

Математическое моделирование изменения уровня грунтовых вод в двухслойных средах

Н Равшанов¹, Ш Далиев², З Абдуллаев³, Ш Туркманова³

¹Научно-исследовательский институт цифровых технологий и искусственного интеллекта, 17А, Боз-2, Ташкент, 100125, Узбекистан

²Самаркандский государственный университет, Университетский бульвар, 15, Самарканд, 140104, Узбекистан

³Ташкентский национальный исследовательский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, пр. Кари Ниязова, 39, г. Ташкент, 100000, Узбекистан

Аннотация. В статье рассмотрен процесс прогнозирования изменения уровней грунтовых и напорных вод и концентрации солей в пластах с хорошей и плохой проводимостью. Исследование и принятие решений по этому процессу с помощью математического моделирования является актуальной задачей. Представлен краткий анализ научных работ, посвященных математическому и численному моделированию исследуемого объекта. Для комплексного исследования рассматриваемого процесса были разработаны модель и эффективный численный алгоритм, основанный на методе конечных разностей. Как следует из анализа проведенных вычислительных экспериментов, основными факторами, существенно влияющими на фильтрацию грунтовых и напорных вод и солесодержание, являются фильтрационная проводимость в пластах, коэффициент водоотдачи и скорость фильтрационного потока в пластах.

Ключевые слова: математическая модель, численное исследование, фильтрация, подземные воды, водоносный горизонт, мониторинг, прогнозирование

Введение

Ухудшение гидродинамического режима грунтовых и напорных вод и процесс минерализации грунтовых вод привели к снижению плодородия прибрежных пастбищ и земель, прилегающих к рекам Амударья и Сырдарья. В частности, падение уровня Аральского моря существенно изменило водоносные горизонты, эксплуатацию подземных вод в прибрежной зоне и оказало негативное воздействие на окружающую среду. В частности, общие естественные запасы подземных вод Узбекистана оцениваются в 24,35 км³. Из этого количества 20,79 км³ приходится на четвертичный слой, 2,92 км³ — на верхнеплиоцен-четвертичный слой и 0,46 км³ — на верхнемеловой слой. Пресные подземные воды сосредоточены в основном в Ферганской долине (34,5 %), а также в Ташкенте (25,7 %), Самарканде (18 %), Сурхандарьинской (9 %) и Kashkadarya (5.5%) регионах, а остальные запасы воды засоленные или солоноватые, их использование ограничено. Пресная вода в других районах составляет всего 7%. В западной части страны (низовья Зеравшана и бассейны рек Кашкадарья, Сырдарья, Амударья и Центральные Кызылкумы) подземные воды сильно минерализованы и жестки. За последние 10-15 лет вода линзы подземных вод, используемая для питьевого водоснабжения Хорезмской области и Республики Каракалпакстан, сформированная за счет стока крупных рек (Амударья и оросительных каналов), не соответствует требованиям национальных нормативов. за счет повышенной минерализации и жесткости (эффект ирригации) [14]. С этой точки зрения можно прогнозировать изменения уровня и минерализации подземных вод и принимать решения и разрабатывать рекомендации, используя математические модели, описывающие изучаемый процесс.

Для основных характеристик изменения динамики подземного стока были предложены и исследованы следующие математические модели:

для стационарного движения по Лапласу $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$;

для стационарного движения в процессах пуассоновской инфильтрации $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{W}{T} = 0$;

для нестационарного течения воды под давлением по Фурье $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial t}$;

для нестационарного течения подземных вод по Буссинеску $\frac{\partial}{\partial x} (kh \frac{\partial h}{\partial x}) + W = \mu \frac{\partial h}{\partial t}$.

На основании проведенного выше анализа уравнений Лапласа, Пуассона, Фурье, Буссинеска следует, что для объектов все этапы развития математических моделей должны быть взаимосвязаны иерархическим образом. Это, в свою очередь, дает исследователю возможность определить дальнейшее направление. Наличие информации об объекте позволяет преобразовать информационную модель в математическую. Проведение вычислительных экспериментов на основе математической модели позволяет определять основные параметры и важные факторы, прогнозировать состояние объекта в различных условиях, осуществлять оптимальное управление объектом исходя из поставленной задачи исследования.

При создании математической модели, выражающей связь между подземными и напорными водами, используются системы линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями, основанные на законах гидравлики. В [9] разработана математическая модель процесса засоления с использованием инфильтрации слоистых почв, насыщенных водой. Для решения задачи использовался метод конечных разностей. Представлены результаты численных экспериментов. Задача о двумерном устойчивом течении подземных вод рассмотрена в [10]. Получено аналитическое решение для исследования процесса взаимовлияния водного и подземного потоков. В [18] разработана модель утечки жидкости в высокопроницаемом слое и найдено конкретное решение. Однако в слоях с плохой проницаемостью упругий режим не учитывался. В [21] с учетом изменения климата дан физический анализ запасов опресненных вод. Предложена физическая модель для прогнозирования и мониторинга изменений грунтовых и напорных вод. С использованием возможностей информационных и коммуникационных технологий разработаны методы прогнозирования изменений подземных вод для принятия управленческих решений при изменении уровня подземных вод. В [27] разработана математическая модель для мониторинга и прогнозирования изменения уровня грунтовых вод и концентрации солей, а также для отражения процессов подтопления, засоления и заболачивания при проектировании гидротехнических сооружений. Представлен качественный анализ исследовательской работы по данному вопросу. Поскольку процесс описывается нелинейным дифференциальным уравнением, для его решения был разработан численный алгоритм, основанный на конечно-разностных схемах. Усовершенствованы математические модели геофильтрационных процессов миграции солей и разработаны вычислительные алгоритмы. Разработан численный алгоритм задачи расчета изменения уровня грунтовых вод с учетом активной пористости, дебита в двухслойной толще.

Исследование в [26] решает актуальную проблему, связанную с процессом изменения уровня грунтовых вод и переноса минеральных солей в почвах. С целью вывода математической модели рассматриваемого процесса в статье приводится подробный обзор научных статей, посвященных различным аспектам и математическому обеспечению объекта исследования. Для проведения комплексного исследования процесса фильтрации и изменения солевого режима подземных вод предлагается математическая модель, описывающая систему дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующие ей начальные, внутренние и граничные условия разного рода и эффективная численная алгоритм, учитывающий внешние источники и испарения; для



нелинейных членов используется итерационная схема, где проверяется сходимость итерационного метода. В [28] предложена математическая модель изменения подземных вод с учетом температурного градиента северных побережий Китая. Результаты численных решений показали, что градиент температуры почвы оказывает большее влияние на водно-солевые миграции в почвах, чем водный поток.

В [12, 13] для комплексного исследования процесса фильтрации в грунтовых и напорных водах была разработана математическая модель, учитывающая внешний источник, испарение, коэффициенты фильтрации и эффективный численный алгоритм прогнозирования изменения уровня грунтовых вод. используя комбинацию конечно-разностных схем и сквозных методов. В [39] предложена математическая модель процесса переноса влаги в грунты с учетом гидродинамических параметров пористых сред и разработан численный алгоритм проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ. Механизмы естественной регенерации подземных водоемов рассмотрены в [40]. На основе обобщенного резервуара подземных вод разработана методика двумерной модели песчаного резервуара. Для изучения различных вариантов расположения бассейна и интенсивности заполнения были разработаны методы повышения эффективности заполнения бассейна искусственными подземными водами.

Фильтрация подземных вод моделировалась в [41] с учетом неравномерного распределения и сокращения вод в водоносном горизонте из-за недостаточности данных об объекте. В статье рассмотрена вертикальная стратификация равномоного слоя воды. В [25] разработана математическая модель для прогнозирования изменения уровня грунтовых и напорных вод в двухслойных средах. При математическом моделировании процесса геофильтрации учитывались подземные водоносные горизонты (с плохой проницаемостью) и проточные водоносные горизонты. В работе [30] предлагается определение асимптотики потока загрязненных подземных вод, возникающего при стабилизации процесса миграции вредных веществ в пористой среде; в [35] рассматривается численное моделирование гидрогеологических процессов при решении задачи опреснения высокоминерализованных запасов амударьинской воды в сложных геофильтрационно-геомиграционных условиях.

В [23] предложены модели течения подземных вод, ограниченных слабопроводящими слоями, а в [32] предложен метод исследования течения растворенных солей в грунтовых водах, численное моделирование нестационарных задач при движении двух-компонентной жидкости в пористой среде развивается. В [34] разработана модель Simulink для задачи формирования ресурсов подземных вод и задач создания имитационных моделей, задачи повышения качества формирования ресурсов, а также процесса возникновения минерализованных вод в бассейнах, подземных вод. и их опреснение. В [33] разработана индефинитно-детерминированная математическая модель восстановления подземных вод в почве, водонакопления и состояния фильтрации солей. Разработанная математическая модель восстановления грунтовых вод в почве решена численным методом.

Мониторинг и прогнозирование изменений движения подземных вод, определение основных показателей и параметров объекта осуществлялись путем проведения многочисленных вычислительных экспериментов с использованием математических моделей гидрогеологических, гидродинамических и геофильтрационных процессов [2]. В частности, Абуталиев Ф.Б. и Усманов Р.Н. исследовали и усовершенствовали математические модели изменения уровня грунтовых вод и процессов переноса солей в слоисто-пористых средах [7].

В исследовании [11] изложены теоретические основы и практическое значение гидрогеологических исследований, проектирования горнодобывающих предприятий, мелиорации, водоснабжения и других видов деятельности, связанных с подземными водами. В исследовании [38] предложены модели, позволяющие получать достоверную информацию об изменении уровня грунтовых вод, интенсифицировать мелиорацию агроландшафтов, оптимизировать расчет сельскохозяйственного дренажа, корректировать управление водным режимом сельскохозяйственных угодий. В [22] исследуются причины и физические аспекты загрязнения подземных вод, приводится информация о существующих математических моделях загрязнения подземных вод и их применении.

При разработке математической модели, представляющей взаимодействие грунтовых и напорных вод, используется система линейных и нелинейных дифференциальных уравнений



с частными производными с учетом основных законов гидродинамики и соответствующих граничных условий.

Материалы и методы

В отличие от работ [1,3,4,6,8,17,16,24,20,36,37], посвященных проблеме математического моделирования изменений уровня грунтовых вод и процессов солепереноса в подземных водоносных горизонтах, на основе анализа гидрогеологических, геофильтрационных процессов авторы рассматривают двухслойную среду, состоящую из двух водоносных горизонтов, разделенных грунтовыми и напорными водами. В этом случае необходимо математическое моделирование изменения уровня грунтовых вод и концентрации солей (в грунтовых и напорных водах) в двухпластовом резервуаре, состоящем из двух водоносных горизонтов, а также гидродинамических и геофильтрационных процессов, протекающих в них. Ввиду изложенного в статье исследуется процесс с учетом таких важных параметров, как функциональные зависимости, характеризующие внешние источники и испарение, пористость почвы, скорость течения, а также общие граничные условия, выражающие инфильтрацию в направлениях оттока и притока осей, и дает математическую модель, описываемую следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [26,27,28]:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 n_0 \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 m \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_1 m \frac{\partial h}{\partial z} \right) + k_1 \frac{H-h}{m} + f - \omega, \\ \mu_2 \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 m \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_2 m \frac{\partial H}{\partial z} \right) + k_2 \frac{h-H}{m} - \eta Q, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $h(x, z, t)$, $H(x, z, t)$ уровни грунтовых и напорных вод; m - толщина; f - внешний источник; ω - испарение; μ_1 , μ_2 - коэффициенты водоотдачи; k_1 , k_2 - коэффициенты фильтрации верхнего и нижнего слоев; Q - производительность; n_0 - пористость, η - коэффициент перевода модели в размерную форму.

Система (1) решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$h|_{t=0} = h_0, \quad H|_{t=0} = H_0, \quad (2)$$

$$\mu_1 m \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(h - h_0), \quad \mu_1 m \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = (h - h_0), \quad (3)$$

$$\mu_1 m \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(h - h_0), \quad \mu_1 m \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = (h - h_0), \quad (4)$$

$$\mu_2 m \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(H - H_0), \quad \mu_2 m \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = (H - H_0), \quad (5)$$

$$\mu_2 m \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(H - H_0), \quad \mu_2 m \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = (H - H_0), \quad (6)$$

Для решения задач (1)–(8) введем безразмерные величины:

$$h^* = \frac{h}{h_0}, \quad H^* = \frac{H}{H_0}, \quad x^* = \frac{x}{L_x}, \quad z^* = \frac{z}{L_z}, \quad k_1^* = \frac{k_1}{(k_1)_0}, \quad \tau = \frac{(k_1)_0 m_0}{\mu_1 n_0 L_x^2} t, \quad m^* = \frac{m}{m_0}, \quad k_2^* = \frac{k_2}{(k_2)_0},$$

$$(k_2)_0 = \frac{\mu_2 (k_1)_0}{\mu_1 n_0}.$$

После обезразмеривания задачи (1)–(8) принимают следующий вид:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h^*}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x^*} (k_1^* m^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*}) + \frac{L_x^2}{L_z^2} \frac{\partial}{\partial z^*} (k_1^* m^* \frac{\partial h^*}{\partial z^*}) + \frac{L_x^2 H_0}{m_0^2 h_0} \frac{k_1^* H^*}{m^*} - \frac{L_x^2}{m_0^2} \frac{k_1^* h^*}{m^*} + \frac{L_x^2}{(k_1)_0 m_0 h_0} (f - \omega), \\ \frac{\partial H^*}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x^*} (k_2^* m^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*}) + \frac{L_x^2}{L_z^2} \frac{\partial}{\partial z^*} (k_2^* m^* \frac{\partial H^*}{\partial z^*}) + \frac{L_x^2 h_0}{m_0^2 H_0} \frac{k_2^* h^*}{m^*} - \frac{L_x^2}{m_0^2} \frac{k_2^* H^*}{m^*} - \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 (k_1)_0 m_0 H_0} \eta Q, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Граничные условия:

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_x} m^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = -(h_0 h^* - h_0), \quad \frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_x} m^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} = (h_0 h^* - h_0), \quad (8)$$

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_z} m^* \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} = -(h_0 h^* - h_0), \quad \frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_z} m^* \frac{\partial h^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=1} = (h_0 h^* - h_0), \quad (9)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_x} m^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = -(H_0 H^* - H_0), \quad \frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_x} m^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} = (H_0 H^* - H_0), \quad (10)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_z} m^* \frac{\partial H^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} = -(H_0 H^* - H_0), \quad \frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_z} m^* \frac{\partial H^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=1} = (H_0 H^* - H_0). \quad (11)$$

В дальнейшем для простоты знак «*» в уравнениях будем опускать, а задача (7)–(11) в безразмерных переменных записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} (k_1 m \frac{\partial h}{\partial x}) + \xi \frac{\partial}{\partial z} (k_1 m \frac{\partial h}{\partial z}) + \xi_2 \xi_3 \frac{k_1 H}{m} - \xi_3 \frac{k_1 h}{m} + \xi_1 (f - \omega), \\ \frac{\partial H}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} (k_2 m \frac{\partial H}{\partial x}) + \xi \frac{\partial}{\partial z} (k_2 m \frac{\partial H}{\partial z}) + \frac{\xi_3}{\xi_2} \frac{k_2 h}{m} - \xi_3 \frac{k_2 H}{m} - \xi_4 \eta Q, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{здесь } \xi = \frac{L_x^2}{L_z^2}, \quad \xi_1 = \frac{L_x^2}{(k_1)_0 m_0 h_0}, \quad \xi_2 = \frac{H_0}{h_0}, \quad \xi_3 = \frac{L_x^2}{m_0^2}, \quad \xi_4 = \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 (k_1)_0 m_0 H_0}.$$

Граничные условия принимают следующий вид:

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_x} m \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(h_0 h - h_0), \quad \frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_x} m \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=1} = (h_0 h - h_0), \quad (13)$$

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_z} m \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(h_0 h - h_0), \quad \frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_z} m \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=1} = (h_0 h - h_0), \quad (14)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_x} m \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(H_0 H - H_0), \quad \frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_x} m \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=1} = (H_0 H - H_0), \quad (15)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_z} m \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(H_0 H - H_0), \quad \frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_z} m \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=1} = (H_0 H - H_0). \quad (16)$$

Для решения задач (12)–(16) воспользуемся неявной разностной схемой второго порядка с точностью $O[(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta \tau)^2]$ [17,16,20,32,24,14,5,19,29]. Для этого введем сетку с шагами $\Delta x, \Delta z, \Delta \tau$ в домене $D = \{0 \leq x < L_x, 0 \leq z < L_z, 1 \leq t \leq N\}$, с учетом граничных условий: $\omega_{\Delta x, \Delta z, \Delta \tau} = \{(x_i, z_j, t_n), x_i = i \Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, I; z_j = j \Delta z, j = 0, 1, 2, \dots, J; t_n = n \Delta \tau, n = 1, 2, \dots, N\}$. В сетке $\omega_{\Delta x, \Delta z, \Delta \tau}$, по неявной схеме аппроксимируем систему (12) и граничные условия (12)–(16), по направлению Ox в слое по $n + \frac{1}{2}$ [27,26,12,25,2,3]:



$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{0.5\Delta\tau(k_1)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j}}{\Delta x^2} h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{0.5\Delta\tau((k_1)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j} + (k_1)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j})}{\Delta x^2} + \right. \\
& \quad \left. + 0.5\Delta\tau_{\xi_3}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j}}{m_{i,j}} \right) h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{0.5\Delta\tau(k_1)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j}}{\Delta x^2} h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \\
& = - \left(H_{i,j}^n + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5}h_{i,j-1}^n - ((k_1)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5} + (k_1)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5})h_{i,j}^n}{\Delta z^2} + \right. \\
& \quad \left. + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5}h_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} + 0.5\Delta\tau_{\xi_2\xi_3}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j}}{m_{i,j}} H_{i,j}^n + 0.5\Delta\tau_{\xi_1}^{\xi}(f - \omega) \right), \\
& \frac{0.5\Delta\tau(k_2)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j}}{\Delta x^2} H_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{0.5\Delta\tau((k_2)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j} + (k_2)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j})}{\Delta x^2} + \right. \\
& \quad \left. + 0.5\Delta\tau_{\xi_3}^{\xi} \frac{(k_2)_{i,j}}{m_{i,j}} \right) H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{0.5\Delta\tau(k_2)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j}}{\Delta x^2} H_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \\
& = - \left(H_{i,j}^n + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_2)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5}H_{i,j-1}^n - ((k_2)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5} + (k_2)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5})H_{i,j}^n}{\Delta z^2} + \right. \\
& \quad \left. + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_2)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5}H_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} + 0.5\Delta\tau_{\xi_2}^{\xi} \frac{\xi_3}{\xi_2} \frac{(k_2)_{i,j}}{m_{i,j}} h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 0.5\Delta\tau_{\xi_4}^{\xi}\eta Q \right).
\end{aligned} \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

Проведя некоторые преобразования и сгруппировав подобные члены, конечно-разностную систему (17) перепишем в следующем виде:

$$a_{i,j}h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - b_{i,j}h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + c_{i,j}h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -d_{i,j}^n, \quad (18)$$

$$\bar{a}_{i,j}H_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{b}_{i,j}H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{c}_{i,j}H_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\bar{d}_{i,j}^n, \quad (19)$$

здесь

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \frac{0.5\Delta\tau(k_1)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j}}{\Delta x^2}, \quad c_{i,j} = \frac{0.5\Delta\tau(k_1)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j}}{\Delta x^2}, \\
b_{i,j} &= 1 + \frac{0.5\Delta\tau((k_1)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j} + (k_1)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j})}{\Delta x^2} + 0.5\Delta\tau_{\xi_3}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j}}{m_{i,j}}, \\
d_{i,j}^n &= h_{i,j}^n + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5}h_{i,j-1}^n - ((k_1)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5} + (k_1)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5})h_{i,j}^n}{\Delta z^2} + \\
& + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5}h_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} + 0.5\Delta\tau_{\xi_2\xi_3}^{\xi} \frac{(k_1)_{i,j}}{m_{i,j}} H_{i,j}^n + 0.5\Delta\tau_{\xi_1}^{\xi}(f - \omega), \\
\bar{a}_{i,j} &= \frac{0.5\Delta\tau(k_2)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j}}{\Delta x^2}, \quad \bar{c}_{i,j} = \frac{0.5\Delta\tau(k_2)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j}}{\Delta x^2}, \\
\bar{b}_{i,j} &= 1 + \frac{0.5\Delta\tau((k_2)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j} + (k_2)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j})}{\Delta x^2} + 0.5\Delta\tau_{\xi_3}^{\xi} \frac{(k_2)_{i,j}}{m_{i,j}}, \\
\bar{d}_{i,j}^n &= H_{i,j}^n + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_2)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5}H_{i,j-1}^n - ((k_2)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5} + (k_2)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5})H_{i,j}^n}{\Delta z^2} + \\
& + 0.5\Delta\tau_{\xi}^{\xi} \frac{(k_2)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5}H_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} + 0.5\Delta\tau_{\xi_2}^{\xi} \frac{\xi_3}{\xi_2} \frac{(k_2)_{i,j}}{m_{i,j}} h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 0.5\Delta\tau_{\xi_4}^{\xi}\eta Q.
\end{aligned}$$



Полученные системы уравнений (18) и (19) относительно искомым переменных решаются методом прогонки, где коэффициенты прогонки вычисляются как:

$$h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{i+1,j} h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{i+1,j}^n, \quad (20)$$

$$H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{\alpha}_{i+1,j} H_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{\beta}_{i+1,j}^n, \quad (21)$$

$$\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}^n, \bar{\alpha}_{i,j}, \bar{\beta}_{i,j}^n - \text{коэффициенты развертки } \alpha_{i+1,j} = \frac{c_{i,j}}{b_{i,j} - a_{i,j} \alpha_{i,j}}, \quad \beta_{i+1,j}^n = \frac{d_{i,j}^n + a_{i,j} \beta_{i,j}^n}{b_{i,j} - a_{i,j} \alpha_{i,j}},$$

$$\bar{\alpha}_{i+1,j} = \frac{\bar{c}_{i,j}}{\bar{b}_{i,j} - \bar{a}_{i,j} \bar{\alpha}_{i,j}}, \quad \bar{\beta}_{i+1,j}^n = \frac{\bar{d}_{i,j}^n + \bar{a}_{i,j} \bar{\beta}_{i,j}^n}{\bar{b}_{i,j} - \bar{a}_{i,j} \bar{\alpha}_{i,j}}$$

Теперь соответственно аппроксимируем граничные условия (13)-(16) и получаем:

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_x} m_{1,j} \frac{h_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} - 4h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 3h_{2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = -(h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_0), \quad (22)$$

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_x} m_{1,j} \frac{-3h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 4h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = (h_0 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_0), \quad (23)$$

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_z} m_{i,1} \frac{h_{i,0}^{n+1} - 4h_{i,1}^{n+1} + 3h_{i,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -(h_0 h_{i,1}^{n+1} - h_0), \quad (24)$$

$$\frac{\mu_1 m_0 h_0}{L_z} m_{i,j} \frac{-3h_{i,j-1}^{n+1} + 4h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta z} = (h_0 h_{i,j}^{n+1} - h_0), \quad (25)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_x} m_{1,j} \frac{H_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} - 4H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 3H_{2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = -(H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - H_0), \quad (26)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_x} m_{1,j} \frac{-3H_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 4H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = (H_0 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - H_0), \quad (27)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_z} m_{i,1} \frac{H_{i,0}^{n+1} - 4H_{i,1}^{n+1} + 3H_{i,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -(H_0 H_{i,1}^{n+1} - H_0), \quad (28)$$

$$\frac{\mu_2 m_0 H_0}{L_z} m_{i,j} \frac{-3H_{i,j-1}^{n+1} + 4H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta z} = (H_0 H_{i,j}^{n+1} - H_0), \quad (29)$$

Если $i = 1$, то вместо уравнений (18) и (19) получаем:

$$h_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{a_{1,j}}{c_{1,j}} h_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b_{1,j}}{c_{1,j}} h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{d_{1,j}^n}{c_{1,j}}, \quad (30)$$

$$H_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\bar{a}_{1,j}}{\bar{c}_{1,j}} H_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\bar{b}_{1,j}}{\bar{c}_{1,j}} H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\bar{d}_{1,j}^n}{\bar{c}_{1,j}} \quad (31)$$

С учетом (22) и (26) путем упрощения граничных условий получаем:

$$h_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} h_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2\Delta x L_x h_0}{3\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j}} \right) h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x h_0}{3\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j}}, \quad (32)$$

$$H_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} H_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{4\mu_2 m_0 m_{1,j} - 2\Delta x L_x}{3\mu_2 m_0 m_{1,j}} H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x}{3\mu_2 m_0 m_{1,j}} \quad (33)$$



Сравнивая (30) с (32) и (31) с (33), находим $h_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и $H_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$h_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} b_{1,j} - 4\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} c_{1,j} + 2\Delta x L_x h_0 c_{1,j}}{\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} (3a_{1,j} - c_{1,j})} h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{3d_{1,j}^n \mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} + 2\Delta x L_x h_0 c_{1,j}}{\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} (3a_{1,j} - c_{1,j})}, \quad (34)$$

$$H_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3\mu_2 m_0 m_{1,j} \bar{b}_{1,j} - 4\mu_2 m_0 m_{1,j} \bar{c}_{1,j} + 2\Delta x L_x \bar{c}_{1,j}}{\mu_2 m_0 m_{1,j} (3\bar{a}_{1,j} - \bar{c}_{1,j})} H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{3\mu_2 m_0 m_{1,j} \bar{d}_{1,j}^n + 2\Delta x L_x \bar{c}_{1,j}}{\mu_2 m_0 m_{1,j} (3\bar{a}_{1,j} - \bar{c}_{1,j})}. \quad (35)$$

Если $i = 0$, то вместо уравнений (20) и (21) получаем:

$$h_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{1,j} h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{1,j}^n, \quad (36)$$

$$H_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{\alpha}_{1,j} H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{\beta}_{1,j}^n \quad (37)$$

Сравнивая уравнения (34) и (36), (35) и (37), находим начальные значения коэффициентов $\alpha_{1,j}$, $\beta_{1,j}^n$ и $\bar{\alpha}_{1,j}$, $\bar{\beta}_{1,j}^n$ в Ox направлении:

$$\alpha_{1,j} = \frac{3\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} b_{1,j} - 4\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} c_{1,j} + 2\Delta x L_x h_0 c_{1,j}}{\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} (3a_{1,j} - c_{1,j})}, \quad \beta_{1,j}^n = -\frac{3d_{1,j}^n \mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} + 2\Delta x L_x h_0 c_{1,j}}{\mu_1 m_0 h_0 m_{1,j} (3a_{1,j} - c_{1,j})},$$

$$\bar{\alpha}_{1,j} = \frac{3\mu_2 m_0 m_{1,j} \bar{b}_{1,j} - 4\mu_2 m_0 m_{1,j} \bar{c}_{1,j} + 2\Delta x L_x \bar{c}_{1,j}}{\mu_2 m_0 m_{1,j} (3\bar{a}_{1,j} - \bar{c}_{1,j})}, \quad \bar{\beta}_{1,j}^n = -\frac{3\mu_2 m_0 m_{1,j} \bar{d}_{1,j}^n + 2\Delta x L_x \bar{c}_{1,j}}{\mu_2 m_0 m_{1,j} (3\bar{a}_{1,j} - \bar{c}_{1,j})}.$$

При $i = I$, уравнения (18) и (19) принимают следующий вид:

$$h_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{a_{I,j}}{c_{I,j}} h_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b_{I,j}}{c_{I,j}} h_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{d_{I,j}^n}{c_{I,j}}, \quad (38)$$

$$H_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\bar{a}_{I,j}}{\bar{c}_{I,j}} H_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\bar{b}_{I,j}}{\bar{c}_{I,j}} H_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\bar{d}_{I,j}^n}{\bar{c}_{I,j}}, \quad (39)$$

В результате упрощения вместо уравнений (23) и (27) получаем:

$$h_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -3h_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{4\mu_1 m_0 h_0 m_{I,j} - 2\Delta x L_x h_0}{\mu_1 m_0 h_0 m_{I,j}} h_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x h_0}{\mu_1 m_0 h_0 m_{I,j}}, \quad (40)$$

$$H_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -3H_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{4\mu_2 m_0 m_{I,j} - 2\Delta x L_x}{\mu_2 m_0 m_{I,j}} H_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x}{\mu_2 m_0 m_{I,j}}, \quad (41)$$

Если $i = I - 1$, то уравнения (20) и (21) преобразуются и получаем:

$$h_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{I,j} h_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{I,j}^n, \quad (42)$$

$$H_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{\alpha}_{I,j} H_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{\beta}_{I,j}^n, \quad (43)$$

Сравнивая уравнения (38), (40), (42) и (39), (41), (43) соответственно, находим граничные значения уровней грунтовых и напорных вод в Ox направлении:

$$h_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\beta_{I,j}^n \mu_1 m_0 h_0 m_{I,j} (a_{I,j} - 3c_{I,j}) + 2\Delta x L_x h_0 c_{I,j} + d_{I,j}^n \mu_1 m_0 h_0 m_{I,j}}{b_{I,j} \mu_1 m_0 h_0 m_{I,j} - 4\mu_1 m_0 h_0 m_{I,j} c_{I,j} + 2\Delta x L_x h_0 c_{I,j} - \alpha_{I,j} \mu_1 m_0 h_0 m_{I,j} (a_{I,j} - 3c_{I,j})},$$



$$H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\Delta x L_z \bar{c}_{i,j} + \mu_2 m_0 m_{i,j} \bar{d}_{i,j}^n + \mu_2 m_0 m_{i,j} (\bar{a}_{i,j} - 3\bar{c}_{i,j}) \bar{\beta}_{i,j}^n}{\mu_2 m_0 m_{i,j} \bar{b}_{i,j} - 4\mu_2 m_0 m_{i,j} \bar{c}_{i,j} + 2\Delta x L_z \bar{c}_{i,j} - \mu_2 m_0 m_{i,j} (\bar{a}_{i,j} - 3\bar{c}_{i,j}) \bar{\alpha}_{i,j}}$$

Применяя описанный выше алгоритм, найдите значения $\bar{a}_{i,j}$, $\bar{b}_{i,j}$, $\bar{c}_{i,j}$, $\bar{d}_{i,j}^n$, $\tilde{a}_{i,j}$, $\tilde{b}_{i,j}$, $\tilde{c}_{i,j}$, $\tilde{d}_{i,j}^n$, $\bar{\alpha}_{i,1}$, $\bar{\beta}_{i,1}^n$, $\tilde{\alpha}_{i,1}$, $\tilde{\beta}_{i,1}^n$, $h_{i,j}^{n+1}$, $H_{i,j}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i,j} &= \frac{0.5\Delta\tau\zeta(k_1)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5}}{\Delta z^2}, \quad \bar{c}_{i,j} = \frac{0.5\Delta\tau\zeta(k_1)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5}}{\Delta z^2}, \\ \bar{b}_{i,j} &= 1 + \frac{0.5\Delta\tau\zeta((k_1)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5} + (k_1)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5})}{\Delta z^2} + 0.5\Delta\tau\zeta_3 \frac{(k_1)_{i,j}}{m_{i,j}}, \\ \bar{d}_{i,j}^n &= h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + 0.5\Delta\tau \frac{(k_1)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j}h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - ((k_1)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j} + (k_1)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j})h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \\ &+ 0.5\Delta\tau \frac{(k_1)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j}h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + 0.5\Delta\tau\zeta_2\zeta_3 \frac{(k_1)_{i,j}}{m_{i,j}} H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + 0.5\Delta\tau\zeta_1(f - \omega), \\ \tilde{a}_{i,j} &= \frac{0.5\Delta\tau\zeta(k_2)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5}}{\Delta z^2}, \quad \tilde{c}_{i,j} = \frac{0.5\Delta\tau\zeta(k_2)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5}}{\Delta z^2}, \\ \tilde{b}_{i,j} &= 1 + \frac{0.5\Delta\tau\zeta((k_2)_{i,j-0.5}m_{i,j-0.5} + (k_2)_{i,j+0.5}m_{i,j+0.5})}{\Delta z^2} + 0.5\Delta\tau\zeta_3 \frac{(k_2)_{i,j}}{m_{i,j}}, \\ \tilde{d}_{i,j}^n &= H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + 0.5\Delta\tau \frac{(k_2)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j}H_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - ((k_2)_{i-0.5,j}m_{i-0.5,j} + (k_2)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j})H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \\ &+ 0.5\Delta\tau \frac{(k_2)_{i+0.5,j}m_{i+0.5,j}H_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{0.5\Delta\tau\zeta_3}{\zeta_2} \frac{(k_2)_{i,j}}{m_{i,j}} h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - 0.5\Delta\tau\zeta_4\eta\Omega. \\ \bar{\alpha}_{i,1} &= \frac{3\mu_1 m_0 h_0 m_{i,1} \bar{b}_{i,1} - 4\mu_1 m_0 h_0 m_{i,1} \bar{c}_{i,1} + 2\Delta z L_z h_0 \bar{c}_{i,1}}{\mu_1 m_0 h_0 m_{i,1} (3\bar{a}_{i,1} - \bar{c}_{i,1})}, \quad \bar{\beta}_{i,1}^n = -\frac{3\mu_1 m_0 h_0 m_{i,1} \bar{d}_{i,1}^n + 2\Delta z L_z h_0 \bar{c}_{i,1}}{\mu_1 m_0 h_0 m_{i,1} (3\bar{a}_{i,1} - \bar{c}_{i,1})}, \\ \tilde{\alpha}_{i,1} &= \frac{3\mu_2 m_0 m_{i,1} \tilde{b}_{i,1} - 4\mu_2 m_0 m_{i,1} \tilde{c}_{i,1} - 2\Delta z L_z \tilde{c}_{i,1}}{\mu_2 m_0 m_{i,1} (3\tilde{a}_{i,1} - \tilde{c}_{i,1})}, \quad \tilde{\beta}_{i,1}^n = -\frac{2\Delta z L_z \tilde{c}_{i,1} + 3\mu_2 m_0 m_{i,1} \tilde{d}_{i,1}^n}{\mu_2 m_0 m_{i,1} (3\tilde{a}_{i,1} - \tilde{c}_{i,1})}. \\ h_{i,j}^{n+1} &= \frac{\bar{\beta}_{i,j}^n \mu_1 m_0 h_0 m_{i,j} (\bar{a}_{i,j} - 3\bar{c}_{i,j}) + 2\Delta z L_z h_0 \bar{c}_{i,j} + \bar{d}_{i,j}^n \mu_1 m_0 h_0 m_{i,j}}{\bar{b}_{i,j} \mu_1 m_0 h_0 m_{i,j} - 4\mu_1 m_0 h_0 m_{i,j} \bar{c}_{i,j} + 2\Delta z L_z h_0 \bar{c}_{i,j} - \bar{\alpha}_{i,j} \mu_1 m_0 h_0 m_{i,j} (\bar{a}_{i,j} - 3\bar{c}_{i,j})}, \\ H_{i,j}^{n+1} &= \frac{2\Delta z L_z \tilde{c}_{i,j} + \mu_1 m_0 m_{i,j} \tilde{d}_{i,j}^n + \mu_1 m_0 m_{i,j} (\tilde{a}_{i,j} - 3\tilde{c}_{i,j}) \tilde{\beta}_{i,j}^n}{\mu_1 m_0 m_{i,j} \tilde{b}_{i,j} - 4\mu_1 m_0 m_{i,j} \tilde{c}_{i,j} + 2\Delta z L_z \tilde{c}_{i,j} - \mu_1 m_0 m_{i,j} (\tilde{a}_{i,j} - 3\tilde{c}_{i,j}) \tilde{\alpha}_{i,j}}. \end{aligned}$$

Используя метод обратной развертки, значения $h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$, $h_{i-2,j}^{n+\frac{1}{2}}$, ..., $h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$, $H_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$, $H_{i-2,j}^{n+\frac{1}{2}}$, ..., $H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ уровней грунтовых и напорных вод в пласте $n + \frac{1}{2}$ во времени в направлении, а значения $h_{i,j-1}^{n+1}$, $h_{i,j-2}^{n+1}$, ..., $h_{i,1}^{n+1}$, $H_{i,j-1}^{n+1}$, $H_{i,j-2}^{n+1}$, ..., $H_{i,1}^{n+1}$ уровней подземных и напорных вод в пластах $n + 1$ во времени Oz в направлении.



Результаты

Машинный алгоритм решения задачи следующий:

- 1-й шаг. Ввод исходных (исходных) данных (ввод констант).
- 2-й шаг. Вычисление граничных значений искомым переменных из граничных условий задачи.
- 3-й шаг. Вычисление элементов трехдиагональной матрицы перехода, полученной приближением дифференциальных операторов к конечно-разностным.
- 4-й шаг. Расчет коэффициентов развертки.
- 5-й шаг. Расчет значений искомым переменных задачи.
- 6-й шаг. Проверка адекватности задания.
- 7-й шаг. Интерпретация результатов компьютерных экспериментов.

В результате численных вычислительных экспериментов на основе разработанных вычислительных алгоритмов численного решения сложных математических моделей были построены следующие графики:

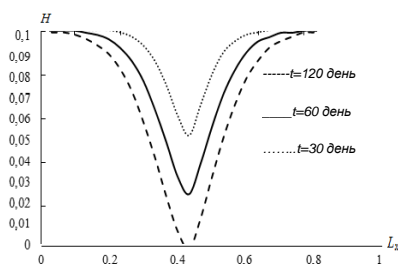


Рис. 1. Изменение уровня напорных вод на расстоянии в разные моменты времени. $f = 0.05$, $\omega = 0.02$, $n_0 = 0.07$, $Q = 0.06$

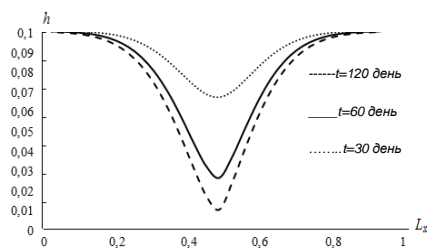


Рис. 2. Изменение уровня грунтовых вод на расстоянии в разные моменты времени. $f = 0.05$, $\omega = 0.02$, $n_0 = 0.09$, $Q = 0.02$

Как видно из результатов численных расчетов, представленных на рис. 1-2, на изменение уровня грунтовых и напорных вод влияют такие параметры, как внешние источники, испарение, влияет уровень грунтовых вод по пористости грунта и дебиту скважины. Рис. 1 и 2, показывают, что изменения концентрации солей под влиянием уровня грунтовых вод и напорных вод в водоносных горизонтах обусловлены следующими параметрами: коэффициентами водоотдачи, скоростями фильтрации, коэффициентами диффузии.

Дискуссия

В работе показано, что такие важные параметры, как функциональные взаимосвязи, пористость, скорость течения в напорном водоносном горизонте для внешних факторов и испарения в двухслойных средах, а также грунтовых водах и напорных водах основаны на нелинейных общих граничных условиях. На основе абсолютно устойчивой схемы раскрытия с высоким порядком точности по временным и пространственным переменным разработаны эффективные численно-вычислительные алгоритмы решения задач об изменении уровня грунтовых вод и концентрации солей. На основе этой математической модели и численного алгоритма результаты представлены в разделах 1 и 2 в виде графика. В летний период минерализованные воды, полученные из дебитов водоносного горизонта, сбрасываются в дренажи и сбрасываются в водохранилища. При попадании грунтовых вод в скважину в водопровод подается пресная вода. В канализационную сеть вода подается из низконапорного водоносного горизонта. В зимний период дебиты работают в напорном водоносном слое. Следует отметить, что разные режимы подземных вод приводят к взаимодействию гидродинамического и гидрохимического режимов подземных вод в обоих слоях. В таких условиях особое внимание следует уделить защите пласта от попадания высокоминерализованных вод с границ взаимодействующих пластов.



Выводы

Для проведения комплексного исследования изменения уровня грунтовых и напорных грунтовых вод и их солесодержания была разработана математическая модель и использован численный алгоритм проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ.

Предложенный математический аппарат может быть использован для мониторинга и прогнозирования уровня грунтовых вод и концентрации солей с целью принятия управленческих решений и рекомендаций по проектированию гидротехнических сооружений в рассматриваемом регионе в зависимости от гидрологических и гидродинамических параметров.

Разработанный математический и численный аппарат позволяет значительно сократить объем натурных исследований и свести к минимуму экспериментальные работы, требующие дорогостоящих ресурсов. Модели и алгоритмы могут быть использованы для прогнозирования процесса инфильтрации воды и изменения уровня воды в зонах водообеспечения, многих технологических процессов, происходящих при миграции солей, а также качественный и количественный анализ процессов в гидрогеологии. Созданный математический и численный аппарат позволяет значительно сократить объем натурных исследований и минимизировать экспериментальные работы, требующие дорогостоящих ресурсов в процессе проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ.

Использованная литература

1. Abutaliev F.B. Solving problems of transient filtration. - Tashkent: Fan, 1972. - 208 p.
2. Abutaliev F.B., Abutaliev E.B. Methods for solving problems of underground hydromechanics on a computer. - Tashkent, 1968. - 196 p.
3. Abutaliev F.B., Baklushin M.B., Umarov U.U., Yarbekov Ya., Izmailov I.I. Analysis of groundwater dynamics by analytical and numerical methods. - Tashkent: Fan, 1975. - 15 p.
4. Abutaliev F.B., Khodjibaev N.N., Umarov U.U., Izmailov I.I. Application of numerical methods and computers in hydrogeology. Tashkent: Fan, 1976.– 67 p.
5. Abutaliev F.B., Khodjibaev N.N., Umarov U.U., Izmailov I.I. Methods of mathematical modeling of hydrogeological processes. M.: Nedra, 1972. - 64 p.
6. Abutaliev F.B., Usmanov R.N. (1982). Proceedings of the 1st-All-Union Hydrogeological Conference. - M.: Nauka,- P. 140-143.
7. Abutaliev F.B., Usmanov R.N. (2001). Reports of AS RUz. - Tashkent, 2001. - No. 3. - P. 23-26.
8. Abutaliev F.B., Usmanov R.N. News of AS UzSSR, Ser. Tech. Sci. - Dep. in VINITI, P.1418-81.
9. Anatoliy Vlasyuk, Tetiana Tsvetkova, Pawel Falat, Aleksandra Klos-Witkowska, Kornel Warwas (2017) Proc. of Int. Conf. on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IEEE) p 333-338
10. Anderson E I 2003 Water Resource 39 1071.
11. Bochever F. M.. Theory and practical methods of hydrogeological calculations of operational reserves of underground waters. M: Nedra. 1968. -328 p.
12. Daliev Sh. (2020). International Journal of Advanced Science and Technology, 29(7), P. 3366 - 3381.
13. Daliev Sh., Abdullaeva B., Kubyasev K. (2020). J. Materials Science and Engineering. Conf. Series 896 (2020) 012069
14. Daliev Sh.K. (2020) .Actual problems of mathematical modeling, computational mathematics and software engineering. Republican scientific conference. Karshi, 79-82 pp.
15. Description of the state of the environment of the United Nations of Uzbekistan.// Second review. New York and Geneva, 2010 (Environment Status 29 series)
16. Dzhumanov Zh.Kh., Kazbekhov Zh.Kh., Chertkov Yu.T., Bazarov D. 2002. Bulletin of the agrarian science of Uzbekistan – Tashkent. - No. 3.- P. 47-50.
17. Gavich I.K. Hydrodynamics. - M.: Nedra, 1988. - 349 p.
18. Hantush M S (1967) J. Geophys. Res. 72 1709
19. Kalitkin, N.N. Numerical methods / N.N. Kalitkin. - St. Petersburg: BHV, 2014. - 592 p.
20. Lomakin E.A., Mironenko V.A., Shestakov V.M. Numerical modeling of geofiltration. - M.: Nedra, 1988. - 288 p.
21. Mutao H and Yong T (2015) Proc. of Int. Conf. on Sustainable Energy and Environmental Engineering (SEEE) p 134-137.
22. Nikolaevsky V.N. Mechanics of porous and cracked media. M.: Nedra, 1984.-232p.
23. Polubarinova-Kochina Ya. (1960). PMTM. -No. 1. - P. 92-95.



24. Ravshanov N, Khurramov I and Aminov S M (2019) J. of Phys.: Conf. Series 1210 012118
25. Ravshanov N., Daliev Sh. (2019). Information technologies of modeling and management. - Voronezh: Scientific book, - No. 2 (116). - P. 116-124.
26. Ravshanov N., Daliev Sh. (2020) J. of Phys.: Conf. Series 1441 012163
27. Ravshanov N., Daliev Sh. and Abdullayev Z (2020). J. Materials Science and Engineering. Conf. Series 896 (2020) 012047
28. Rong R, Juanjuan M, Qiyun Ch, Lijian Zh, Xianghong G and Xihuan S (2017) Water 9 456
29. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., Numerical methods for solving problems of convection-diffusion / - M.: KD Librokom, 2015. - 248 p
30. Serbina L.I., Vendina A.A. (2011). Bulletin of SamSU. Natural Science Series. V.5. pp. 104 - 108.
31. Sharipov D, Abdullayev Z and Khafizov O (2021) E3S Web of Conferences (Tashkent)
32. Soboleva E.B. Method for numerical study of the dynamics of salt water in soil. Math. modeling. (2014). - V. 26 (No. 2). pp. 50 - 64..
33. Usmanov R.N., Daliev Sh. (2017), Republican Sci.-Tech. Conference, Samarkand. 8-9-September, P. 24-26.
34. Usmanov R.N., Daliev Sh. (2018). Scientific-practical and informational-analytical journal "Descendants of Muhammad al-Khorezmi", Tashkent. Uzbekistan. No. 2 (4) – P. 26-30.
35. Usmanov R.N., Seitnazarov K.K. (2014). Automation and software engineering. No. 1 (7). P. 9-22.
36. Veselov V. V., Mirlas V. M., Stepanenko V. P.. Questions of modeling and optimization of hydrogeological systems.-Alma-Ata: Gylym, 1992.-232 p.
37. Veselov V. V., Mirlas V. M., V. Yu. Geo-eco-informatics. System-information approach to the problems of modeling hydrogeological objects. - Alma-Ata: Gylym, 1991. - 176 p.
38. Vasilenkov V.F., Demina O.N., Aksyonov Ya.A. 2016. International Research Journal ▪ Ekaterinburg . No. 4 (24) ▪ Part 2, DOI: 10.18454/IRJ.2016.46.112
39. Xi Chen, Zhicai Zhang, Yongqin David Chen. (2006). Promise and Progress (Proceedings of symposium S7 held during the Seventh IAHS Scientific Assembly at Foz do Iguaçu, Brazil, April 2005). IAHS Publ. 303,. P. 400-413.
40. Yang Xu, Longcang Shu, Yongjie Zhang, Peipeng Wu, Abunu Atlabachew Eshete, Esther Chifuniro Mabedi Physical Experiment and Numerical Simulation of the Artificial Recharge Effect on Groundwater Reservoir // Water (2017), 9, 908; doi:10.3390/w9120908
41. Zhongping Xu, Xun Zhou, Ruige Chen, Ye Shen, Ziqi Shang, Kuo Hai Numerical Simulation of Deep Thermal Groundwater Exploitation in the Beijing Plain Area // Water (2019), 11, 1494; doi:10.3390/w11071494

