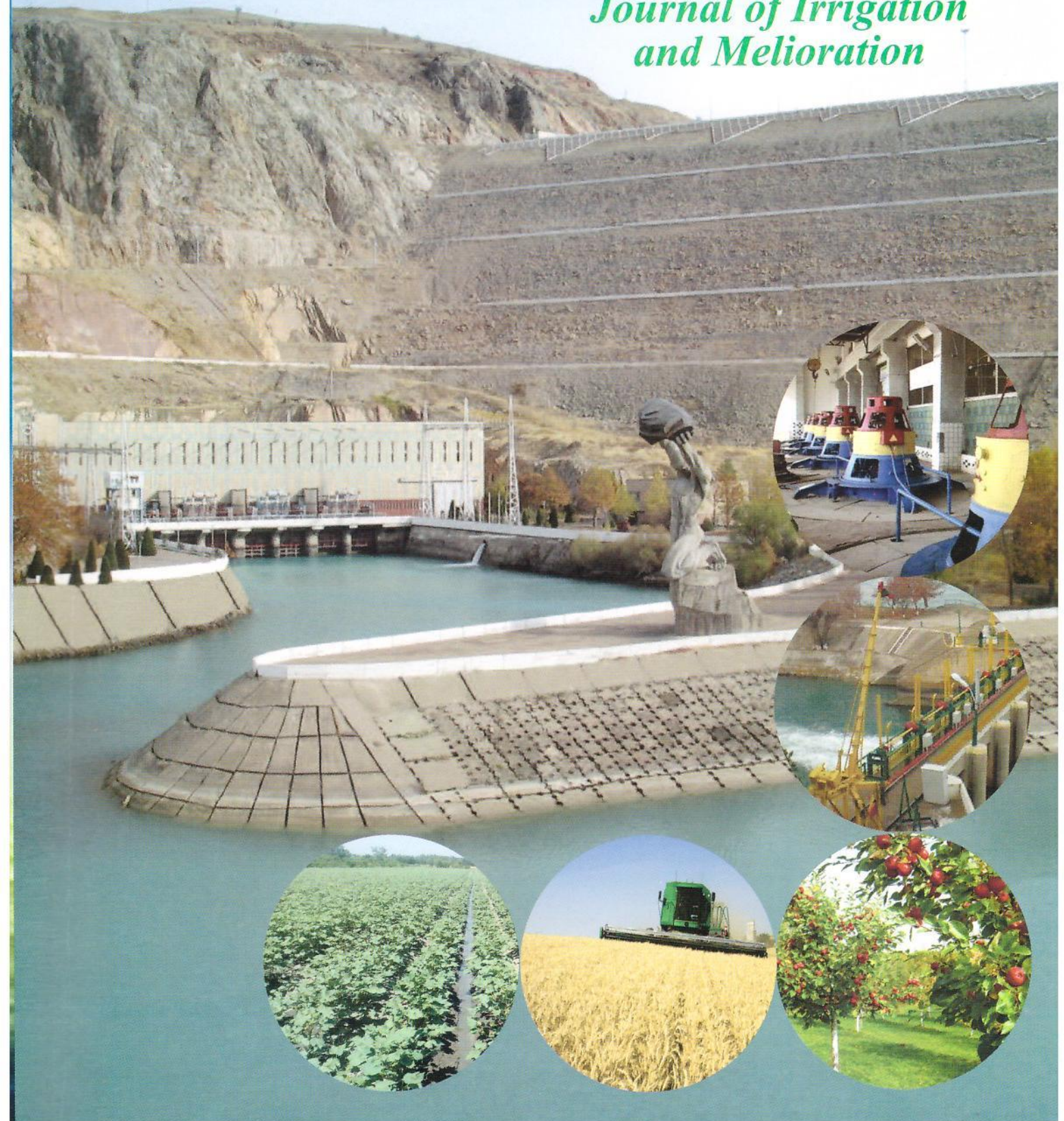


ISSN 2181-8584

IRRIGATSIYA va MELIORATSIYA

№2(20).2020

*Journal of Irrigation
and Melioration*



ИРРИГАЦИЯ ВА МЕЛИОРАЦИЯ

М.М. Саримсақов, О.С. Абдисаматов, З.Т. Умарова Суғориш техникаси элементларининг ирригация эрозиясига таъсири.....	7
--	---

ГИДРОТЕХНИКА ИНШОТЛАРИ ВА НАСОС СТАНЦИЯЛАР

А.М. Арифжанов, Л.Н. Самиев, С.Н. Хошимов Ўзан сув омборида лойқаланиш жараёнларини баҳолаш.....	11
Д.Р. Базаров, Ф. Артикбекова, М.П. Ташханова, Б.М. Норкулов Исследование движения водного потока в русле Аму-Бухарского машинного канала.....	15
А.М. Арифжанов, Л.Н. Самиев, Ф.К. Бабажанов Дарё чўкиндиларини механик таркибининг ирригацион аҳамияти.....	21
С.А. Абдукадиров, З.С. Шадманова, Б.Ш. Юлдошев Влияние неоднородности упругой среды на формирование резонансных волн при действии движущейся нагрузки.....	25
Н.М. Икрамов, Т.Ш. Мажидов, А. Мухаммаджонов Система мониторинга потребляемой электроэнергии на насосных станциях.....	32
Д.Р. Базаров, Б.Р. Уралов, М.П. Ташханова Закономерности гидравлического сопротивления машинных каналов насосных станций.....	37

ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ

Р.К. Джамолов, А.А. Акрамов, К. Джамолов Изучение перемещения посевных опущенных семян хлопка по наклонному лотку в протравительной машине.....	42
Д. Джураев, М.С. Халилов, С.М. Бадалов, И.Ж. Тоиров, А.Э. Уришев Универсал осма пуркагичга ўрнатиладиган распилителларни асослаш.....	47
О. Матчонов, Б. Тухтамишев Ўзанинг техник чигит намлигини пасайтиришнинг технологик хусусиятлари.....	53
Р.К. Джамолов, Э.Т. Мақсудов, К. Джамолов Тукли уруғлик чигитнинг саралаш технологик жараёнини такомиллаштириш натижалари.....	57

ҚИШЛОҚ ВА СУВ ХЎЖАЛИГИНИ ЭЛЕКТРЛАШТИРИШ ВА АВТОМАТЛАШТИРИШ

Р.А. Муминов, М.Н. Турсунов, Х. Сабилов, У.Р. Холов, Т.З. Ахтамов, М. Эшмурадова Комбинированная установка на основе фототепловой батареи - электроводонагревателя для обеспечения электроэнергией и водой сельские домохозяйства.....	62
А. Ли, З. Шарипов, М.Н. Саттаров Беда уруғининг диэлектрик саралаш қурилмасида аралашманинг ҳаракатини моделлаштириш.....	67

УДК: 593.3

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ УПРУГОЙ СРЕДЫ НА ФОРМИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЛН ПРИ ДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

С.А.Абдукадиров - к.ф.-м.н., доцент, З.С.Шадманова - к.т.н., доцент

Ташкентский архитектурно-строительный институт

Б.Ш.Юлдошев - PhD, доцент, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

Аннотация

В статье изучены волновые процессы в неоднородной упругой среде при действии внешней нагрузки, движущейся вдоль свободной поверхности. Выявлены кратные корни дисперсионных уравнений и определены критические скорости нагрузки, приводящие к формированию резонансных процессов. Решения дисперсионных уравнений позволяют определить дополнительные критические скорости в средневолновом спектре в зависимости от параметров структуры. Для простых моделей получены аналитические решения развития резонансных процессов асимптотически верные при относительно больших значениях времени. Проведенное компьютерное моделирование позволило проанализировать количественные особенности процесса на всем временном отрезке действия нагрузки. Численные и асимптотические результаты сравниваются с целью выявить рамки применимости асимптотического решения в практических задачах.

Ключевые слова: волноводные свойства системы, дисперсия волн, фазовая скорость, групповая скорость, критическая скорость нагрузки, асимптотическое решение, изгибные резонансные волны.

ҚАТЛАМЛИ ЭЛАСТИК МУҲИТНИНГ ҲАРАКАТЛАНУВЧИ КУЧ ТАЪСИРИДА ШАКЛЛАНАДИГАН РЕЗОНАНС ТЎЛҚИНЛАРГА ТАЪСИРИ

С.А.Абдукадиров - ф.-м.ф.н., доцент, З.С.Шадманова - т.ф.н., доцент

Тошкент архитектура ва қурилиш институти

Б.Ш.Юлдошев - PhD, доцент, Тошкент ирригация ва қишлоқ хўжалигини механизациялаш муҳандислари институти

Аннотация

Мақолада эркин юзада, ташқи куч таъсирида ҳаракатланувчи, ҳар хил жинсли эластик жисмнинг тўлқинланиш жараёни ўрганилган. Дисперсион тенгламаларнинг қаррали илдизлари ва резонанс жараёнларини шаклланишига олиб келувчи хавфли тезликлари аниқланди. Дисперсион тенгламаларнинг ўрта тўлқинли спектрдаги ечимлари, тизимнинг структурасига боғлиқ кучнинг қўшимча хавфли тезликларини аниқлаш имконини беради. Оддий моделлари учун вақтнинг катта қийматларида асимптотик тўғри бўлган резонансли жараёнини кўрсатувчи аналитик ечимлар олинган. Компьютерда моделлаштириш усулида ҳаракатланувчи кучнинг таъсир қилувчи чекли вақтдаги ҳолатини таҳлил қилиш имконини берди. Амалий масалаларда асимптотик ечимларнинг қўлланилиш чегарасини аниқлаш мақсадида сонли ва асимптотик натижалар таққосланади.

Таянч сўзлар: тизимнинг сув тўлқинли хусусиятлари, тўлқинлар дисперсияси, фазази тезлик, гуруҳли тезлик, юкланишнинг хавфли тезлиги, асимптотик ечим, буқилма резонансли тўлқинлар.

IRRIGATION VALUE THE MECHANICAL COMPOSITION RIVER SPRING THE EFFECT OF THE INHOMOGENEITY OF ELASTIC MEDIUM ON THE INITIATION OF RESONANT WAVES UNDER MOVING LOAD

S.A.Abdukadirov - c.p.-m.s, associate professor, Z.S.Shadmanova - c.t.s, associate professor

Tashkent Institute of Architecture and Construction

B.Sh.Yuldoshev - PhD, associate professor, Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers

Abstract

The wave processes in an inhomogeneous elastic medium under the action of an external load moving along a free surface are investigated. The waveguide properties of the system are preliminarily studied. The multiple roots of the dispersion equations are revealed and the critical load velocities leading to the formation of resonance processes are determined. The solutions of the dispersion equations make it possible to determine the additional critical velocities in the mid-wave spectrum depending on the structure parameters. For simple models, analytical solutions of the development of resonance processes are obtained that are asymptotically correct for relatively large values of time. The computer simulations allow us to analyze the quantitative features of the process over the entire time period of the load. Numerical and asymptotic results are compared to reveal the range of the asymptotic solution acceptability.

Key words: waveguide properties of systems, dispersion of waves, phase velocity, group velocity, critical velocities loads, asymptotical solutions, flexural resonance waves.

Введение. Изучение динамических свойств упругих тел и конструкций, подверженных действию движущихся нагрузок, имеет большую историю. Вместе с естественным научным интересом к проблеме «переходные волновые процессы в структурно неоднородных твердых телах» эта задача имеет очевидные практические применения, связанные с актуальными проблемами геофизики, геодинамики, проектирования и эксплуатации взлетно-посадочных полос, строительства мостов и т.д. Особое внимание в этой проблематике привлекают резонансные процессы, возбуждаемые нагрузками, движущимися с критическими скоростями.

Изучение резонансных явлений, началось с рассмотрения однородных тел и сред. Начало положено в работе [1], где решалась плоская задача для свободного полупространства и поверхностной нагрузки, движущейся с рэлеевской скоростью. Было показано, что во-первых, в этом случае стационарный предел решения отсутствует; во-вторых, скорости частиц и напряжения вблизи поверхности линейно возрастают. Затем были изучены различные аспекты резонансных волн для пластин [2, 3, 4, 5]. Особые точки на дисперсионных кривых в случае полого цилиндра были рассмотрены в [3, 4, 5], асимптотические и компьютерные решения изгибных резонансных волн получены в [6, 7] для различных типов движущихся нагрузок.

Важно отметить, что основной вклад в теорию резонансных волн в твердых телах и конструкциях принадлежит Л.И.Слепяну [5]. Действенным аналитическим инструментом при исследовании резонансных процессов оказался разработанный им метод обращения двойных изображений Лапласа-Фурье в окрестности движущейся волны ($x=ct$, c - скорость волны, t - время). Этот подход позволил получить асимптотические решения процессов (при больших значениях времени) в замкнутом виде. На основе этого метода в работах [3, 8, 9] были исследованы ряд задач включая практические приложения. Многочисленные аспекты задач с движущимися нагрузками, не затрагивающие, однако, резонансные волны можно найти в работах [10, 11, 12, 13].

Несмотря на то, что процессы с движущимися нагрузками, изучались во многих источниках, задача поставленная в название этой работы, имеющая очевидное теоретическое и практическое значение, требует дальнейшего анализа. До сих пор было неясно, какого типа особые точки на дисперсионных кривых и какое их количество появляется в случае структур различного строения, сколько их, какие общие и отличительные особенности имеют рэлеевский и средневолновой резонансные процессы? Какой из них опаснее с точки зрения реакции рассматриваемой конструкции?

Эти и другие вопросы рассмотрены в настоящей работе. Ниже формулируются условия существования особых точек на дисперсионных кривых. Как известно [5], волновой резонанс формируется в районе фронта бегущей с критической скоростью нагрузки ($V=V_{кр}$). Последняя совпадает с равными между собой фазовой c , и групповой c_g , скоростями в системе ($V=c=c_g$): нагрузка, движущаяся с той же скоростью, с которой распространяется энергия стационарной волны, постоянно закачивает энергию внешней нагрузки внутрь системы, что приводит к резонансному росту возмущений со временем.

Точки на дисперсионных кривых, где фазовые и групповые скорости равны являются кратными корнями дисперсионного уравнения $c=c(q)$, где: q – волновое число ($q=2\pi/\lambda$, λ – длина волны) называются особыми, обозна-

чая их координаты q^* , $c^*=c(q^*)$. Принимая во внимание связь фазовой и групповой скоростей, $c_g=c+q(dc/dq)$, видно, что равенство $c_g=c$ говорит о наличии особых точек (i) в длинноволновом спектре (точнее – в предельном случае бесконечно длинных волн $q^*=0$, $c^*=c(0)=c_k(0)$), и в средневолновом спектре (экстремальные точки фазовых кривых)). Кроме того, существуют специальные точки и в случае бесконечно коротких волн, но здесь они не рассматриваются, поскольку, используемая модель Бернулли изгиба пластины не описывает короткие волны.

В работе показано (раздел 3, работы [5]), что рассматриваемая структура имеет, во-первых, особую точку в длинноволновом спектре ($q=0$, $c=c_g=cR$) – длинная поверхностная волна не замечая элементов структуры конечной толщины и, во-вторых, она обладает набором особых точек в средневолновом спектре для двух рассматриваемых систем: пластина-полупространство и пластина-слой-полупространство. причем, если в первом случае находится единственная такая точка - минимум, то во втором - их может быть три: минимум, максимум и точка перегиба.

Скорость роста резонансной волны среднего спектра оказывается меньше линейной: из-за дисперсии некоторая часть энергии, закачиваемой внешней нагрузкой, расходуется на нерестующие возмущения с параметрами спектра в расширяющейся со временем окрестности точки (q^*, c^*). В разделе 4, работы [5], приведены результаты компьютерного моделирования нестационарных задач, выявлен более интенсивный процесс развития резонансных волн в средневолновом спектре по сравнению с рэлеевским резонансом. Замкнутые аналитические формулы роста резонансных возмущений, получены в разделе 5, работы [5] с использованием моделей простых конструкций, обладающие в средневолновой зоне дисперсионными свойствами сходными с теми, что имеет структурно неоднородное полупространство.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскую упругую динамическую задачу для системы: тонкая пластина-слой-полупространство. На внешней поверхности пластины ($y=0$), начиная с момента времени $t=0$, движется с постоянной скоростью V вдоль обеих направлений осей x , нормальное давление заданной амплитудой Q .

На рис. 1 показана геометрия системы. Используются следующие обозначения: H – ступенчатая функция Хевисайда, субиндексы 0, 1, 2 относятся к пластине, слою и полупространству соответственно; c_0 - скорость звука в пластине, ρ_j ($j=0,1,2$)-плотности, h ($j=0,1$)-толщины, субиндексы l и s , относятся к скоростям продольных и попе-

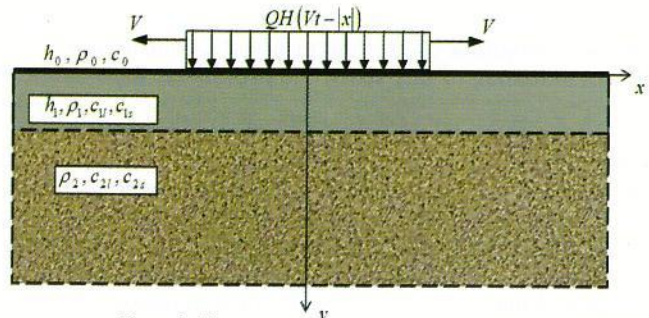


Рис.1. Рассматриваемая система: пластина-слой-полупространство

речных волн соответственно: c_{jl} и c_{js} ($j=1,2$).

Для описания движения слоя ($0 < y < h_1$) и полупространства ($y > h_1$) берутся уравнения плоской динами-

ческой теории упругости в перемещениях $(u_j(t, x, y))$ и $(w_j(t, x, y))$ продольные и поперечные перемещения в слое $(j=1)$ и полупространстве $(j=2)$, $w_j(t, x)$ – нормальное перемещение пластины):

$$\ddot{u}_j = c_{jl}^2 u_{j,xx}'' + c_{js}^2 u_{j,yy}'' + (c_{jl}^2 - c_{js}^2) w_{j,xy}'' \quad (1)$$

$$\ddot{w}_j = c_{jl}^2 w_{j,yy}'' + c_{js}^2 w_{j,xx}'' + (c_{jl}^2 - c_{js}^2) u_{j,xy}''$$

Движению пластины отвечает классическое уравнение изгиба (Бернулли):

$$y=0: \ddot{w} + c_0^2 (h_0^2/12) w_{xxxx}^{(iv)} = (P-R)/\rho_0 h_0 \quad (2)$$

где $P=QH(Vt-|x|)$ – движущаяся ступенчатая нагрузка, R – нормальная реакция слоя на изгиб пластины:

$$R(x,t) = \sigma_{yy}^{(1)}(x,0,t) = \rho_1 [E_{11}^2 w_{1,y}'' + (c_{11}^2 - 2c_{1s}^2) u_{1,x}'] \quad (3)$$

Все компоненты структуры жестко связаны, исключая продольный контакт между пластиной и слоем (или полупространством в системе: пластина- полупространство), который считается отсутствующим. Таким образом, выполняются следующие граничные условия склейки:

$$y=0: w(x,t) = w_1(x,0,t); \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 0$$

$$y=h_1: u_1 = u_2, w_1 = w_2, \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \quad (4)$$

Для определенности краевой задачи добавляются условия излучения на бесконечности:

$y \rightarrow \infty: u_2 \rightarrow 0, w_2 \rightarrow 0$ и наконец постулируются нулевые начальные условия:

$$t=0: u_{1,2} = w_{1,2} = 0, \dot{u}_{1,2} = \dot{w}_{1,2} = 0$$

Отметим, что введенная здесь бегущая нагрузка в виде разбегающейся ступеньки выбрана для удобства выполнения аналитических и численных процедур и нет принципиальных ограничений для задания типов источников, возникающих в практических задачах. Например, волна давления от воздушного взрыва в дальнем поле или отраженная от поверхности волна от землетрясения или подземного взрыва (метод суперпозиции может быть использован для расчета параметров нагрузки движущейся вдоль поверхности). Для нахождения дисперсионного уравнения рассмотрим стационарную задачу ($P=0$) для системы (1, 2, 3, 4), решение которой находится как суперпозиция Фурье- гармоник ($exp[iq(x \pm ct) - \zeta y]$), распространяющихся вдоль оси x и затухающих экспоненциально с ростом y (параметр затухания ζ вычисляется из Фурье-преобразованием исходных уравнений для полупространства). Используя граничные условия, получаем дисперсионное уравнение, связывающее фазовую скорость c , и волновое число q . Это уравнение трансцендентно, оно имеет громоздкую структуру и здесь не описано. Приведем его формальное выражение:

$$L(q, c; h_0, c_0, h_1, c_{11}, c_{21}, \rho_1, c_{21}, c_{2s}, \rho_2) = 0 \quad (5)$$

В общем случае получить аналитически из уравнения (5) искомое дисперсионное соотношение $c=c(q; \Sigma)$, где Σ – набор из девяти параметров, не представляется возможным, но удается сделать это численно, однако некоторая техническая сложность состоит в том, чтобы провести параметрический анализ полученных решений. Используя некоторые из параметров в качестве единиц измерения, набор свободных параметров может быть значительно уменьшен. Ниже приведены результаты расчета дисперсионных соотношений, позволяющие сделать качественные выводы при использовании минимального числа вариаций параметров Σ .

Дисперсионный анализ: Дисперсионный анализ уравнения (5) состоит в том, чтобы найти особые точки и исследовать поведение дисперсионных кривых в их окрестностях. Вначале рассмотрим дисперсионные свой-

ства системы тонкая пластина - полупространство, а затем системы тонкая пластина - слой - полупространство.

Тонкая пластина – полупространство. Рассматриваемая система является простым (одномодовым) случаем общей структуры. Для получения математической формулировки динамики этой системы достаточно приравнять параметры слоя и полупространства. Введем следующие обозначения: $c_1 = c_{11} = c_2, c_s = c_{1s} = c_{2s}, \rho = \rho_1 = \rho_2$. Тогда уравнение (5) записывается следующим образом:

$$\rho_0 q \sqrt{1-c^2} (c^2 - c_0^2 q^2/12) c^2 + c_s^4 L_R = 0, L_R = (2-c^2/c_s^2)^2 - 4\sqrt{1-c^2} \sqrt{1-c^2/c_s^2} \quad (6)$$

где: c_1, ρ and h_0 принимаются за единицы измерения. Здесь $L_R=0$ – уравнение Рэлея для свободного полупространства (его единственный вещественный корень $c=c_R$). Уравнение (6) имеет одну вещественную моду $c=c(q)$ при $c < c_s$. Если $q \rightarrow 0$ тогда $c \rightarrow c_R$ наличие пластины конечной жесткости и массы не сказывается на дисперсии длинной волны. Асимптотическое выражение для дисперсионного уравнения, полученное из (6). будет:

$$c = c_R [1 - \alpha \rho_0 q + 0(q^2)] \quad \alpha = 1/4 \sqrt{1-c_R^2} (c_R/c_s)^2 L_1^{-1} > 0, \quad (7)$$

$$L_1 = (1+c_s^2 - 2c_R^2) [1 - c_R^2/c_s^2] - 2 + c_R^2/c_s^2$$

Если q относительно мало и растет, фазовая скорость c линейно уменьшается с ростом q .

Темп падения c зависит от массы пластины и не зависит от ее жесткости. При дальнейшем увеличении q кривизна $c(q)$ уменьшается и при некотором значении q (особая точка) останавливается, дисперсионная кривая получает минимум ($q_m = q_m, c_m = c_m$), а затем с ростом q монотонно возрастает до $c=c_s$ (напомним, что реальные значения c существуют если $c \leq c_s$) (рис.2.).

Черные кружки на рис.2 являются особыми точками

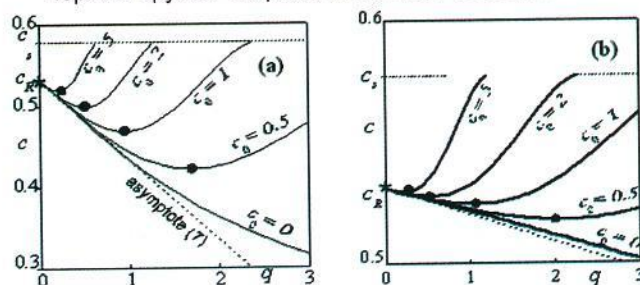


Рис.2. Дисперсионные кривые для системы: пластина-полупространство

(а) "тяжелая" пластина, $\rho_0 = 2$; (б) "легкая" пластина $\rho_0 = 0.5$

(минимумами) в спектре средних волн, а звездочка – особой точкой поверхностного резонанса Рэлея. Асимптота (7) совпадает с линейной частью всех кривых. Заметим, что здесь и в последующих примерах коэффициенты Пуассона для элементов системы одинаковы: $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, тогда $c_{1s} = c_{2s} / \sqrt{3} \approx 0.5774$ ($k=1,2$). Можно показать, что точки минимума находятся внутри верхних областей между двумя прямыми: асимптотой (7) и изгибной моды пластины $c = c_0 h q / \sqrt{12}$. Для вычисления координаты особой точки q_m, c_m получены следующие формулы:

$$(\rho_0/c_0) c_m^2 \sqrt{1-c_m^2} + \sqrt{3}/8 L_R(c_m) = 0, q_m = 2c_m/c_0 \quad (8)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае существуют две критические скорости: $V_{sp} = cR$ в низкочастотном спектре и $V_{sp} = cm$ в средневолновом спектре ($q=q_m$). Если аппроксимировать дисперсионную кривую в малой окрестности q_m зависимостью $c \approx c_m + \beta (q - q_m)^n$, β – константа, то чем больше индекс n (чем выше кривая в этой окрестности), тем слабее дисперсия, тем шире спектр длин волн, который формирует резонансные возмущения и тем ин-

тенсивнее их рост со временем. Как показано в [5], скорость роста резонансных волн асимптотически пропорциональна $t^{(n-1)/n}$ ($t \rightarrow \infty$), где: $n(n \geq 2)$ первое натуральное число, для которого $\partial^n c / \partial q^n \neq 0$. Поэтому в случае легкой и податливой пластины (относительно малые ρ_0 и $c0$) резонансные волны в средневолновом спектре можно ожидать более интенсивными. С другой стороны, с ростом $c0$ величина c_m приближается к cR , а q_m сдвигается в длинноволновую область. Этот факт говорит о возможности суперпозиции поверхностного резонанса ($V_{\omega} = c_R, q \rightarrow 0$) и изгибного резонанса в пластине ($V_{\omega} = c_m, q = q_m$), что может существенно увеличить уровень возмущений.

Тонкая пластина-слой-полупространство. Здесь, в отличие от предыдущего случая, существует бесконечное число корней (мод) дисперсионного уравнения соответствующих свободным волнам, распространяющихся в слое конечной толщины. Если $q \rightarrow 0$ то, как и в предыдущем случае $c \rightarrow c_{R2}$ скорости волн Рэлея в полупространстве. Если первая (нижняя) мода имеет действительные корни, тогда как корни высших мод могут быть действительными или комплексными в зависимости от соотношения между параметрами системы, в рассматриваемом случае существует набор специальных точек.

Длинноволновая $q \rightarrow 0$ асимптота дисперсионного уравнения (5) получена в следующем виде:

$$L = c_{2s}^4 L_{R2} + q \left[\rho_0 c^4 \sqrt{1-c^2} + \rho_1 h_1 \dot{O}(c_{1s}; c_{1s}, c_{2s}) \right] \quad (9)$$

где: Φ конечная функция. Принятые единицы измерения: ρ_2, c_{2s} и h_0 . Напомним, что $v_0 = v_1 = v_2 = 0.25$, тогда $cs/cl = 0.577$ и $cR = 0.92$. Теперь в задаче остаются только пять свободных параметров: $\rho_0, c_0, \rho_1, h_1, c_{1s}$.

Как и в предыдущем случае, скорость Рэлея является критической для относительно длинных волн: $V_{\omega} = c_{R2}(q \rightarrow 0)$. Жесткость пластины в формуле (9) отсутствует: она не влияет на длинноволновую асимптоту. Основное различие, которое вносит наличие слоя, состоит в том, что с ростом q от нуля скорость $c(q)$ в зависимости от параметров структуры может как уменьшаться, так и увеличиваться. Аналитические формулы для координат особых точек средневолнового спектра в рассматриваемом случае получить не удается, при этом численном решении дисперсионного уравнения.

Ниже, на рис. 3 (a, b, c) изображены кривые первых мод (a, b), рассчитанные для набора параметров структу-

ры, а четыре низшие моды можно видеть на рис. 3 c. Для относительно жесткого и тяжелого слоя ($\rho_1 > \rho_2, c_{1s} > c_{2s}$), первая мода имеет точки максимума и минимума в средневолновом спектре.

В примере для более легкого ($\rho_1 < \rho_2$) и более податливого ($c_{1s} < c_{2s}$) слоя - рис.3 c кривые первой и второй мод имеют точки максимума и минимума, а в третья мода - точку перегиба с касательной, параллельной оси q . Наличие у различных мод особых точек в узком участке спектра и при близких значениях критических скоростей говорит о возможности наложения различных резонансных форм.

Нестационарная задача. Развитие резонансных волн. Тонкая пластина - полупространство. Рассмотрим задачу о резонансном возбуждении системы, когда поверхностная нагрузка движется с критическими скоростями $V = c_R$ и $V = c_m$. Прямое численное моделирование проводится с помощью явных конечно-разностных алгоритмов с использованием специального метода минимизации численной дисперсии, первоначально описанного в [10]. Метод позволяет рассчитывать длинные и коротковолновые компоненты с одинаковой точностью на однородной разностной сетки.

На рисунке 4 показана начальная стадия формирования резонансной волны в системе при двух критических скоростях движения ступенчатой нагрузки: $V = cR$ и $V = c_m$. Представленные кривые - это зависимости нормированной нормальной реакции R/Q в некоторых сечениях на поверхности $y = 0$, единицы измерения: h_0, c_0, ρ_0 . Можно видеть четкое различие между двумя рассмотренными случаями: (а) сильный рост и фиксированная частота изгибного резонанса при $V = c_m$, в то время как более слабый рост и уменьшающаяся частота регистрируются со временем, если $V = cR$.

Такие особенности можно частично предугадать по поведению дисперсионных кривых в окрестностях особых точек: в окрестности точки минимума (q_m, c_m) дисперсионная кривая заметно выполаживается или, другими словами, дисперсия уменьшается и следовательно, скорости, а рост резонансных возмущений увеличивается. Напротив относительно сильной дисперсией характеризуется окрестность особой точки, соответствующей резонансу Рэлея ($q=0, c=cR$).

Эти оценки имеют локальный характер и не претендуют на общность: в начале волнового процесса пробле-

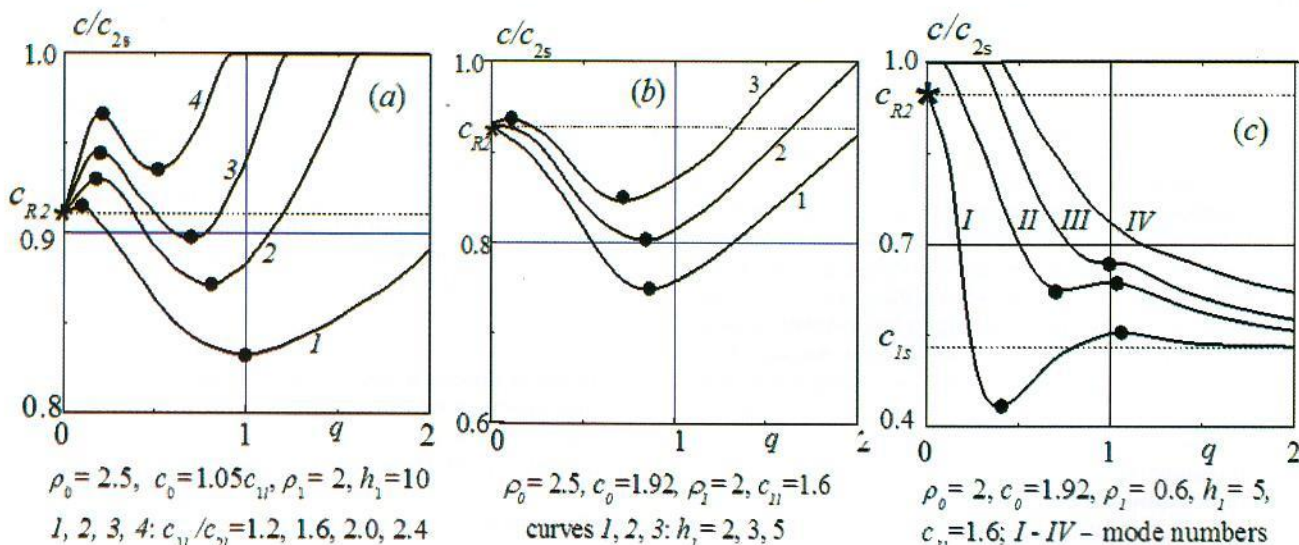


Рис.3. Дисперсионные кривые в системы: тонкая пластина-слой-полупространство

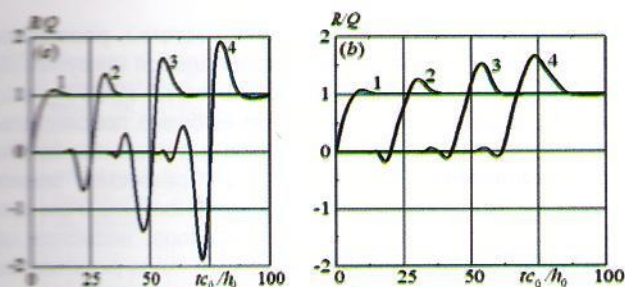


Рис.4. Формирование резонансных волн в системе пластина-полупространство

$\rho_2 = 0.4; c_{21} = 1$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям $x=0, 10, 20, 30$. (а): $V=c_m=0.48$, (б): $V=cR=0.53$.

матично установить общие характеристики распространения нестационарных возмущений. В разделе 5, работы [5] построены аналитические решения, позволяющие выделить физические следствия, представляющие интерес.

Тонкая пластина - слой - полупространство. Резонансные возмущения подобные описанным фиксируются и в этой более сложной системе. На рисунке 5 показаны результаты расчета проведенные для относительно жесткого

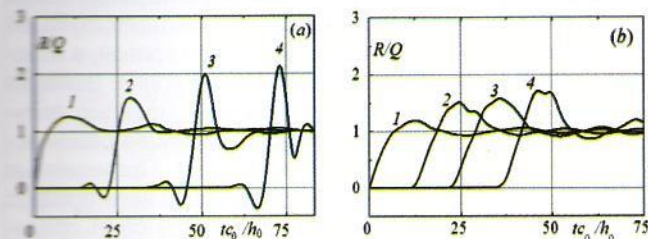


Рис.5. Формирование резонансных волн в системе пластина-полупространство

$h_1 = 5, \rho_1 = 1.25, c_{11} = 1, \rho_2 = 0.4, c_{21} = 0.4$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям $x=0, 10, 20, 30$. (а): $V=c_m=0.45$, (б): $V=cR=0.58$.

и тяжелого полупространства. Видно, что в случае изгибного резонанса ($V=c_m$), рост возмущений более выражен.

Упрощенные модели: К сожалению, получение аналитических решений для резонансных волн в рассматриваемых системах проблематично. Однако подобные решения могут быть найдены на основе хорошо известного подхода, в котором исходная сложная структура заменяется упрощенной моделью, обладающей близкими спектральными свойствами в окрестности особой точки. Этот подход применим к изгибным резонансным возмущениям, где интерес представляет узкий спектр, окружающий особую точку. С этой целью ниже рассмотрены две простые модели: (а) тонкая пластина на упругом основании и (б) та же система, дополненная равномерно распределенными инерционными массами, связанными с пластиной, без инерционных упругих пружин (точек Рэлея в этих моделях нет).

Единицы измерения для этих двух моделей будут параметры пластины: h, c, ρ , другие параметры систем указаны на рисунке 6: (а) единственный свободный параметр, g - жесткость упругого основания модель и (б) три свободных параметра g - жесткость упругого основания, G - жесткость связи пластины с амортизированной средой, и ее масса M .

Безразмерные уравнения, описывающие динамику упрощенных моделей, под действием движущейся наг-



Рис.6. Упрощенные системы

рузки, имеют вид:

$$(a) \quad \ddot{w} + (1/12)w_x^{(IV)} = P - R, \quad R = g_0 w;$$

$$(b) \quad \ddot{w} + (1/12)w_y^{(IV)} = P - R, \quad R = gw + G(w - W), \quad (10)$$

$$MW - G(w - W) = 0$$

где: $P = QH(Vt - |x|)$ - внешняя движущаяся нагрузка, R - реакция упругого основания-модель (а), суммарная реакция упругого основания и амортизированной среды-модель (б). Дисперсионные уравнения типа (5) для этих моделей имеют следующий вид:

$$(a) \quad L(q, c, g) = q^4 / 12 - q^2 c^2 + g = 0, \quad (11)$$

$$(b) \quad L(q, c, g, G, M) = [q^4 / 12 - q^2 c^2 + g + G][G - Mq^2 c^2] - G^2 = 0 \quad (12)$$

В случае системы (а) существует единственная особая точка - минимум, $q_m = (12g)^{1/4} \cdot c_m = (g/3)^{1/4}$. На рис.7 изображены дисперсионные кривые, рассчитанные по уравнению (11) при нескольких значениях жесткости g .

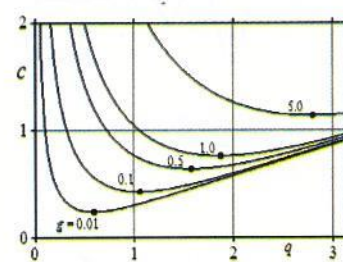


Рис.7. Дисперсионные кривые для модели (а)

Как показали расчеты, модель (б) может иметь от одной (минимум) до трех (минимум, максимум и перегиб) особых точек в зависимости от значений параметров структуры. Варьируя свободными параметрами уравнения (11) находятся

такие, при которых наблюдается максимальная близость дисперсионных кривых исходной и упрощенной модели в окрестностях особых точек. Такая процедура может быть проведена, например, с помощью метода наименьших квадратов. Понятно, что возможность максимального сближения спектров дисперсии исходной и приближенной модели существенно выше у модели (б) с тремя свободными параметрами чем, у модели (а). Тем не менее ниже рассмотрена только модель (а) с целью построения замкнутого аналитического решения исследуемой задачи.

Асимптотика изгибного резонансного процесса: Асимптотическое решение приведенное ниже строится на основе метода Слепяна [5], в котором двойное преобразование Лапласа-Фурье по времени и пространству приводится к преобразованию Лапласа на луче $x = V_{об}t$ с дальнейшим асимптотическим обращением двойных изображений Лапласа-Фурье в окрестности $q=q_m$ (волновое число q является параметром преобразования Фурье) и для больших значений времени: $t \rightarrow 0$ (которые соответствуют асимптотическому условию $s \rightarrow 0$ в изображениях Лапласа-Фурье, где s - параметр преобразования Лапласа).

Ниже опуская громоздкие математические вычисления приводятся окончательные асимптотические формулы решения уравнения (10.а):

$$w(x, t) = \frac{\sqrt{t}}{\pi q_m^2 c_m (1 - c_m^2) \sqrt{\varphi}} [F_1(k) \cos \eta q_m + F_2(k) \sin \eta q_m]$$

$$F_1(k) = \int_0^{\infty} \frac{\sin z^2 \cos kz dz}{z^2}, \quad F_2(k) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos z^2) \cos kz dz}{z^2}, \quad (13)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(q \frac{\partial^2 c}{\partial q^2} \right)_{q=q_m} \neq 0, \quad k = \frac{\eta}{\sqrt{\varphi t}}, \quad \eta = c_m t - x.$$

где: η - стационарная фаза бегущей волны. В окрестности этой фазы происходит рост резонансных возмущений, пропорциональный \sqrt{t} ; осциллирующий процесс

описывается суммой огибающих F_1 и F_2 с несущей резонансной частотой $\omega_m = c_m q_m$. Интегралы F_1 и F_2 имеют следующие аналитические выражения:

$$F_1(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(\frac{k^2}{4}\right) + \sin\left(\frac{k^2}{4}\right) \right] - \frac{\pi}{2} k \left[C\left(\frac{k^2}{4}\right) - S\left(\frac{k^2}{4}\right) \right],$$

$$F_2(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(\frac{k^2}{4}\right) - \sin\left(\frac{k^2}{4}\right) \right] - \frac{\pi}{2} k \left[1 - C\left(\frac{k^2}{4}\right) - S\left(\frac{k^2}{4}\right) \right] \quad (14)$$

где: $C(\cdot)$ и $S(\cdot)$ интегралы Френеля. Графические изображения F_1 и F_2 показаны на рис.8.

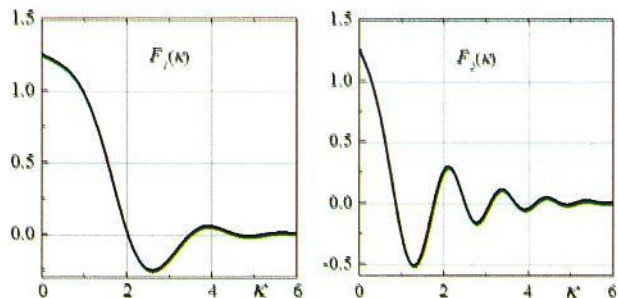


Рис.8. Огибающие резонансных волн

Эти огибающие являются квазистационарными [5], и полученное решение верно в окрестности стационарной фазы $\eta = c_m t - x$, которая распространяется со временем пропорционально \sqrt{t} . Ниже представлено компьютерное решение уравнения (10, а) в случае $g=0,01$ (тогда, $q_m = 0.5771$, $c_m = 0.2295$). Для численного решения использована явная конечно-разностная схема вместе с методом минимизации численной дисперсии [10]. Сравнение ос-

циллограмм в различных сечениях системы, рассчитанные при резонансной скорости движущейся нагрузки: (b) $V=V_{kp} = c_m$, и при близких к ней скоростях: (a) $V=0,9V_{kp}$, и (c) $V=1,1V_{kp}$ (направление оси у вниз выбрано положительным). Отметим, что квазистатистическим решением задачи будет выражение $w = (Q/g)H(Vt-x)$. Сравнивая осциллограммы, можно видеть принципиальное различие для резонансных и нерезонансных процессов, несмотря на небольшую разность скоростей V . Сравнение результатов вычислений и асимптотического уравнения (13) показывает, что асимптотическое решение оказывается практически точным для сечений $x \geq 25h$.

Выводы. Изучение волноводных свойств системы пластина-слоистое полупространство позволило определить наличие особых точек на дисперсионных кривых. Количество их зависит от неоднородности системы. Во всех случаях существует особая точка в области длинных волн и критическая скорость нагрузки равна скорости волн Релея в полупространстве. В средневолновой части спектра в зависимости от неоднородности может существовать одна особая точки – точка минимума, или две – точки минимума и максимума. Если скорость движущейся нагрузки равняется фазовой скорости, соответствующей ординате особой точки на дисперсионной кривой, в пластине развивается резонансная изгибная волна. Заменяя рассматриваемую систему упрощенной моделью получено асимптотическое решение описывающее резонансную волну, которая растет со временем. Проведенные численные расчеты позволили проследить весь процесс развития резонансных изгибных волн и установить пределы применимости асимптотического решения.

№	Литература	References
1	Goldshtein R.V. Rayleigh waves and resonance phenomena in elastic bodies. Appl. Mech. 1965, 29 (3), Pp.516-526.	Goldshtein R.V. Rayleigh waves and resonance phenomena in elastic bodies. Appl. Mech. 1965, 29 (3), Pp.516-526.
2	Слепян Л.И. Резонансные явления в пластинах и оболочках. VI Всесоюзная конф. Теория пластин и оболочек, – Москва: Наука, 1966. – С. 225-227.	Slepyan L. I. <i>Rezonansnye yavleniya plastinakh i obolochkakh</i> [Resonance phenomena in plates and shells under moving loads]. The 6th All-Union Conf. Theory of Plates and Shells. Moscow, Nauka, 1966 Pp. 225-227. (in Russian)
3	Айзенберг М.В. О резонансных волнах в полом цилиндре. Изв. АН СССР. МТТ-1969, №1. – С.84-90.	Ayzenberg M V: <i>O rezonansnykh volnakh v polom tsilindre</i> [Resonance waves in a hollow cylinder]. Mechanics of Solids 1969, No1, Pp.84-90. (in Russian)
4	Айзенберг М.В., Слепян Л.И. Резонансные волны в полом цилиндре, погруженной в сжимаемую жидкость. Всес.симп. Нестационарные процессы в пластинах и оболочках, – Таллин, 1967. – С. 59-63	Ayzenberg M V, Slepyan L I: <i>Rezonansnye volny v polom tsilindre, pogruzhennoy v szhiaemuyu zhidkost</i> [Resonance waves in a hollow cylinder immersed into a compressible liquid]. All-Union Symp. Transient Processes in Plates and Shells. Tallinn (1967), Pp.59-63 (in Russian).
5	Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Ленинград: Судостроение, 1971. – 376 с.	Slepyan L I: <i>Nestatsionarnye uprugiy volny</i> [Non-steady-state elastic waves]. Sudostroenie, Leningrad, 1971, 376 p. (in Russian).
6	Александрова Н.И., Поташников И.А., Степаненко М.В. Изгибные резонансные волны в цилиндрической оболочке при действии радиально приложенной движущейся нагрузки. ПМ, 1989, 19(3). – С.132-137.	Alexandrova N I, Potashnikov I A, Stepanenko M.V: <i>Izhibnye rezonansnye volny v tsilindricheskoy oboochki pri deystvii radialno prilozhennoy dvizhushchey nagruzki</i> [Flexural resonant waves in a cylindrical shell under moving radial loading]. J. Appl. Mech. Techn. Phys. 1989. 19(3) Pp.132-137. (in Russian).
7	Ouyang H, Mottershead J E: 'A numerical-analytical combined method for vibration of a beam excited by a moving flexible body'. Numer. Meth. Engng. 2007 72 (10). Pp.81–91.	Ouyang H, Mottershead J E: 'A numerical-analytical combined method for vibration of a beam excited by a moving flexible body'. Numer. Meth. Engng. 2007 72 (10). Pp.81–91.
8	Абдукадиров С.А. Поверхностные резонансные волны в слоистой среде. ДАН УзССР. – Tashkent, 1983, – №3. – С.18-20.	Abdukadirov S.A. <i>Poverkhnochnye rezonansnye volny v sloistoy srede</i> [Surface resonant waves in a layered medium] DAN UzSSR. Tashkent. 1983, No3, Pp.18-20. (in Russian)
9	Абдукадиров С.А. Нестационарная задача о действии подвижной нагрузки на слой, лежащей на полуплоскости. ДАН УзССР. – Tashkent, 1984. №2. – С.19-22.	Abdukadirov S.A. <i>Nestatsionarnaya zadacha o deystvii podvizhnoy nagruzki na sloy, lezhashchey na poluploskosti</i> [Non-stationary problem of the action of a moving load on a layer lying on a half-plane]. DAN UzSSR. Tashkent. 1984, No2, Pp.19-22. (in Russian).
10	Zibdeh H S, Abu-Alshaikh I: Vibration response of a beam with different appendages subjected to a moving system, Int. J. of Vehicle Noise and Vibr. 2008 4 Pp.93–106.	Zibdeh H S, Abu-Alshaikh I: Vibration response of a beam with different appendages subjected to a moving system, Int. J. of Vehicle Noise and Vibr. 2008 4 Pp.93–106.

11	Ouyang H: "Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)" Mechanical Systems and Signal Processing 2011, 25 (6), Pp.49-60.	Ouyang H: "Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)" Mechanical Systems and Signal Processing 2011, 25 (6), Pp.4-60.
12	Naga P, Eatherton MR: 'Analyzing the effect of moving resonance on seismic response of structures using wavelet transforms'. Earthquake Engng & Struct. Dyn. 2014 43 (5) Pp. 59-68.	Naga P, Eatherton MR: 'Analyzing the effect of moving resonance on seismic response of structures using wavelet transforms'. Earthquake Engng & Struct. Dyn. 2014 43 (5) Pp. 59-68.
13	Mirsaidov, M.M., Sultanov, T.Z. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2013. 49(6), Pp.250-256. DOI: 10.1007/s 11204-013-9198-8	Mirsaidov, M.M., Sultanov, T.Z. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2013. 49(6), Pp.250-256. DOI: 10.1007/s11204-013-9198-8. (in Russian)
14	Abdukadirov S: "Influence of an elastic medium on resonance waves in a layer." Proc. of All-Union Conf: Applied Problems of Strength and Plasticity. Gorki University, Gorki, 1980.	Abdukadirov S.A. "Influence of an elastic medium on resonance waves in a layer." Proc. of All-Union Conf: Applied Problems of Strength and Plasticity. Gorki University, Gorki, 1980.
15	Abdukadirov S.A., Stepanenko M: "On peculiarities of the propagation of harmonic waves in a plane layer in contact with an elastic medium". J. Mining Science 1979 No5 Pp.453-462.	Abdukadirov S.A., Stepanenko M: "On peculiarities of the propagation of harmonic waves in a plane layer in contact with an elastic medium". J.Mining Science 1979 No5. Pp.453-462.
16	Abdukadirov S: "Low-frequency resonance waves in a cylindrical layer surrounded by an elastic medium". J. Mining Science 1980. No3, Pp.43-47.	Abdukadirov S: "Low-frequency resonance waves in a cylindrical layer surrounded by an elastic medium". J. Mining Science 1980 No3, Pp. 43-47.
17	Ayzenberg-Stepanenko M V: "Resonances in elastic waveguides". 25 th Israel Conf. Mech. Engng.,Technion, Haifa, 1994. 25 p.	Ayzenberg-Stepanenko M V: "Resonances in elastic waveguides". 25 th Israel Conf. Mech. Engng.,Technion, Haifa, 1994. 25 p.
18	Абдукадилов С.А. Низкочастотные резонансные волны в цилиндрическом слое, окруженной упругой средой. ФТ-ПРПИ, – Москва, 1980, – No3, – С.43-47.	Abdukadirov S.A. <i>Nizkochastotnye rezonansnye volny v tsilindricheskom sloe, okruzhennoy uprugoy sredoy</i> [Low-frequency resonance waves in a cylindrical layer surrounded by an elastic medium]. J. Mining Science 1980 No3, Pp.43-47. (in Russian)
19	Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z.,Rumi, D.F. An assessment of dynamic behavior of the system "structure - Foundation" with account of wave removal of energy. Magazine of Civil Engineering.2013. 39(4), Pp. 94-105 . DOI: 10.5862/MCE.39.10	Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z.,Rumi, D.F. An assessment of dynamic behavior of the system "structure - Foundation" with account of wave removal of energy. Magazine of Civil Engineering.2013. 39(4), Pp.94-105. DOI: 10.5862/MCE. 39.10
20	Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A., Mirsaidov M.M. The assessment of dynamic behavior of heterogeneous systems taking into account non-linear viscoelastic properties of soil. Magazine of Civil Engineering. 2014. 45(1), Pp. 80-89+117-118. DOI: 10.5862/ MCE.45.9	Sultanov T.Z., Khodzhaev D.A., Mirsaidov M.M. The assessment of dynamic behavior of heterogeneous systems taking into account non-linear viscoelastic properties of soil. Magazine of Civil Engineering. 2014. 45(1), Pp. 80-89+117-118. DOI: 10. 58 62 /MCE.45.9
21	Мирсаидов М., Султанов Т.З., Юлдошев Б.Ш. Оценка динамики грунтовых плотин при многокомпонентном кинематическом воздействии. ТИИИМСХ–Ташкент: // Журнал "Irrigatsiya va melioratsiya". – Ташкент. Специальный выпуск. 2018. – С.24-29.	Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Yuldoshev B. Sh. <i>Otsenka dinamiki gruntovykh plotin pri mnogokomponentnom kinematicheskoy vozdeystvii</i> . TIAME. [Evaluation of the dynamics of earth dams under multicomponent kinematic effect]. Journal "Irrigatsiya va melioratsiya". Tashkent. Special number. 2018. Pp. 24-29. (in Russian)
22	Koltunov M.A Mirsaidov M. Troyanovskii I.E. Transient vibrations of axisymmetric viscoelastic shells. Polymer Mechanics. 1978/3/1. Vol.14, Iss.2, Pp. 233-238. DOI: 10.1007/BF0085746.	Koltunov M.A Mirsaidov M. Troyanovskii I.E. Transient vibrations of axisymmetric viscoelastic shells. Polymer Mechanics. 1978/3/1. Vol.14, Iss.2, Pp. 233-238. DOI: 10.1007/BF0085746.
23	Абдикаримов Р А, Ходжаев Д А, Нормуминов Б А, Мирсаидов М М. Исследование параметрических колебаний вязкоупругой цилиндрической панели переменной толщины. Вестник МГСУ. 2018. Vol.13, Iss.11(122). Pp. 1315-1325. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.11.c.1315-1325	Abdikarimov R.A., Zhgutov V.M, Khodzhaev D.A, Normuminov B.A. Mirsaidov M.M. <i>Issledovanie parametricheskikh kolebaniy vyaskoupugoy tsilindricheskoy paneli peremennoy tolshchiny</i> . Vestnik MGSU. 2018. Vol.13, Iss.11(122). Pp. 1315-1325. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.11.1315-1325. (in Russian)
24	Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Vatin N, Zhgutov V.M, Khodzhaev D.A, Normuminov B.A. Nonlinear parametric oscillations of viscoelastic plate of variable thickness. MAGAZINE OF CIVIL ENGINEERING. 2018/1/1. Vol.82, Iss.6. Pp.112-126.	Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Vatin N, Zhgutov V.M, Khodzhaev D.A, Normuminov B.A. Nonlinear parametric oscillations of viscoelastic plate of variable thickness. MAGAZINE OF CIVIL ENGINEERING. 2018/1/1. Vol.82, Iss.6. Pp. 112-126.
25	Mirsaidov M., Troyanovskii I.E. Forced axisymmetric oscillations of a viscoelastic cylindrical shell. Polymer Mechanics. Vol.11, Iss.6, Pp. 953-955. DOI: 10.1007/BF00857626	Mirsaidov M., Troyanovskii I.E. Forced axisymmetric oscillations of a viscoelastic cylindrical shell. Polymer Mechanics. Vol.11, Iss.6, Pp. 953-955. DOI: 10.1007/BF00857626
26	Мирсаидов М., Султанов Т.З. Оценка динамической прочности грунтовых плотин с учетом нелинейного деформирования. ТИИИМСХ. – Ташкент: «Адабиёт учқунлари», 2018. – 258 с.	Mirsaidov M., Sultanov T.Z. <i>Otsenka dinamicheskoy prochnosti gruntovykh plotin s uchetom nelineynogo deformirovaniya</i> . TIAME. Tashkent. [Evaluation of Dynamic Strength of Earth Dams under Nonlinear Strain] Tashkent: "Adabiyot uchqunlari", 2018. 258 p. (in Russian)