

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ  
МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУХАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ**

---

**“ДЕФОРМАЦИЯЛАНУВЧАН ҚАТТИҚ ЖИСМЛАР  
МЕХАНИКАСИ”**

**МАВЗУСИДАГИ РЕСПУБЛИКА ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАН**

**МАЪРУЗАЛАР Тўплами**

**I -ЖИЛД**

**СБОРНИК ДОКЛАДОВ**

**РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

**“МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО  
ТВЕРДОГО ТЕЛА”**

**ТОМ-I**

**Тошкент шаҳри. 2018 йил 25 октябрь**

определяемые структурой. Полученные асимптоты решений дисперсионных уравнений показывают, что рэлеевский резонанс существует только у длинных волн. Решения дисперсионных уравнений в средневолновом спектре позволяют в зависимости от параметров структуры определить дополнительные критические скорости. В нестационарной постановке получены численные решения, позволяющие проследить развитие резонансных возмущений. Анализируются модели простых конструкций, имеющие в средневолновой зоне дисперсионные свойства сходные с таковыми для рассматриваемой структуры: (а) тонкая пластина на упругом основании и (б) предыдущая модель с присоединенной инерционной средой упруго связанной с пластиной. Для этих моделей получены аналитические решения развития резонансных процессов асимптотически верные при относительно больших значениях времени. Параллельно проведенное компьютерное моделирование позволяют проанализировать количественные особенности процесса на всем временном отрезке действия нагрузки. Численные и асимптотические результаты сравниваются с целью выявить рамки применимости асимптотического решения в практических задачах.

**Ключевые слова:** волноводные свойства системы, дисперсия волн, фазовая скорость, групповая скорость, критическая скорость нагрузки, асимптотическое решение, изгибные резонансные волны.

## ҲАРАКАТЛАНУВЧИ КУЧ ТАЪСИРИДА ҚАТЛАМЛИ ЯРИМ ФАЗОДА ЁТУВЧИ ПЛАСТИНКАДАГИ РЕЗОНАНС ТЎЛҚИНЛАР

С.А.Абдукадиров\*, физика-математика фанлари номзоди, доцент,

\*Тошкент архитектура-қурилиш институти

М.В.Айзенберг-Степаненко\*\*, техника фанлари доктори, профессор,

\*\*Негеведаги Бен-Гуриона номидаги университет, Исроил,

Б.Ш.Юлдошев\*\*\*, PhD, доцент,

\*\*\*Тошкент ирригация ва қишлоқ хўжалигини механизациялаш мухандислари институти,

Тошкент, Ўзбекистон, +998(71)237-09-81; эл. почта: [theormir@mail.ru](mailto:theormir@mail.ru)

**Аннотация.** Қатламли ярим фазода ётувчи эластик пластинада тўлқин тарқалиши жараёнлари ўрганилади. Ташқи куч пластина сирти бўйлаб ҳаракатланади. Стационар кўринишда системада тўлқин тарқалиш хусусиятлари аниқланади. Дисперсион тенгламаларнинг карралаи илдизлари аниқланди ва ташқи кучнинг пластинада резонанс жараёнларини шаклланишига олиб келувчи хавфли тезликлари топилди. Бир жинсли ярим фазода ташқи куч Рэлей тўлқинлари тезлиги билан ҳаракатланганда содир бўладиган маълум резонанс жараён билан биргаликда кўрилаётган системада унинг структураси билан боғлиқ кўшимча резонанслар содир бўлиши мумкин. Дисперсион тенгламалардан келтириб

чиқарилган асимптотик ечим шуни кўрсатадики, Рэлей резонанс тўлқинлари фақат узун тўлқинлар учун мавжуд бўлади. Дисперсион тенгламаларнинг ўрта тўлқинли спектрдаги ечимлари, системанинг структурасига боғлиқ кучнинг қўшимча хавфли тезликларини аниқлаш имконини беради. Масалани ностационар қўйилишида олинган сонли ечимлар резонанс тўлқинларнинг ривожланишини кузатиш имконини берди. Ўрта тўлқинли спектрда кўрилаётган структурага дисперсион хусусиятлари ўхшаш бўлган оддий конструкциялар моделлари таҳлил қилинади: а) эластик асосдаги юпқа пластина ва б) олдинга моделга қўшимча пластина инерцион масса билан эластик бириктирилган. Бу моделлар учун вақтнинг катта қийматларида асимптотик тўғри бўлган резонансли жараённи кўрсатувчи аналитик ечимлар олинди. Компьютерда параллел равишда ўтказилган моделлаштириш ҳаракатланувчи кучнинг таъсир қилувчи чекли вақтдаги жараённи таҳлил қилиш имконини берди. Амалий масалаларда асимптотик ечимларнинг қўлланиш чегарасини аниқлаш мақсадида сонли ва асимптотик натижалар таққосланади.

**Калит сўзлар:** тизимнинг сув тўлқинли хусусиятлари, тўлқинлар дисперсияси, фазали тезлик, гурухли тезлик, юкламанинг хавфли тезлиги, асимптотик ечим, букилма резонансли тўлқинлар.

## RESONANT WAVES IN A PLATE LAYING ON A LAYERED HALF-SPACE UNDER THE EFFECT OF MOVING LOAD

*S.A.Abdukadirov\**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
\*Tashkent Institute of Architecture and Construction

*M.V.Aizenberg-Stepanenko \*\**, Doctor of Technical Sciences, Professor,  
\*\*Ben-Gurion University in Negev, Israel,

*B.Sh. Yuldoshev\*\*\**, PhD, Associate Professor,

\*\*\*Tashkent Institute of Engineers of Irrigation and Mechanization in Agriculture, Tashkent, Uz-  
bekistan, +998 (71) 237-09-81; e-mail: [theormir@mail.ru](mailto:theormir@mail.ru)

**Abstract.** Development of resonant waves is examined when the seismic wave moves along the free surface of elastic half-space covered by elastic plate. Such systems are simple mathematical models of dense ground or underground constructions. A plane problem is considered. In steady-state formulation, waveguide properties of the system are analyzed. Multiple roots are revealed of dispersion equations obtained, and related critical velocities of the external seismic wave are established exciting in the system the growing perturbations. It is shown that together with the well-known surface resonance developing in a free halfspace under the action of the moving wave of the

Rayleigh's speed, a set of additional resonances appear depending on parameters of structured half-space. In the unsteady-state formulation, asymptotical solutions are obtained determining the qualitative picture of the process developed with time: the growth rate (at  $t \rightarrow \infty$ , is time) and the spectrum saturation of corresponding resonant perturbations. Performed computer simulation enables quantitative features of the process to be explored over a finite time interval. Numerical and asymptotic results are compared to reveal the range of the asymptotic solution acceptability. In distinction to the resonance developed in a free half-space, the growth rate in the observed system turns out less than the linear: due to dispersion, some part of the energy pumped in by the acting wave is diverted with time for waves of limited amplitudes.

**Keywords:** waveguide properties of systems, dispersion of waves, phase velocity, group velocity, critical velocities loads, asymptotical solutions, flexural resonance waves.

**Введение:** Изучение динамических свойств упругих тел и конструкций, подверженных действию движущихся нагрузок, имеет большую и богатую историю. Вместе с естественным научным интересом к проблеме «переходные волновые процессы в структурно неоднородных твердых телах» эта задача имеет очевидные практические применения, связанные с актуальными проблемами геофизики, геодинамики, проектирования и эксплуатации взлетно-посадочных полос, строительства мостов и т.д. Особый внимание в этой проблематике привлекают резонансные процессы, возбуждаемые нагрузками, движущимися с критическими скоростями.

Изучение резонансных явлений, началось с рассмотрения однородных тел и сред. Начало была положена в работе [1], где решалась плоская задача для свободного полупространства и поверхностной нагрузки, движущейся с рэлеевской скоростью. Было показано, что во-первых, в этом случае стационарный предел решения отсутствует: во-вторых, скорости частиц и напряжения вблизи поверхности линейно возрастают. Затем были изучены различные аспекты резонансных волн для пластин (см. [2-5]). Особые точки на дисперсионных кривых в случае полого цилиндра были рассмотрены в [3-5], асимптотические и компьютерные решения изгибных резонансных волн получены в [6] для различных типов движущихся нагрузок.

Важно отметить, что основной вклад в теорию резонансных волн в твердых телах и конструкциях принадлежит Л.И.Слепяну (см. [5]). Действенным аналитическим инструментом при исследования резонансных процессов оказался разработанный им метод обращения двойных изображений Лапласа-Фурье в окрестности движущейся волны ( $x=ct$ ,  $c$ -скорост волны,  $t$ -время). Этот подход позволил получить асимптотические решения процессов (при больших значениях времени) в замкнутом виде. На основе этого метода в работах [3, 6-8] был исследован ряд задач включая практических приложения. Многочисленные аспекты задач с движущимися нагрузками, не затрагивающие, однако, резонансные волны можно найти в работы [9].

Несмотря на то, что процессы с движущимися нагрузками, изучались во многих источниках, задача поставленная в название этой работы, имеющая очевидное теоретическое и практическое значение, требует дальнейшего анализа. До сих пор было неясно, какого типа особые точки на дисперсионных кривых и каково их количество появляется в случае структур различного строения сколько их какие общие и отличительные особенности имеют релевский и средневолновый резонансные процессы? Какой из них опаснее с точки зрения реакции рассматриваемой конструкции?

Эти и другие вопросы рассмотрены в настоящей работе. Ниже формулируются условия существования особых точек на дисперсионных кривых. Как известно (см.[5]), волновой резонанс формируется в районе фронта бегущей с критической скоростью нагрузки ( $V=V_{кр}$ ). Последняя совпадает с равными между собой фазовой  $c$ , и групповой  $c_g$ , скоростями в системе ( $V=c=c_g$ ): нагрузка, движущаяся со той же скоростью, с которой распространяется энергия стационарной волны, постоянно закачивает энергию внешней нагрузки внутрь системы, что приводит к резонансному росту возмущений со временем.

Точки на дисперсионных кривых, где фазовые и групповые скорости равны являются кратными корнями дисперсионного уравнения  $c=c(q)$ , где  $q$  – волновое число ( $q=2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны) мы называем особыми, обозначим их координаты  $q^*$ ,  $c^*=c(q^*)$ . Принимая во внимание связь фазовой и групповой скоростей,  $c_g=c+q(dc/dq)$ , видим, что равенство  $c_g=c$  говорит о наличии особых точек ( $i$ ) в длинноволновом спектре (точнее – в предельном случае бесконечно длинных волн  $q^*=0$ ,  $c^*=c(0)=c_R(0)$ ), и в средневолновом спектре (экстремальные точки фазовых кривых). Кроме того, существуют специальные точки и в случае бесконечно коротких волн, но мы их здесь не будем рассматривать, поскольку, как будет видно ниже, используемая модель Бернулли изгиба пластины не описывает короткие волны.

В настоящей работе показано (раздел 3), что рассматриваемая структура имеет, во-первых, особую точку в длинноволновом спектре ( $q=0$ ,  $c=c_g=c_R$ ) – длинная поверхностная волна ‘не замечая’ элементов структуры конечной толщины и, во-вторых, она обладает набором особых точек в средневолновом спектре для двух рассматриваемых систем: пластина-полупространство и пластина-слой-полупространство. причем, если в первом случае находится единственная такая точка - минимум, то во втором - их может быть три: минимум, максимум и точка перегиба.

Скорость роста резонансной волны среднего спектра оказывается меньше линейной: из-за дисперсии некоторая часть энергии, закачиваемой внешней нагрузкой, расходуется на нерестующие возмущения с параметрами спектра в расширяющейся со временем окрестности точки ( $q^*, c^*$ ).

В разделе 4, где приведены результаты компьютерного моделирования нестационарных задач, выявлен более интенсивный процесс развития резонансных волн в средневолновом спектре по сравнению с релеевским резонансом. Замкнутые аналитические формулы роста резонансных возмущений, получены в разделе 5 с использованием моделей простых конструкций, обладающие в средневолновой зоне дисперсионными свойствами сходными с теми, что имеет структурно неоднородное полупространство.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую упругую динамическую задачу для системы: тонкая пластина - слой - полупространство. На внешней поверхности пластины ( $y=0$ ), начиная с момента времени  $t=0$ , движется с постоянной скоростью  $V$  вдоль обеих направлений осей  $x$ : нормальное давление заданной амплитудой  $Q$ .

На рис. 1 показана геометрия системы. Используются следующие обозначения:  $H$ - ступенчатая функция Хевисайда, субиндексы  $0, 1, 2$  относятся к пластине, слою и полупространству соответственно;  $c_0$  - скорость звука в пластине.  $\rho_j$ , ( $j=0, 1, 2$ ) - плотности,  $h_j$  ( $j = 0, 1$ ) - толщины, субиндексы  $\ell$  и  $s$ , относятся к скоростям продольных и поперечных волн соответственно:  $c_{j\ell}$  и  $c_{js}$  ( $j = 1, 2$ ).

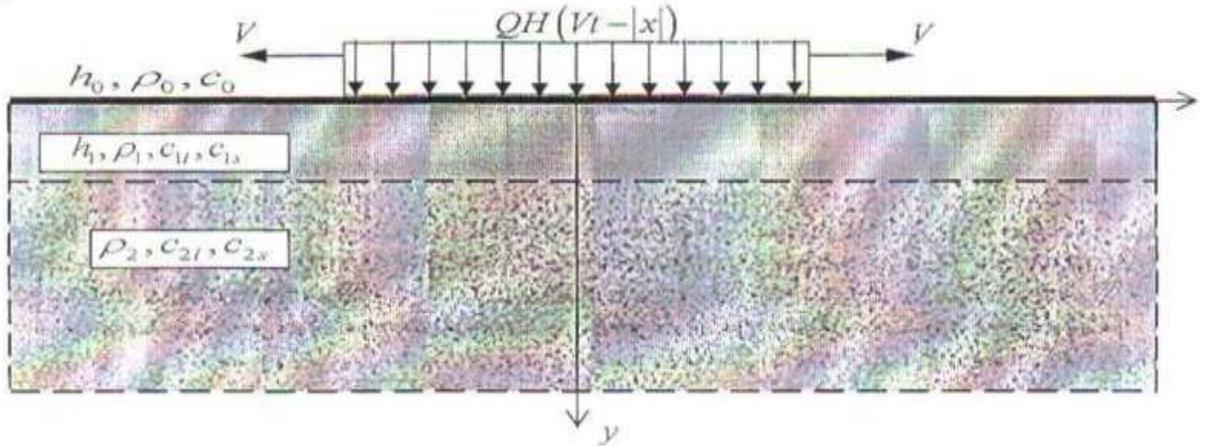


Рис. 1: Рассматриваемая система: пластина-слой полупространство

Для описания движения слоя ( $0 < y < h_1$ ) и полупространства ( $y > h_1$ ) берутся уравнения плоской динамической теории упругости в перемещениях ( $u_{1,2}(t, x, y)$  и  $w_{1,2}(t, x, y)$  – продольные и поперечные перемещения в слое (1) и полупространстве,  $w_0(t, x)$  – нормальное перемещение пластины):

$$\ddot{u} = c_{jl}^2 u_{j,xx}'' + c_{js}^2 u_{j,yy}'' + (c_{jl}^2 - c_{js}^2) w_{j,xy}'' , \quad (1)$$

$$\dot{w} = c_{jl}^2 w_{j,yy}'' + c_{js}^2 w_{j,xx}'' + (c_{jl}^2 - c_{js}^2) u_{j,xy}'' ,$$

а движению пластины отвечает классическое уравнение изгиба (Бернулли):

$$y = 0: \ddot{w} + c_0^2 (h_0^2 / 12) w_{xxx}^{(iv)} = (P - R) / p_0 h_0 , \quad (2)$$

где  $P = QH(Vt - |x|)$  - движущаяся ступенчатая нагрузка,  $R$  – нормальная реакция слоя на изгиб пластины:

$$R(x, t) = \sigma_{yy}^{(1)}(x, 0, t) = p_1 [c_{1l}^2 w_{1,y}' + (c_{1l}^2 - 2c_{1s}^2) u_{1,x}'] \quad (3)$$

Все компоненты структуры жестко связаны, исключая продольный контакт между пластиной и слоем (или полупространством в системе: пластина- полупространство), который считаются отсутствующим. Таким образом, выполняются следующие граничные условия склейки:

$$y = 0: w_1(x, 0, t) = \sigma_{xy}^{(2)} = 0; \quad (4)$$

$$y = h_1: u_1 = u_2, w_1 = w_2, \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} .$$

Для определенности краевой задачи добавляются условия излучения на бесконечности:

$$y \rightarrow \infty: u_2 \rightarrow 0, w_2 \rightarrow 0$$

И, наконец постулируются нулевые начальные условия:

$$t = 0: u_{1,2} = w_{0,1,2} = 0, \dot{u}_{1,2} = \dot{w}_{0,1,2} = 0 .$$

Отметим, что введенная здесь бегущая нагрузка в виде разбегающейся ступеньки выбрана для удобства выполнения аналитических и численных процедур и нет принципиальных ограничений для задания типов источников, возникающих в практических задачах. Например, волна давления от воздушного взрыва в дальнем поле или отраженная от поверхности волна от землетрясения или подземного взрыва (метод суперпозиции может быть использован для расчета параметров нагрузки движущейся вдоль поверхности).

Для нахождения дисперсионного уравнения рассмотрим стационарную задачу ( $P=0$ ) для системы (1) - (4), решение которой ищется как суперпозиция Фурье- гармоник ( $\exp[iq(x \pm ct) - \zeta y]$ ), распространяющихся вдоль оси  $x$  и затухающих экспоненциально с ростом  $y$  (параметр затухания  $\zeta$  вычисляется из фурье-преобразования исходных уравнений для полупространства). Используя граничные условия, получаем дисперсионное уравнение, связывающее фазовую скорости  $c$ , и волновое число  $q$ . Это уравнение трансцендентно. оно имеет громоздкую структуру и здесь не выписано. Приведем его формальное выражение:

$$L(q, c; h_0, c_0, h_1, c_{1l}, c_{2l}, p_1, c_{2s}, c_{2s}, p_2) = 0 \quad (5)$$

В общем случае получить аналитически из уравнения (5) искомое дисперсионное соотношение  $c=c(q; \Sigma)$ , где  $\Sigma$  - набор из девяти параметров, не представляется возможным, но удается сделать это численно. Однако некоторая техническая сложность состоит в том, чтобы провести параметрический анализ полученных решений. Используя некоторые из параметров в качестве единиц измерения, набор свободных параметров может быть значительно уменьшен. Ниже приведены результаты расчета дисперсионных соотношений, позволяющие сделать качественные выводы при использовании минимального числа вариаций параметров  $\Sigma$ .

### 3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализа уравнения (5) состоит в том, чтобы найти особые точки и исследовать поведение дисперсионных кривых в их окрестностях. Вначале рассмотрим дисперсионные свойства системы тонкая пластина - полупространство, а затем системы тонкая пластина - слой - полупространство.

**3.1 Тонкая пластина – полупространство. Рассматриваемая система является простым (одномодовым) случаем общей структуры. Для получения математической формулировки динамики этой системы достаточно приравнять параметры слоя и полупространства. Введем следующие обозначения:  $c_l = c_{1l} = c_{2l}$ ,  $c_s = c_{1s} = c_{2s}$ ,  $\rho = \rho_1 = \rho_2$ . Тогда уравнение (5) записывается следующим образом:**

$$\rho_0 q \sqrt{1-c^2} (c^2 - c_0^2 q^2 / 12) c^2 + c_s^4 L_R = 0, L_R = (2 - c^2 / c_s^2)^2 - 4 \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-c^2 / c_s^2} \quad (6)$$

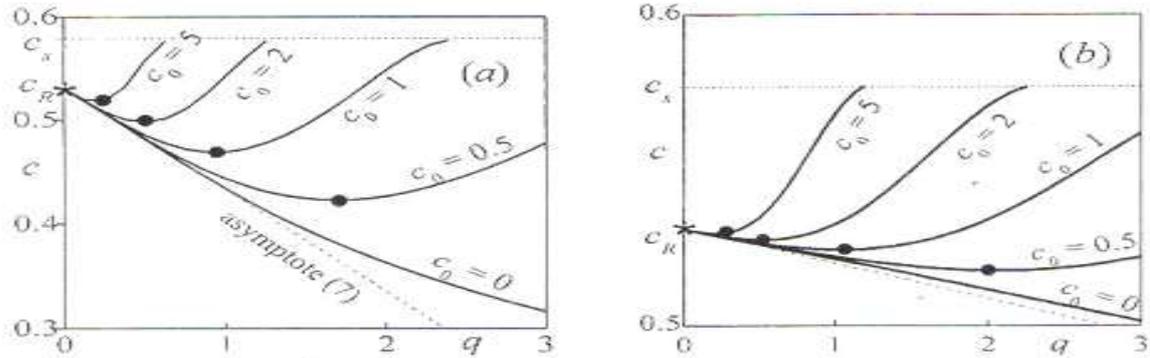
где  $c_l, \rho$  и  $h_0$  принимаются за единицы измерения. Здесь  $L_R=0$ - уравнение Рэлея для свободного полупространства (его единственный вещественный корень  $c=c_R$ ). Уравнение (6) имеет одну вещественную моду  $c=c(q)$  при  $c < c_s$ .

Если  $q \rightarrow 0$ , тогда  $c \rightarrow c_R$ : наличие пластины конечной жесткости и массы не сказывается на дисперсии длинной волны. Асимптотическое выражение для дисперсионного уравнения, полученное из (6). будет:

$$c = c_R \left[ 1 - \alpha \rho_0 q + O(q^2) \right], \alpha = 1/4 \sqrt{1-c_R^2} (c_R / c_s)^2 L_1^{-1} > 0, \quad (7)$$

$$L_1 = (1 + c_s^2 - 2c_R^2) \left[ (1 - c_R^2) (1 - c_R^2 / c_s^2) \right]^2 - 2 + c_R^2 / c_s^2$$

Если  $q$  относительно мало и растет, фазовая скорость  $c$  линейно уменьшается с ростом  $q$ . Темп падения  $c$  зависит от массы пластины и, наоборот, не зависит от ее жесткости пластины. При дальнейшем увеличении  $q$  кривизна  $c(q)$  уменьшается и при некотором значении  $q$  (особая точка) останавливается, дисперсионная кривая получает минимум ( $q_m = q_*$ ,  $c_m = c_*$ ). а затем с ростом  $q$  монотонно возрастает до  $c = c_s$  (напомним, что реальные значения  $c$  существуют если  $c \leq c_s$ ).



**Рис.2:** Дисперсионные кривые для системы: пластина-полупространство, (а) “тяжелая” пластина,  $\rho_0 = 2$ ; (б) “легкая” пластина  $\rho_0 = 0.5$ .

Черные кружки на рис.2 являются особыми точками (минимумами) в спектре средних волн, а звездочка - особой точкой поверхностного резонанса Рэлея. Асимптота (7) совпадает с линейной частью всех кривых. Заметим, что здесь и в последующих примерах коэффициенты Пуассона для элементов системы одинаковы:  $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ , тогда  $c_{ks} = c_{kl} / \sqrt{3} \approx 0.5774$  ( $k = 1, 2$ ). Можно показать, что точки минимума находятся внутри верхних областей между двумя прямыми: асимптотой (7) и изгибной моды пластины  $c = c_0 h q / \sqrt{12}$ . Для вычисления координаты особой точки  $q_m, c_m$  получены следующие формулы:

$$(\rho_0 / c_0) c_m^5 \sqrt{1 - c_m^2} + \sqrt{3/8} L_R(c_m) = 0, q_m = 2c_m / c_0 \quad (8)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае существуют две критические скорости:  $V_{кр} = c_R$  в низкочастотном спектре и  $V_{кр} = c_m$  в средневолновом спектре ( $q = q_m$ ). Если аппроксимировать дисперсионную кривую в малой окрестности  $q_m$  зависимостью  $c \approx c_m + \beta(q - q_m)^n$ ,  $\beta$  – константа, то чем больше индекс  $n$  (чем ближе кривая в этой окрестности), тем слабее дисперсия, тем шире спектр длин волн, который формирует резонансные возмущения и тем интенсивнее их рост со временем. Как показано в [5], скорость роста резонансных волн асимптотически пропорциональна  $t^{(n-1)/n}$  ( $t \rightarrow \infty$ ), где  $n$  ( $n \geq 2$ ) первое натуральное число, для которого  $\partial^n c / \partial q^n \neq 0$ . Поэтому в случае легкой и податливой пластины (относительно малые  $\rho_0$  и  $c_0$ ) резонансные волны в средневолновом спектре можно ожидать более интенсивными. С другой стороны, с ростом  $c_0$  величина  $c_m$  приближается к  $c_R$ , а  $q_m$ , сдвигается в длинноволновую область. Этот факт говорит о возможности суперпозиции поверхностного резонанса ( $V_{кр} = c_R, q \rightarrow 0$ ) и изгибного резонанса в пластине ( $V_{кр} = c_m, q = q_m$ ), что может существенно увеличить уровень возмущений.

**3.2 Тонкая пластина-слой-полупространство.** Здесь, в отличие от предыдущего случая, существует бесконечное число корней (мод), дисперсионного уравнения соответствующих свободным волнам, распространяющихся в слое конечной толщины. Если  $q \rightarrow 0$  то, как и в предыдущем случае  $c \rightarrow c_{R2}$ , скорости волн Рэлея в полупространстве. Если первая (нижняя) мода имеет действительные корни, тогда как корни высших мод могут быть действительными или комплексными в зависимости от соотношения между параметрами системы. В рассматриваемом случае существует набор специальных точек.

Длинноволновая  $q \rightarrow 0$  асимптота дисперсионного уравнения (5) получена в следующем виде:

$$L = c_{2s}^4 L_{R2} + q \left[ \rho_0 c^4 \sqrt{1-c^2} + \rho_1 h_1 \Phi(c_{1l}; c_{1s}, c_{2s}) \right] \quad (9)$$

где  $\Phi$  конечная функция. Принятые единицы измерения:  $\rho_2$ ,  $c_{2l}$  и  $h_0$ . Напомним, что  $v_0=v_1=v_2=0.25$ , тогда  $c_s/c_l=0.577$  и  $c_R=0.92$ . Теперь в задаче остаются только пять свободных параметров:  $\rho_0$ ,  $c_0$ ,  $\rho_1$ ,  $h_1$ ,  $c_{1l}$ .

Как и в предыдущем случае, скорость Рэлея является критической для относительно длинных волн:  $V_{кр} = c_{R2}(q \rightarrow 0)$ . Жесткость пластины в формуле (9) отсутствует: она не влияет на длинноволновую асимптоту.

Основное различие, которое вносит наличие слоя, состоит в том, что с ростом  $q$  от нуля скорость  $c(q)$  в зависимости от параметров структуры может как уменьшаться, так и увеличиваться. Аналитические формулы для координат особых точек средневолнового спектра в рассматриваемом случае получить не удастся, и мы воспользуемся численным решением дисперсионного уравнения.

Ниже, на рис. 3 (a) и (b) изображены кривые первых мод, рассчитанные для набора параметров структуры, а четыре низшие моды можно видеть на рис. 3 (c). Для относительно жесткого и тяжелого слоя ( $\rho_1 > \rho_2$ ,  $c_{1l} > c_{2l}$ ), первая мода имеет точки максимума и минимума в средневолновом спектре.

В примере для более легкого ( $\rho_1 < \rho_2$ ) и более податливого ( $c_{1l} < c_{2l}$ ) слоя - Рис.3, (c) кривые первой и второй мод имеют точки максимума и минимума, а в третья мода - точку перегиба с касательной, параллельной оси  $q$ . Наличие у различных мод особых точек в узком участке спектра и при близких значениях критических скоростей говорит о возможности наложения различных резонансных форм.

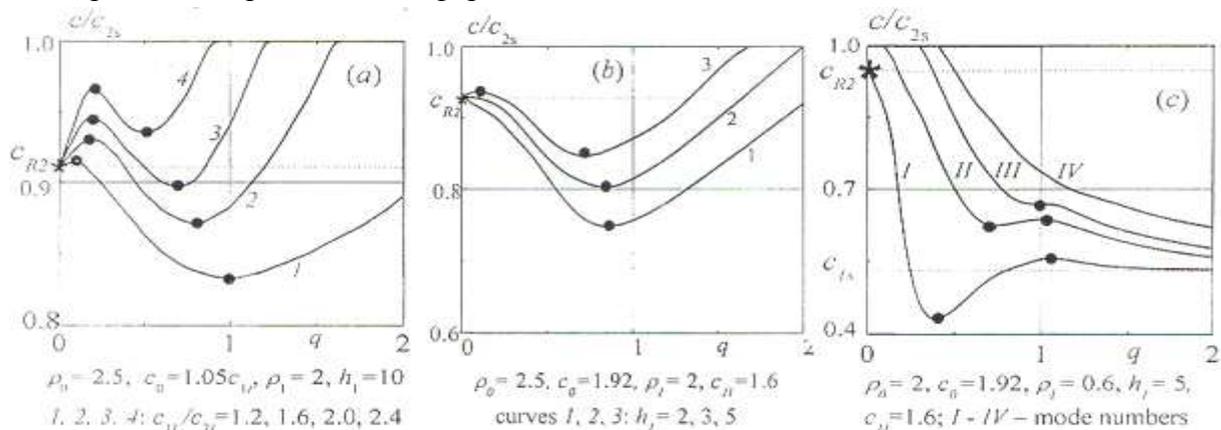


Рис.3: Дисперсионные кривые в системы: тонкая пластина-слой-полупространство

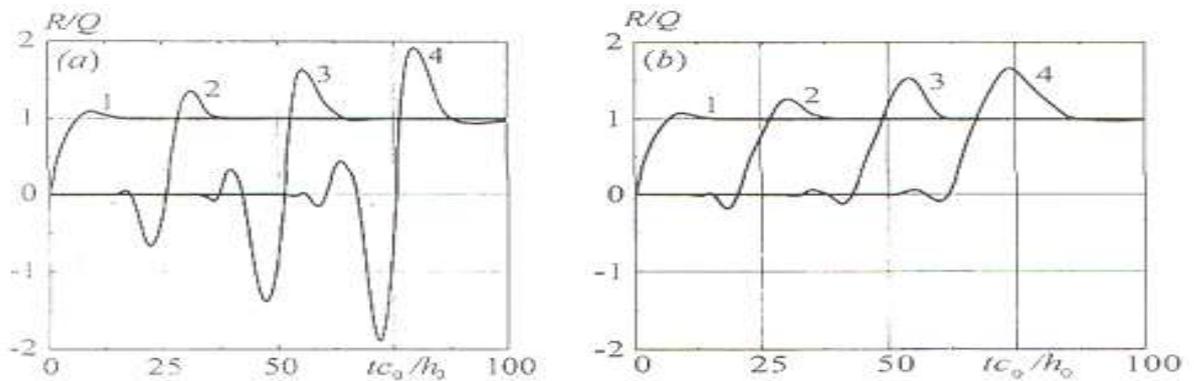
#### 4. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА. РАЗВИТИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЛН

**4.1 Тонкая пластина - полупространство.** Рассмотрим задачу о резонансном возбуждении системы, когда поверхностная нагрузка движется с критическими скоростями  $V = c_R$  и  $V = c_m$ . Прямое численное моделирование проводится с помощью явных конечно-разностных алгоритмов с использованием специального метода минимизации численной дисперсии, первоначально описанного в [10]. Метод позволяет рассчитывать длинные и коротковолновые компоненты с одинаковой точностью на однородной разностной сетки.

На рисунке 4 показана начальная стадия формирования резонансной волны в систе-

ме при двух критических скоростях движения ступенчатой нагрузки:  $V = c_R$  и  $V = c_m$ . Представленные кривые - это зависимость нормированной нормальной реакции  $R/Q$  в некоторых сечениях на поверхности  $y = 0$ . Единицы измерения:  $h_0, c_0, \rho_0$ . Можно видеть четкое различие между двумя рассмотренными случаями: (а) сильный рост и фиксированная частота изгибного резонанса при  $V=c_m$ , в то время как более слабый рост и уменьшающаяся частота регистрируются со временем, если  $V = c_R$ .

Такие особенности можно частично предугадать по поведению дисперсионных кривых в окрестностях особых точек: в окрестности точки минимума  $(q_m, c_m)$  дисперсионная кривая заметно выполаживается или, другими словами, дисперсия уменьшается и, следовательно, скорости а рост резонансных возмущений увеличивается. Напротив, относительно сильной дисперсией характеризуется окрестность особой точки, соответствующей резонансу Рэлея ( $q=0, c=c_R$ ).



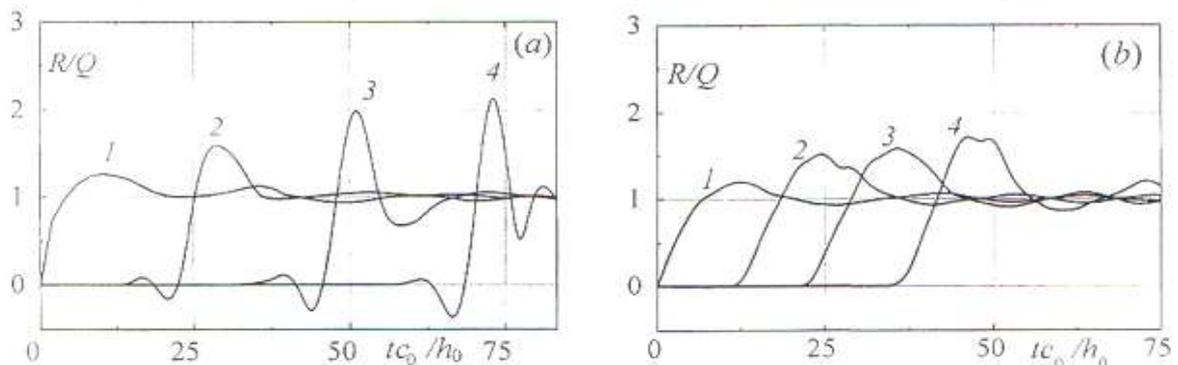
**Рис.4: Формирование резонансных волн в системе пластина-полупространство:**  
 $\rho_2=0.4; c_{21}=1.$

Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям  $x=0, 10, 20, 30$ .

(а):  $V=c_m=0.48$ , (б):  $V=c_R=0.53$ .

Эти оценки имеют локальный характер и не претендуют на общность: в начале волнового процесса проблематично установить общие характеристики распространения нестационарных возмущений. В разделе 5 мы построим аналитические решения, позволяющие выделить физические следствия, представляющие интерес.

**4.2 Тонкая пластина - слой - полупространство.** Резонансные возмущения подобные описанным фиксируются и в этой более сложной системе. На рисунке 5 показаны результаты расчета проведенные для относительно жесткого и тяжелого полупространства. Видно, что в случае изгибного резонанса ( $V = c_m$ ), рост возмущений более выражен.



**Рис.5: Формирование резонансных волн в системе пластина-полупространство:**

$h_1=5, \rho_1=1.25, c_{11}=1, \rho_2=0.4, c_{21}=0.4$

Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют сечениям  $x=0, 10, 20, 30$ .

(а):  $V=c_m=0.45$ , (б):  $V=c_R=0.58$ .

## 5. УПРОЩЕННЫЕ МОДЕЛИ

К сожалению, получение аналитических решений для резонансных волн в рассматриваемых системах проблематично. Однако подобные решения могут быть найдены на основе хорошо известного подхода, в котором исходная сложная структура заменяется с помощью упрощенной модели, обладающей близкими спектральными свойствами в окрестности особой точки. Этот подход применим к рассмотренному выше изгибным резонансам, где интерес представляет узкий спектр, окружающий особую точку. С этой целью ниже рассмотрены две простые модели: (а) тонкая пластина на упругом основании и (б) та же система, дополненная равномерно распределенными инерционными массами, связанными с пластиной, без инерционными упругими пружинами (ясно, что точек Рэлея в этих моделях нет).

Единицы измерения для этих двух моделей будут параметры пластины:  $h, c, \rho$ , другие параметры систем указаны на рисунке 6: (а) единственный свободный параметр  $g$  - жесткость упругого основания модель и (б) три свободных параметра  $g$  - жесткость упругого основания,  $G$  - жесткость связи пластины с амортизированной средой, и ее масса  $M$ .



Рис.6: Упрощенные системы

Безразмерные уравнения, описывающие динамику упрощенных моделей, под действием движущейся нагрузки, имеют вид:

$$\begin{aligned} (a) \quad \ddot{w} + (1/12)w_x^{(IV)} &= P - R, R = g_0 w; \\ (b) \quad \ddot{w} + (1/12)w_y^{(IV)} &= P - R, R = gw + G(w - W), \end{aligned} \quad (10)$$

$$MW - G(w - W) = 0$$

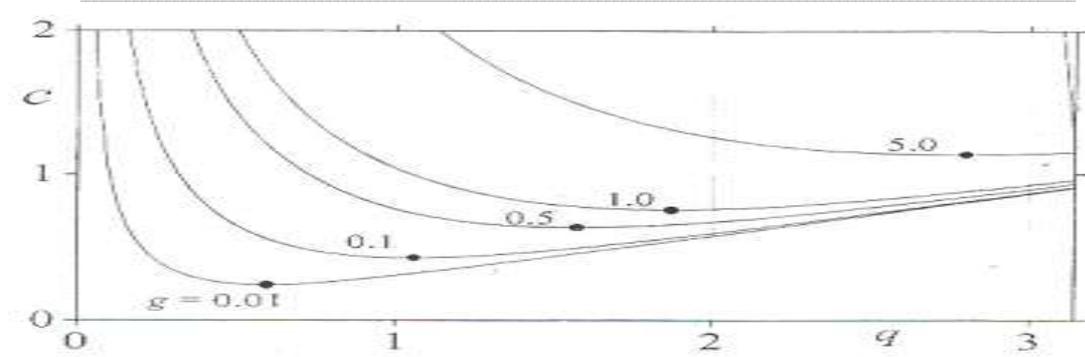
где  $P = QH(Vt - |x|)$  - внешняя движущаяся нагрузка,  $R$  - реакция упругого основания - модель (а), суммарная реакция упругого основания и амортизированной среды - модель (б).

Дисперсионные уравнения типа (5) для этих моделей имеют следующий вид:

$$(a) \quad L(q, c, g) = q^4 / 12 - q^2 c^2 + g = 0, \quad (11)$$

$$(b) \quad L(q, c, g, G, M) = [q^4 / 12 - q^2 c^2 + g + G] [G - Mq^2 c^2] - G^2 = 0 \quad (12)$$

В случае системы (а) существует единственная особая точка - минимум,  $q_m = (12g)^{1/4} \cdot c_m = (g/3)^{1/4}$ . На рис.7 изображены дисперсионные кривые, рассчитанные из (11) при нескольких значениях жесткости  $g$ .



**Рис.7: Дисперсионные кривые для модели (а)**

Как показали расчеты, модель (b) может иметь от одной (минимум) до трех (минимум, максимум и перегиб) особых точек в зависимости от значений параметров структуры.

Варьируя свободные параметры в уравнении (11) мы находим такие, при которых наблюдается максимальная близость дисперсионных кривых исходной и упрощенной модели в окрестностях особых точек. Такая процедура может быть проведена, например, с помощью метода наименьших квадратов. Понятно, что возможность максимального сближения спектров дисперсии исходной и приближенной модели существенно выше у модели (b) с тремя свободными параметрами чем, у модели (a),. Тем не менее мы рассмотрим ниже только модель (a) с целью построения замкнутого аналитического решения исследуемой задачи.

## 6. АСИМПТОТИКА ИЗГИБНОГО РЕЗОНАНСНОГО ПРОЦЕССА

Асимптотическое решение приведенное ниже строится на основе метода Слепяна [5], в котором двойное преобразование Лапласа-Фурье по времени и пространству приводится к преобразованию Лапласа на луче  $x = V_{кр}t$  с дальнейшим асимптотическим обращением двойных изображений Лапласа- Фурье в окрестности  $q = q_m$  (волновое число  $q$  является параметром преобразования Фурье) и для больших значений времени:  $t \rightarrow 0$  (которые соответствуют асимптотическому условию  $s \rightarrow 0$  в изображениях Лапласа- Фурье. где  $s$ -параметр преобразования Лапласа).

Ниже мы опускаем довольно громоздкие математические вычисления и остановимся на окончательных асимптотических формулах решения задачи (10.a):

$$w(x, t) = \frac{\sqrt{t}}{\pi q_m^2 c_m (1 - c_m^2) \sqrt{\varphi}} [F_1(k) \cos \eta q_m + F_2(k) \sin \eta q_m],$$

$$F_1(k) = \int_0^{\infty} \frac{\sin z^2 \cos kz dz}{z^2}, \quad F_2(k) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos z^2) \cos kz dz}{z^2}, \quad (13)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( q \frac{\partial^2 c}{\partial q^2} \right)_{q=q_m} \neq 0, \quad k = \frac{\eta}{\sqrt{\varphi t}}, \quad \eta = c_m t - x.$$

Здесь  $\eta$  - стационарная фаза бегущей волны. В окрестности этой фазы происходит рост резонансных возмущений, пропорциональный  $\sqrt{t}$ ; осциллирующий процесс описывается суммой огибающих  $F_1$  и  $F_2$  с несущей резонансной частотой  $\omega_m = c_m q_m$ . Интегралы  $F_1$  и  $F_2$  имеют следующие аналитические выражения:

$$F_1(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \cos\left(\frac{k^2}{4}\right) + \sin\left(\frac{k^2}{4}\right) \right] - \frac{\pi|k|}{2} \left[ C\left(\frac{k^2}{4}\right) - S\left(\frac{k^2}{4}\right) \right],$$

$$F_2(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \cos\left(\frac{k^2}{4}\right) - \sin\left(\frac{k^2}{4}\right) \right] - \frac{\pi|k|}{2} \left[ 1 - C\left(\frac{k^2}{4}\right) - S\left(\frac{k^2}{4}\right) \right]$$

где  $C(\dots)$  и  $S(\dots)$  интегралы Френеля. Графические изображения  $F_1$  и  $F_2$  показаны на рис. 8.

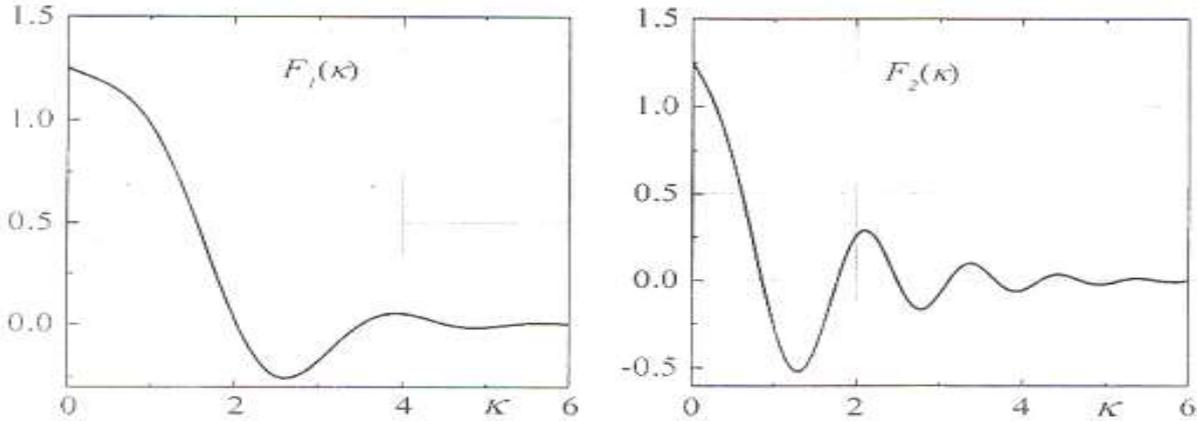


Рис.8: Огибающие резонансных волн

Эти огибающие являются квазистационарными [9], и полученное решение верно в окрестности стационарной фазы  $\eta = c_m t - x$ . Эта окрестность распространяется со временем пропорционально  $\sqrt{t}$ .

Ниже мы представляем компьютерное решение уравнения (10, а) в случае  $g=0,01$  (тогда,  $q_m = 0.5771$ ,  $c_m = 0.2295$ ). Для численного решения была использована явная конечно-разностная схема вместе с методом минимизации численной дисперсии [10]. На рис. 9 представлено сравнение осциллограмм в различных сечениях системы, рассчитанные при резонансной скорости движущейся нагрузки: (b)  $V=V_{кр} = c_m$ , и при близких к ней скоростях: (a)  $V=0.9V_{кр}$ , and (c)  $V=1.1 V_{кр}$  (направление оси  $y$  вниз выбрано положительным). Отметим, что квазистатическим решением задачи будет выражение  $w = (Q/g)H(Vt - x)$ .

Сравнивая осциллограммы, можно видеть принципиальное различие для резонансных и нерезонансных процессов, несмотря на небольшую разность скоростей  $V$ . Сравнение результатов вычислений и асимптотического решения (13) показывает, что асимптотическое решение оказывается практически точным для сечений  $x \geq 25h$ .

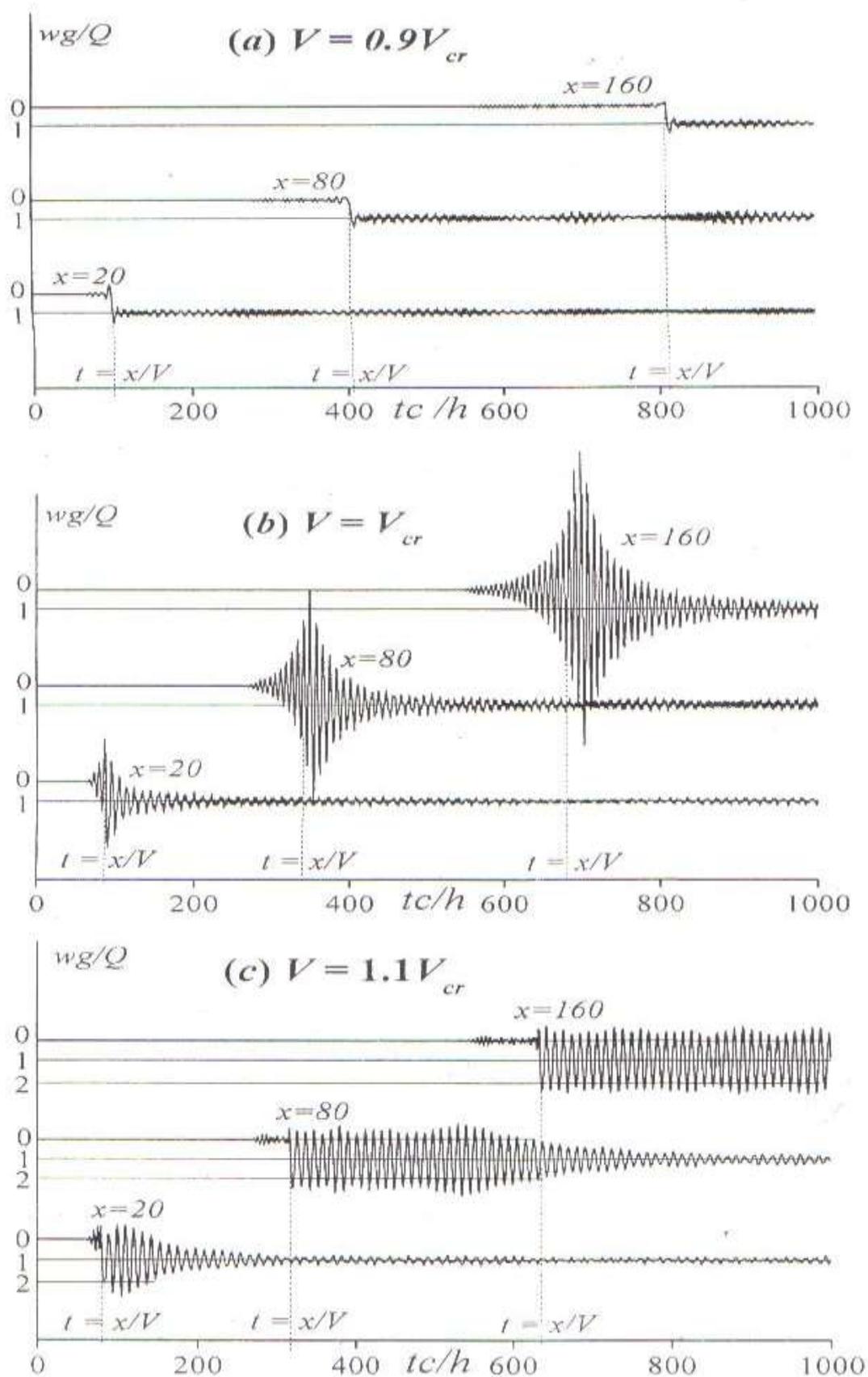


Рис.9: Волновые процессы при различных скоростях движущейся нагрузки

### Заклучение

Изучение волноводных свойств системы пластина- слоистое полупространство позволило определить наличие особых точек на дисперсионных кривых. Количество их зависит от неоднородности системы. Во всех случаях существует особая точка в области длинных волн и критическая скорость нагрузки равна скорости волн Релея в полупространстве. В средневолновой части спектра в зависимости от неоднородности может существовать одна особая точка – точка минимума, или две – точки минимума и максимума. Если скорость движущейся нагрузки равняется фазовой скорости соответствующей ординате особой точки на дисперсионной кривой, в пластине развивается резонансная изгибная волна. Заменяя рассматриваемую систему упрощенной моделью получено асимптотическое решение ( $t \rightarrow \infty$ ) описывающее резонансную волну, которая растет со временем как  $t^{1/2}$ . Проведенные численные расчеты позволили проследить весь процесс развития резонансных изгибных волн и установить пределы применимости асимптотического решения.

#### Использованная литература:

1. Goldshtein R.V. Rayleigh waves and resonance phenomena in elastic bodies. Appl. Mech. 1965, 29 (3), 516-26.
2. Слепян Л.И. Резонансные явления в пластинах и оболочках. VI Всесоюзная конф. Теория пластин и оболочек, Москва, Наука, 1966.
3. Айзенберг М.В. О резонансных волнах в полом цилиндре, Изв. АН СССР. МТТ-1969, №1, 84-90
4. Айзенберг М.В., Слепян Л.И. Резонансные волны в полом цилиндре, погруженной в сжимаемую жидкость. Всес.симп. Нестационарные процессы в пластинах и оболочках, Таллин, 1967.
5. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л. Судостроение, 1971, 376.
6. Александрова Н.И., Поташников И.А., Степаненко М.В. Изгибные резонансные волны в цилиндрической оболочке при действии радиально приложенной движущейся нагрузки. ПМ, 1989, 19 (3), 132-37
7. Абдукадиров С.А. Низкочастотные резонансные волны в цилиндрическом слое, окруженной упругой средой. ФТПРПИ, 1980, №3, 43-47.
8. Абдукадиров С.А. Влияние упругой среды на резонансные волны в слое. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Сб. науч. тр. ГГУ, 1980, 25-29.
9. Quand H, Moving-load dynamic problems. F tutorial Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25 (6), 2039-60
10. Абдукадиров С.А., Пинчукова Н.И., Степаненко М.В. Об одном способе численного решения уравнений динамики упругих сред. ФТПРПИ, 1984, №6, 19-22.