O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

MEXANIKA MUAMMOLARI

O‘ZBEKISTON
JURNALI

1
———
2022

УЗБЕКСКИЙ
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ

Журнал под таким названием издается с января 1992 г.

Ташкент – 2022

Адрес редакции:
100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 33.
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз

Телефон: + 99871 262-78-34
Факс: +99871 262-71-52
E-mail: instmechofficial@gmail.com

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.
Регистрационный номер 0050.

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала .2022
Сдано в набор 16.02.2022. Подписано в печать . .202.
Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Гарнитура Times New Roman. Ризография.
Усл.-печ. л. 10.23. Уч.-изд. л. 6.87. Тираж 150. Заказ № .
Цена договорная.

Отпечатано в Минитипографии АН РУз:
100047, г. Ташкент, ул. акад. Я. Гулямова, 70.

УДК: 539.3

ОЦЕНКА ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОЧНЫХ ПЛИТАХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Мамасолиев К.[1], Синдаров Ж.[1], Тошматов Э.[2]

[1]*Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт, Самарканд, Узбекистан*
[2]*Национальный иследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства". Ташкент, Узбекистан*
Email: q-mamasoliev@mail.ru; sindarovjamshid88@mail.ru; t.elyor85@mail.ru.

Аннотация: *В статье разработаны математическая модель и метод для оценки внутренних силовых факторов в многослойных балочных плитах на упругом основании при различных статических нагрузках. Приведен подробный обзор известных работ по оценке напряженно-деформированного состояния и динамического поведения различных конструкций совместно с основанием. Выведена замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая процесс деформирования многослойных балочных плит на упругом основании. Рассматриваемая задача сводился с использованием полинома Чебышева к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Установлено для получения решения задачи с необходимой точностью число членов полинома Чебышева. Показана эффективность метода решения задачи на примере тестовых задач.*

Ключевые слова: *балочные плиты; основание; взаимодействие; полином Чебышева; регулярность; алгебраические системы.*

Введение. В настоящие время усилиями многочисленных исследователей создано много различных методов расчета конструкций на деформируемом основании, свойства которого описываются разнообразными физическими моделями. К ним относятся фундаменты зданий, аэродромные и дорожные покрытия, плиты, гидротехнические сооружении, рельсы и шпалы железнодорожных путей и т.д. В большинстве созданных методах внимание уделено анализу взаимосвязи контактирующих элементов конструкций с грунтовым основанием [1–4].

При этом в работах [5–8] рассмотрены различные законы деформирования и структурных разрушении грунтов, а также рассмотрено распространение сейсмических волн и взаимодействие твердых тел с грунтом.

Имеется ряд работ, в которых рассматривается совместная работа конструкции с основанием, т. е.:

- в [9] рассмотрены контактные задачи о вдавливании прямоугольного штампа с плоским основанием в упругое шероховатое полупространство при наличии трения Кулона с неизвестными зонами сцепления и проскальзывания;
- в [10] излагаются постановки и математические методы решения задач гидроупругости трехслойных элементов конструкций;
- в [11–15] приведены различные исследование по оценки прочности и динамики грунтовых платин как с учетом основании так и без учета при статических и динамических воздействиях;
- в [16] исследуется взаимодействие нелинейной системы, т.е. грунтового основания и гравитационной опоры. В модели надстройки использована идеальная эластопластическая модель, а для фундамента принята модель Винклера;
- в [17] исследуется поведение конструкции, опирающейся на фундамент при землетрясении. Предполагается, что поверхность грунта и фундамента представляет собой совокупность дискретных нелинейных элементов, состоящих из пружин, точек крепления и элементов зазора;
- в [18] рассматриваются проблемы оценки критического напряжения и деформации в шарнирно-опертой прямоугольной пластинке за пределом упругости и оценки устойчивости изогнутой пластинки.

Наряду с этим имеется ряд работ, посвящённых динамике, где работа сооружении рассматривается совместно с основанием использования искусственных граничных условий на границе конечной области основаних, т.е.:

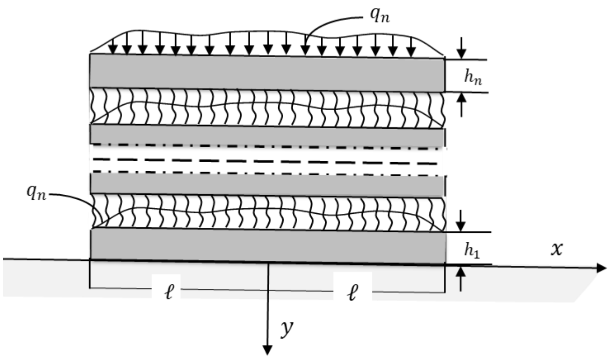
- в [19] рассмотрена решении плоской задачи о распространении волн от штампа, расположенного на поверхности полупространства;
- в [20] рассматривается задача об осесимметричных колебаниях гибкого кольца, лежащего на вязкоупругом слоистом основании. Анализируются демпфирующие свойства системы при различных частотах возбуждения;
- в [21] решается линейная задача о взаимодействии поверхностной волны Рэлея, распространяющейся в песчаной среде, с жестким частично заглубленным в грунт сооружением;
- в [22] рассматриваются колебания, напряженное состояние и устойчивость оснований фундаментов под машинами с учетом грунтового основания;
- в [23] оценено динамическое поведение конкретных грунтовых плотин совместно с основанием.

В работе [4–27] рассмотрено взаимодействие многослойных плит-полос с упругим полупространством. Задача сведена к исследованию бесконечных систем алгебраических уравнений. С помощью решения бесконечных систем изучены силовые факторы конструкции.

Поэтому разработка математических модели и методики для оценки напряженно-деформированного состояния многослойных балочных плит, лежащих на упругом основании с учетом их геометрических и физических особенностой, является актуальной задачей.

В настоящей статье для описания процесса деформирования многослойных балочных плит на упругом основании выведена замкнутая система интегродифференциальных уравнений. Решение рассмотренных задач осуществляется разложением в ряд реактивного давления основании по ортогональным полиномам и сведением к исследованию бесконечных систем алгебраических уравнений. Для показания эффективности методики решен ряд тестовых задач.

Математические модели задачи. Рассматривается процесс моделирования деформирования n слойных балочных плит длиной $2l$, толщиной h_1, h_2, …., h_n и шириной, равной единице (рисунок). Каждый слой плиты загружено внешними нагрузками соответственно q_1, q_2, …, q_n, произвольными вдоль плиты. Предполагаем, что между плитами расположен упругий заполнитель, а реакцией заполнителя были пропорционально равные разности прогибов, связывающих плиты на нижнеюю плиту, плотно прилегающую к основанию, кроме внешних нагрузок и реакции заполнителя вышестоящих плит, влияют и реактивные реакции основании.



Процесс моделирования

Установление начала координаты в симметричном центре балочных плит с абсциссой на отрезке $[-l; l]$, т.е. $-l \le x \le l$, позволяет рассмотреть прогибы плиты $y_1, y_2, \dots, y_n$ как функция от переменной x, т.е. $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Здесь y_i – прогиб i -ой балочного плиты.

Для моделирования процесса деформирования n-слойных балочных плит можно написать систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных прогибов балочных плит в виде

$$\left.\begin{array}{l} D_n \cdot y_n^{IV} = q_n - k_{n-1}\cdot\left(y_n - y_{n-1}\right) \\ D_{n-1} \cdot y_{n-1}^{IV} = q_{n-1} + k_{n-1}\cdot\left(y_n - y_{n-1}\right) - k_{n-2}\cdot\left(y_{n-1} - y_{n-2}\right) \\ D_{n-2} \cdot y_{n-2}^{IV} = q_{n-2} + k_{n-2}\cdot\left(y_{n-1} - y_{n-2}\right) - k_{n-3}\cdot\left(y_{n-2} - y_{n-3}\right) \\ . \\ D_1 \cdot y_1^{IV} = q_1 + k_1\cdot\left(y_2 - y_1\right) - p \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Здесь $D_i = \dfrac{E_i h_i^3}{12\left(1-\nu_i^2\right)}$; E_i, ν_i – модуль упругости и коэффициенты Пуассона материалы плит; k_i – коэффициенты жесткости заполнителя; $q_i=q_i(x)$ – внешние нагрузки i-го плиты; $p=p(x)$ – реактивные нормальные давления основания.

Уравнение, связывающее осадку однородного основания $V(x)$ с реактивным давлением $p(x)$ в условиях плоской деформации, согласно [4], можно представить в виде

$$V(x) = \frac{2l(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}\int_{-l}^{l} p(s)\ln\frac{1}{|x-s|}ds\,. \qquad (2)$$

Здесь E$_0$, ν_0 – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала основания.

Далее предполагается, что между поверхностью плиты и основаниям имеется двухсторонняя связь, поэтому условия контакта можно записать в следующем виде:

$$y_1(x) = V(x), \qquad -l \le x \le l\,. \qquad (3)$$

Теперь рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо найти прогибы многослойных балочных плит, удовлетворяющие системы уравнения (1) и осадки основания удовлетворяющие уравнение (2).

Методы решения. В дальнейшем вводится безразмерная координата x, равная отношению абсолютной координаты к полудлине балки l.

Закон распределения реактивного давления ищется в виде ряда с использованием полинома Чебышева [24]:

$$p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot T_n(x)\,, \qquad (4)$$

где $T_n(x)$ – полином Чебышева первого рода [16]; A_n – неизвестные коэффициенты.

Реактивные давления основания $p(x)$ должны удовлетворить уравнению равновесия балочных плит, т.е.:

$$\int_{-1}^{1} p(x)d(x) = \frac{P}{l}, \qquad \int_{-1}^{1} xp(x)dx = \frac{M}{l^2} \qquad (5)$$

где P, M – соответственно сумма всех вертикальных сил и сумма их моментов относительно середины балочных плит.

Подставляя (4) в (5) и учитывая ортогональности полиномов Чебышева по весу $(1-x^2)^{-1/2}$, имеем

$$A_0 = \frac{P}{\pi l}, \qquad A_1 = \frac{2M}{\pi l^2}\,. \qquad (6)$$

Подставляя (4) в (2) и используя известное соотношение [25]

$$\int_{-1}^{1} ln|x-s|\cdot(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}T_k(s)ds = \begin{cases} \pi ln2, & \text{при} \quad к=0 \\ -\frac{\pi}{к}\text{Т}_к(x), & \text{при} \quad к=1,2,3,\dots \end{cases}.$$

для осадки основания получим:

$$V(x)=\frac{2(1-\nu_0^2)l}{E_0}\left[-A_0\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\frac{T_n(x)}{n}\right]. \tag{7}$$

Если остальные коэффициенты ряда (4) предположим равными нулю, то будем иметь случай абсолютно жесткой балочной плит. Членами ряда (4) со значением n=2 выражена поправка, отличающая распределение реактивного давления для абсолютно жестких балочных плит.

Для простоты рассмотрим двухслойную балочную плиту, взаимодействующую с однородным упругим основанием. Тогда система дифференциальных уравнений для прогибов балочных плит (1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{D_2}{l^4}\cdot y_2^{IV}=q_2-k_1\cdot(y_2-y_1) \\ &\frac{D_1}{l^4}\cdot y_2^{IV}=q_1+k_1\cdot(y_2-y_1)-p \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (8) с учетом (4) представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_1=\frac{l^4}{D_1+D_2}\cdot\Bigg\{&\sum_{i=1}^{4}C_i x^{4-i}+f_q(x)-\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot f_n(x)- \\ &-D_2\cdot\left[\sum_{i=1}^{4}B_i\cdot u_i(\alpha x)+\psi_q(x)+\frac{1}{D_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot\varphi_n(x)\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} y_2=\frac{l^4}{D_1+D_2}\cdot\Bigg\{&\sum_{i=1}^{4}C_i x^{4-i}+f_q(x)-\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot f_n(x)+ \\ &+D_1\cdot\left[\sum_{i=1}^{4}B_i\cdot u_i(\alpha x)+\psi_q(x)+\frac{1}{D_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot\varphi_n(x)\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{10}$$

где C_i, B_i – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий рассматриваемой задачи;

$$\left.\begin{aligned} &u_1(x)=chx\cdot\cos x\,; \quad u_2(x)=chx\cdot\sin x+shx\cdot\cos x; \\ &u_3(x)=shx\cdot\sin x\,; \quad u_4(x)=chx\cdot\sin x-shx\cdot\cos x \end{aligned}\right\},$$

$$f_q^{IV}(x)=q_1(x)+q_2(x), \tag{11}$$

$$\psi_q(x)=\frac{1}{4\alpha^3}\int_0^x\left[\frac{q_1(z)}{D_2}-\frac{q_2(z)}{D_1}\right]\cdot u_4\left[\alpha(x-z)\right]dz, \tag{12}$$

$$f_n^{IV}(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot T_n(x), \tag{13}$$

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{4\alpha^3}\int_0^x u_4\left[\alpha(x-z)\right](1-z^2)^{-\frac{1}{2}}T_n(z)dz, \tag{14}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{2^4 n(n-1)(n-2)(n-3)}(1-x^2)^{7/2}\cdot P_{n-4}^{(7/2,\,7/2)}(x), \qquad n>3, \tag{15}$$

$$f_n'(x) = -\frac{1}{2^3 n(n-1)(n-2)}(1-x^2)^{5/2}\cdot P_{n-3}^{(5/2,\,5/2)}(x), \qquad n>2\,, \tag{16}$$

$$f_n''(x) = \frac{1}{2^2 n(n-1)}(1-x^2)^{3/2}\cdot P_{n-2}^{(3/2,\,3/2)}(x), \qquad n>1\,, \tag{17}$$

$$f_n'''(x) = -\frac{1}{2n}(1-x^2)^{1/2}\cdot P_{n-1}^{(1/2,\,1/2)}(x), \qquad n>0\,. \tag{18}$$

Здесь $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – полиномы Якоби [24].

Используя явный вид

$$T_n(x) = \cos(n\cdot\arccos x) \tag{19}$$

полиномов Чебышева, также можно получать явный вид для функции $f_n(x)$ при n<4.

Формула (9) и (10), определяющие прогибы балочных плит, имеют общий характер, т.е. для произвольных жесткостей плит и соответствующих произвольных закона распределения внешних нагрузок.

В конкретных законах распределения внешних нагрузок можно найти прогибы балочных плит, соответственно удовлетворяющие граничным условиям. При этом постоянные интегрирования B_i, C_i определяются из граничных условий задач. Коэффициенты A_n в формулах (9), (10) и (7), определяющие прогиб плит и осадки основания являются не известными. Для определения неизвестных коэффициентов A_n используются условия контакта (3). Прогиб нижней балочной плиты удовлетворяющий граничным условиям (9), и осадки основания (7) подставляются в условия контакта (3). Далее полученное равенство умножается на $(1-x^2)^{-1/2}T_k(x)$ и затем интегрируется в пределах от -1 до 1. После интегрирования можно получить бесконечную систему алгебраических уравнений с бесконечными неизвестными относительно неизвестных коэффициентов A_n. Эта бесконечная система алгебраических уравнений решается методом редукции. Применение метод редукции строго математически обоснуется. Определенные коэффициенты A_n подставляются в (4), (7), (9), (10) и находятся закономерности реактивные давлений, осадок основании и прогибов балочных плит. Найденные далее прогибы балочных плит позволяют определить закономерности изменения внутренних усилий плит, соответствующие изменению внешних нагрузок, коэффициента жесткости заполнителя и реакции основания.

Задача 1. Для иллюстрации эффективности вышеуказанной методики рассмотрим задачу оценки прогиба двухслойной балочной плиты, нагруженной равномерно распределенными внешними нагрузками, т.е.

$$q_1(x) = q_2(x) = q = const\,.$$

В этом случае из-за симметричности нагрузки ряд (4) будет включать только чётные полиномы

$$p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}\cdot T_{2n}(x)\,. \tag{20}$$

Из уравнения равновесия (5), имеем

$$A_0 = 4q\cdot\pi^{-1}\,. \tag{21}$$

Выражение (3), описывающее осадки основания, примет вид

$$V(x) = \frac{2l(1-\nu_0^2)}{E_0}\left[-A_0\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}\cdot\frac{T_{2n}(x)}{2n}\right]. \tag{22}$$

Выражения (11), (12) соответственно примут вид

$$f_q(x) = 2q \cdot \frac{x^4}{24}. \qquad (23)$$

$$\psi_q(x) = \frac{1}{4\alpha^3} \cdot \frac{D_1 - D_2}{D_1 \cdot D_2} \cdot q \cdot \frac{1}{\alpha}\left[1 - u_1(\alpha x)\right]. \qquad (24)$$

Удовлетворяя граничные условия и переходя относительными прогибами плит, по формулам

$$\bar{y}_1(x) = y_1(x) - y_1(o), \qquad \bar{y}_2(x) = y_2(x) - y_2(o).$$

получаем следующие выражения, для определения прогибов плит:

$$\bar{y}_1 = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \left\{ q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{D_2}{D_1} \cdot \sum A_{2n} \cdot \right. . \qquad (25)$$

$$\left. \cdot \left[\bar{\varphi}_{2n} \cdot \left(u_1(\alpha x) - 1 \right) + \bar{\bar{\varphi}}_{2n} \cdot u_3(\alpha x) + \varphi_{2n}(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot \left(f_{2n}(x) - f_{2n}(0) \right) \right] \right\},$$

$$\bar{y}_2 = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \left\{ q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^4}{24} \right) + \sum A_{2n} \cdot \right. \qquad (26)$$

$$\left. \cdot \left[\bar{\varphi}_{2n} \cdot \left(u_1(\alpha x) - 1 \right) + \bar{\bar{\varphi}}_{2n} \cdot u_3(\alpha x) + \varphi_{2n}(x) - \left(f_{2n}(x) - f_{2n}(0) \right) \right] \right\}.$$

Здесь

$$\bar{\varphi}_{2n} = \frac{b^{-1}}{8\alpha^3} \cdot \int_0^1 \left\{ 2u_1(\alpha) \cdot u_1[\alpha(1-z)] + u_4(\alpha) \cdot u_2[\alpha(1-z)] \right\} \cdot (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{2n}(z) dz, \qquad (27)$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_{2n} = \frac{b^{-1}}{8\alpha^3} \cdot \int_0^1 \left\{ 2u_3(\alpha) \cdot u_1[\alpha(1-z)] - u_2(\alpha) \cdot u_2[\alpha(1-z)] \right\} \cdot (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{2n}(z) dz, \qquad (28)$$

$$b = u_1(\alpha) \cdot u_2(\alpha) + u_3(\alpha) \cdot u_4(\alpha)$$

Далее подставляются выражения (22) и (25) в (3), затем полученное равенство умножается на

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{2k}(x), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

и интегрируется в пределах от -1 до 1. Учитывая ортогональности полиномов Чебышева, получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{2n}:

$$a_{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n,2k} \cdot A_{2n} = A_{2k} \cdot \frac{2l \cdot (1 - \nu_0^2)}{E_0} \cdot \frac{\pi}{2k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (29)$$

где

$$a_{2k} = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \int_{-1}^{1} \left\{ q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^4}{24} \right) - \frac{D_2}{D_1} A_0 \cdot \left[\bar{\varphi}_0 \cdot \left(u_1(\alpha x) - 1 \right) + \right. \right. , \qquad (30)$$

$$\left. \left. + \bar{\bar{\varphi}}_0 \cdot u_3(\alpha x) + \varphi_0(x) + \frac{D_1}{D_2} \left(f_0(x) - f_0(0) \right) \right] \right\} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{2k}(x) dx$$

$$a_{2n,2k} = -\frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \int_{-1}^{1} \left\{ \bar{\varphi}_{2n} \cdot [u_1(\alpha x) - 1] + \bar{\bar{\varphi}}_{2n} \cdot u_3(\alpha x) + \right.$$
$$\left. + \varphi_{2n}(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot [f_{2n}(x) - f_{2n}(0)] \right\} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_{2k}(x) dx \qquad (31)$$

Для исключения сингулярности интегралов (30) и (31), интегрируя по частям, их можно привести к следующему виду:

$$a_{2k} = \frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \int_{-1}^{1} \left\{ q \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) - A_0 \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \left[\bar{\varphi}_0 \cdot u_1''(\alpha x) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \bar{\bar{\varphi}}_0 \cdot u_3''(\alpha x) + \varphi_0''(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot f_0''(x) \right] \right\} \cdot \alpha_{2k} \cdot (1 - x^2)^{3/2} \cdot P_{2k-2}^{(3/2,\, 3/2)}(x) dx, \qquad (32)$$

$$a_{2n,2k} = -\frac{l^4}{D_1 + D_2} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \int_{-1}^{1} \left\{ \bar{\varphi}_{2n} \cdot u_1''(\alpha x) + \bar{\bar{\varphi}}_{2n} \cdot u_3''(\alpha x) + \right.$$
$$\left. + \varphi_{2n}''(x) + \frac{D_1}{D_2} \cdot f_{2n}(x) \right\} \cdot \alpha_{2k} \cdot (1 - x^2)^{3/2} \cdot P_{2k-2}^{(3/2,\, 3/2)}(x) dx, \qquad (33)$$

где

$$\alpha_{2k} = \frac{1}{2k \cdot (2k-1)} \cdot \frac{2^{4k} \cdot [(2k)!]^2}{(4k)!}. \qquad (34)$$

Полученные формулы (32) и (33) удобны и позволяют получить точные значения интегралов.

Таким образом рассматриваемая задача сведена к исследованию бесконечных систем алгебраических уравнений (29). Приведенная система алгебраических уравнений (29) является регулярной. Известно, что регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений имеют единственное ограниченное решение. Регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений (29) можно решать методами редукции.

Задача 2. Рассмотрим численный пример, по решения системы (29) и определение изгибающего момента двухслойных балочных плит с помощью изложенной методикой. При этом используем следующие характеристики грунта и основании [26]:

$$\nu_0 = 0.3 \qquad E_0 = 5 \cdot 10^2 \, кг/см^2$$

и плит

$$l = 500 \, см, \quad h_1 = h_2 = 45 \, см, \qquad \nu_1 = \nu_2 = 0.167, \quad E_1 = E_2 = 1.25 \cdot 10^5 \, кгс/см^2.$$

На основе метода редукции ограничиваем первые четыре члена в ряду (20). Тогда система бесконечных уравнений (29) превратится в систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами A_2, A_4, A_6. Коэффициент A_0 считается известным и его значения вычисляются по формуле (21). Численные значения коэффициентов A_0, A_2, A_4, A_6 при разных значениях коэффициента заполнителя k приведены в табл. 1, согласно которой установлено, что изменения значения коэффициентов заполнителя существенно не влияют на изменение решения системы (29), а также реактивного давления основания, определяемого формулой (20). В табл. 2 приводятся величины изгибающего момента в сечении x=0 балки полосы при различных значениях коэффициента заполнителя k. По табл. 2 можно считать, что жесткость заполнителя существенно влияет на изменение изгибающих моментов балочных плит. При значении жесткости заполнителя k=0.25 кг/см^2 изгибающий момент верхней плиты приблизительно на 34 % меньше, чем изгибающий момент нижней плиты. С увеличением показателя жесткостей заполнителя значения изгибающих моментов в нижней плите снижаются в верхней увеличивается, т.е. изгибающие моменты плит приближаются друг к другу.

Таблица 1

Численные значения неизвестных коэффициентов

k (кг/см^3)	A_0/q	A_2/q	A_4/q	A_6/q
0.25	1.273239	-0.299585	-0.003142	0.000273
1.00	1.273239	-0.300361	-0.003195	0.000270
2.5	1.273239	-0.300584	-0.003174	0.000267
10.0	1.273239	-0.300619	-0.003209	0.000269
25	1.273239	-0.300971	-0.003214	0.000262

Таблица 2

Величины изгибающего момента

k (кг/см^3)	Наибольшее изгибающие моментов плит при x=0	
	$M_1(x)/(ql^2)$	$M_2(x)/(ql^2)$
0.25	0.103563	0.069591
1.00	0.098766	0.074678
2.5	0.087723	0.085346
10.0	0.087133	0.082961
25	0.086412	0.086095

Полученные результаты показывают эффективность методики при определении внутренних силовых факторов в многослойной пластине-балке.

Заключение.

1. Разработана математическая модель для оценки внутренних силовых факторов многослойных балочных плит на упругом основании при различных статических нагрузках.
2. Для оценки внутренних силовых факторов многослойных балочных плитах предложен аналитический метод решения задачи, основанный на ортогональных полиномах.
3. Эффективность метода решения задачи показана на примере решения тестовых задач.
4. Установлено, что учет жесткостных характеристик заполнителя приводит к перераспределению внутренних усилий в плитах.

Литература

[1] *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. –32 с.

[2] *Ширинкулов Т. Ш., Зарецкий Ю.К.* Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент: Фан, 1986. –390 с.

[3] *Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

[4] *Клейн Г.К.* Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружения, на сплошном основании // Тр. Моск. инж. - строит. ин-та, 1956. № 14.

[5] *Sultanov K.S.* Regularities of interaction of underground construction with the ground // Prikladnaya Mekhanika. 1993. 29(3), P. 60–67.

[6] *Sultanov K.S.* The attenuation of longitudinal waves in non-linear viscoelastic media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2002. 66(1). P.115–122.

[7] *Bakhodirov A.A., Ismailova S.I., Sultanov K.S.* Dynamic deformation of the contact layer when there is shear interaction between a body and the soil // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. 79(6). P.587–595.

[8] *Sultanov K.S., Bakhodirov A.A.* Laws of Shear Interaction at Contact Surfaces Between Solid Bodies and Soil // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2016. 53(2). P. 71–77.

[9] *Александров А.И., Грабко Е.В.*, Решение контактной задачи о вдавливании прямоугольного штампа в упругое шероховатое полупространство при наличии Кулонова трения // Вестник. Сам. гос. тен. ун-та. Сер. Физ.-мат. наук. Выпуск 4(37). 2014. С. 42–52.

[10] *Могилевич Л.И., Попов В.С., Христофорова А.В.*, Математические вопросы гидроупругости трехслойных элементов конструкций. Монография. Саратов, 2012.

[11] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Sadullaev A.* Determination of the stress-strain state of earth dams with account of elastic-plastic and moist properties of soil and large strain // Magazine of Civil Engineering. 2013. 40 (5). P. 59–68. DOI: 10.5862/MCE.40.7.
[12] *Mirsaidov M.M., Toshmatov E.S.* Spatial stress state and dynamic characteristics of earth dams. Magazine of Civil Engineering. Vol. 89. Iss. 5. 2019. P. 3–15. DOI: 10.18720/MCE.89.1.
[13] *Mirsaidov M.M.* An account of the foundation in assessment of earth structure dynamics // E3S Web of Conferences. Vol. 97. 2019. 04015. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704015.
[14] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F.* An assessment of dynamic behavior of the system "structure - Foundation" with account of wave removal of energy // Magazine of Civil Engineering. Vol. 39. 2013. Iss. 4. P. 94–105. DOI**:** 10.5862/MCE.39.10.
[15] *Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z.* Assessment of stress-strain state of earth dams with allowance for non-linear strain of material and large // Magazine of Civil Engineering. Vol. 49. 2014. Iss.5. P.73–82+136–137.
[16] *Weijun Yang, Qiusheng Li.* Nonlinear Dynamic Analysis of Foundation Soil and the Gravity Pier. Applied Mechanics and Materials. Vol. 204–208. 2012. P. 192–195.
[17] *Raychowdhury Prishati.* Nonlinear Winkler-based shallow foundation model for performance assessment of seismically loaded structures: PhD dissertation. UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SAN DIEGO. 2008. P.294.
[18] *Ismayilov Kubaymurad*, Critical Stresses and deformations in a hinged-supported rectangular plate beyond the elastic limit // Europian Journal Technical and Natural Sciences, Scientific journal. 2018. №3, P. 32–35.
[19] *Туров В.П.* К вопросу о сведении задачи о распространении упругих волн в бесконечной области к задаче для конечных размеров // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев. Вып. 28. 1976. С. 186–191.
[20] *El-Shafee O.M., Could P.L.* Dinamic axisummetric soil model for a flexible rihg footing // Earthquake Ehg. and Struct. Dyn. Vol. 8. 1980. № 5. P. 419–491.
[21] *Fedock Joseph, Schreyer Hovard.* Effect of earth Media on the Seismic Motion of Embedded Rigid Structures // Earthquak Ehg. and Struct. Dyn., Vol. 9. 1981. №4. P. 311–327.
[22] *Красников Н.Д., Савинов Щ.Ф., Толкачев Г.С., Эйчлер Л.А.* Экспериментально-расчетный метод исследований колебаний, напряженного состояния и устойчивости оснований фундаментов под машины // Изв. ВУЗ, Строительство. 1981. № 5. С. 7–21.
[23] *Meen-Wah Gui, Hsien-Te Chiu.* Seismic response of Renyitan earth-fill dam // Journal of GeoEngineering. Vol. 4. 2009. № 2. P. 41–50.
[24] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физико-математическая литература, 1962. –500с.
[25] *Абрамовица М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. –832с.
[26] *Ширинкулов Т. Ш.* Методы расчета конструкций на сплошном основании с учетом ползучести. Ташкент: Фан, 1969.
[27] *Mirsaidov M.M., Mamasoliev Q.* Contact problems of slabs interaction on an elastic foundation / ICECAE 2020. IOP Conf. Ser: Earth Environ. Sci. 2020, 614012089. Doi:10.1088/1755-1315/614/1/012089.

Дата поступления
21.12.2021 г.

Мамасолиев К., Синдаров Ж., Тошматов Э. Эластик асосдаги кўп қатламли тўсин плитасини ички куч факторларини баҳолаш

Аннотация: *Мақолада Эластик асосдаги кўп қатламли тўсин плитасини турли статик юкламаларда ички куч факторларини баҳолашнинг математик модели ва услуби ишлаб чиқилган. Турли конструкцияларни асос билан биргаликда динамик ҳолатини ва кучланганлик-деформацияланганлик ҳолатини баҳолаш бўйича мавжуд ишлар тўлиқ таҳлил қилинган. Эластик асосдаги кўп қатламли тўсин плитасини деформацияланиш жараёнини тавсифловчи ёпиқ интегродифференциал тенгламалар системаси қурилган. Кўрилаётган масала Чебишев полиномидан фойдаланиб чексиз алгебраик тенгламалар системасини ечимига олиб келинган. Масала ечимини олиш учун Чебишев полиноми ҳадлари сонининг керакли аниқлиги ўрнатилган. Масаланинг ечиш услубининг эффективлиги тест масалаларда кўрсатилган.*

Калит сўзлар: *тўсин плитаси, асос, ўзаро таъсир, Чебишев полиноми, алгебраик система*.

Mamasoliev K., Sindarov J., Toshmatov E. Estimation of internal force factors in multi-layer beam slabs on an elastic foundation

Abstract: *A mathematical model and method for assessing the internal force factors in multilayer beam slabs on an elastic foundation under various static loads are develope in the article. A detailed review of well-known publications on assessing the stress-strain state and dynamic behavior of various structures together with the foundation is given. A closed system of integral-differential equations describing the process of deformation of multilayer beam slabs on an elastic foundation is derive. The problem under consideration was reduce using the Chebyshev polynomial to the solution of infinite systems of algebraic equations. The number of terms of the Chebyshev polynomial was establishe to obtain a solution to the problem with the required accuracy. The efficiency of the method for solving the problem is show in the example of test problems.*