

Математическое моделирование процесса изменения концентрации солей в подземных водах

Ш Далиев¹, З Абдуллаев², Ш Туркманова³, А Кошшаев⁴.

¹Самаркандский государственный университет, Университетский бульвар, 15, Самарканд, 140104, Узбекистан

^{2,3,4}Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства - Национальный исследовательский университет, пр. Кари Ниязова, 39, г. Ташкент, 100000, Узбекистан

Аннотация. В данной работе разработана математическая модель для мониторинга и прогнозирования изменения концентрации солей в подземных водах в двухслойной среде, представляющей процесс засоления и заболачивания. Дан качественный анализ научных исследований по проблеме. Поскольку процесс представляется дифференциальным уравнением, для решения задачи об изменении концентрации солей в подземных водах были разработаны эффективные численно-вычислительные алгоритмы на основе устойчивой схемы раскрытия с высоким порядком точности относительно временных и пространственных переменных. Усовершенствованы математические модели переноса солей при геофильтрационных процессах и разработаны вычислительные алгоритмы, учитывающие такие важные параметры, как физико-механические свойства: коэффициент водоотдачи, коэффициенты диффузии и скорости фильтрации в зависимости от уровня воды. Проведен анализ результатов, полученных на основе разработанных численных алгоритмов. Перед внедрением новых технологий были разработаны рекомендации по прогнозированию изменения содержания солей в воде с помощью эффективного численного алгоритма. На основании закономерностей движения потоков сточных вод отмечена возможность проведения экспериментов с использованием алгоритмов определения изменения дальности и скорости распространения сточных вод с водорастворимыми химическими веществами и активными свойствами в слоях грунта.

Ключевые слова: математическая модель, численное исследование, фильтрация, подземные воды, водоносный горизонт, мониторинг, прогнозирование.

Введение

Актуальность исследований изменения уровня и минерализации грунтовых вод обусловлена возрастающей потребностью в питьевой воде и воде, необходимой для орошения в сельском хозяйстве [1, 3, 10, 21, 25, 27, 32, 34].

Поэтому разработка и совершенствование математических моделей изменения уровня подземных вод и процессов минерализации, а также эффективных вычислительных алгоритмов для решения этих задач являются наиболее актуальными научными задачами. Большое внимание уделяется разработке математических моделей и численных вычислительных алгоритмов для изучения сложных гидродинамических и геофильтрационных процессов в развитых зарубежных странах, включая Японию, Данию, Канаду, Россию, Китай, Германию и Индию.

В настоящее время во всем мире проводятся целенаправленные исследования по изучению потоков подземных вод и процессов геофильтрации. Среди основных задач в этом направлении — разработка усовершенствованных математических моделей изменения уровня грунтовых вод и процессов минерализации в одно- и двухпластовых средах, эффективных численных вычислительных алгоритмов и программных средств.

В частности, 45 % орошаемых земель в Республике Узбекистан (приблизительно два миллиона гектаров) подвержены засолению и/или являются засоленными почвами. Испарение является одной из основных причин этого явления.

В частности, по состоянию на 1 октября 2018 года, по данным Региональной мелиоративной экспедиции при Аму-Бухарском бассейновом управлении, из 274 612 га орошаемых земель Бухарской области в той или иной степени засолены 85,8 %, в том числе 61,7 % слабых, 21,7% средних, 2,4% сильнозасоленных почв [24, 33].

В условиях острой нехватки водных ресурсов, особенно в Средней Азии, остро стоит проблема обеспечения водой населения экологически неблагоприятных районов Хивы, Бухары, Каракалпакстана. В таких условиях одним из основных источников водоснабжения населения являются подземные воды. Снижение энерго- и трудозатрат, повышение урожайности при соблюдении экологических требований, повышение качества продукции – ключевые вопросы развития аграрного сектора. Это, в свою очередь, связано с интенсивностью мелиорации агроландшафтов, расчетом сельскохозяйственного дренажа, проблемой орошения земель. Следует отметить, что в Средней Азии, на Кавказе и в других регионах орошение сельскохозяйственных угодий на основе подземных вод через дренаж достигает 30 % [3]. Процесс засоления почв происходит из-за подъема уровня грунтовых вод, что приводит к резкому снижению плодородия почв. Этот процесс наносит огромный ущерб окружающей среде и представляет опасность для жизни и здоровья человека.

В западной части страны (низовья Зеравшана и бассейны рек Кашкадарья, Сырдарья, Амударья и Центральные Кызылкумы) подземные воды сильно минерализованы и жестки. За последние 10-15 лет воды образовавшихся линз подземных вод по крупным рекам (Амударье и оросительным каналам) используются для пресного водоснабжения Хорезмской области и Республики Каракалпакстан в связи с повышенной минерализацией и жесткостью (иригационное влияние) требованиям национальных стандартов. В таких случаях актуальной задачей с практической точки зрения при формировании запасов пресной воды является изучение процесса изменения концентрации солей в слое подземных вод [30].

Для детального изучения процесса изменения концентрации солей в водоносном горизонте необходимо разработать усовершенствованную математическую модель, описывающую основные особенности объекта.

В [29] М.С.Троянский представил процесс фильтрации подземных вод и описал виды и методы моделирования процесса. Особое внимание было уделено численному моделированию фильтрации подземных вод.

Задачи с фильтрационным течением на основе теории геофильтрации стационарного состояния жидкости по закону Дарси рассматривались в [7], [8]. Результаты численных расчетов анализировались на основе законов гидродинамики.

Н. Равшанов в [18] разработал численное моделирование процессов влажности почвы и миграции солей, а также численный алгоритм на основе векторной схемы Самарского-Фрязинова.

Предложены модели для получения достоверных данных об изменении уровня грунтовых вод, оптимизации расчета сельскохозяйственного дренажа и корректировки управления водным режимом сельскохозяйственных угодий [31].

Существующие математические модели загрязнения подземных вод объясняют причины и физические аспекты загрязнения подземных вод [17]. Система моделирования, основанная на влажности почвы и динамике подземных вод, была рассмотрена Си Ченом для моделей гидрологических процессов [34]. Математическая модель для численного решения нестационарных задач течения двухкомпонентной жидкости в пористой среде была



предложена Е.Б. Соболева [27].

В [15] В.С. Ковалевский рассмотрел аналитический метод последовательности прогнозирования изменений динамики подземных вод. Надлежащий подход к модели SCS и визуальному Modflow для оценки воздействия почво-водосбережения и подземных вод основан на принципе водного баланса [13, 32].

Х. Мутао и Т. Йонг в [16] провели физический анализ пресноводных ресурсов с учетом климатических изменений. Была предложена физическая модель для прогнозирования и мониторинга изменений уровня грунтовых и напорных вод. Математическая модель процесса засоления разработана А. Власюком [5] с учетом инфильтрации в водонасыщенных слоистых грунтах. В [25] Р. Ронг предложил математическую модель изменения подземных вод с учетом температурного градиента в северных прибрежных районах Китая. Результаты численного решения задачи показывают, что существенное влияние оказывает градиент температуры почвы.

Андерсон в [6] рассмотрел задачу о двумерном стационарном течении подземных вод. Разработано аналитическое решение для исследования процесса взаимодействия воды с поверхностью подземных вод. Теналем Айенью в [28] разработал стационарную модель подземных вод для анализа гидродинамики подземных вод в водосборном бассейне Акаки в Аддис-Абебе. Были рассмотрены вопросы водоснабжения города. Разработанная модель использовалась в динамике течения подземных вод, для определения взаимодействия подземных и поверхностных вод, а также для изучения влияния откачки скважин.

На основании вышеизложенного анализ научной литературы по математическому моделированию процессов геофильтрации для изучения течения подземных вод показал, что в этой области получен ряд важных теоретических и практических результатов.

Материалы и методы

Исследования показывают, что процессы изменения уровня минерализации подземных и напорных вод требуют разработки более совершенных методов изучения вопросов, связанных с оценкой мелиорации земель. Прогнозировать изменение уровня и минерализации грунтовых вод можно путем разработки математических моделей, описывающих изучаемый процесс. При разработке математической модели взаимодействия подземных и напорных вод использовалась система линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с основными законами гидродинамики и соответствующими граничными условиями.

Для мониторинга и прогнозирования изменений содержания солей в подземных водах была разработана математическая модель, точно отражающая этот процесс. Использовались следующие начальные и граничные условия [4, 11, 19, 20]:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) - v_x h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - v_z h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + f \theta_f, \\ \mu_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) - v_x H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - v_z H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + f_1 \theta_{1f}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $\theta_1(x, z, t)$, $\theta_2(x, z, t)$ концентрации солей в подземных и напорных водоносных горизонтах; $h(x, z, t)$, $H(x, z, t)$ уровни грунтовых и напорных вод; μ – коэффициент водоотдачи; k – коэффициент фильтрации; D_1 , D_2 – коэффициенты диффузии; θ_{1f} , θ_{2f} – концентрации солей (в инфильтрационной воде); v_x , v_z – составляющие скорости фильтрации.

Система (1) решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$(\theta_1)_{t=t_0} = (\theta_1)_0, \quad (\theta_2)_{t=t_0} = (\theta_2)_0, \quad (2)$$

$$\mu_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(\theta_1 - (\theta_1)_0), \quad \mu_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = (\theta_1 - (\theta_1)_0), \quad (3)$$



$$\mu_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(\theta_1 - (\theta_1)_0), \quad \mu_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = (\theta_1 - (\theta_1)_0), \quad (4)$$

$$\mu_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = -(\theta_2 - (\theta_2)_0), \quad \mu_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = (\theta_2 - (\theta_2)_0), \quad (5)$$

$$\mu_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(\theta_2 - (\theta_2)_0), \quad \mu_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = (\theta_2 - (\theta_2)_0), \quad (6)$$

$$\theta_1 \Big|_{z=m-0} = \theta_2 \Big|_{z=m+0}, \quad (7)$$

$$D_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big|_{z=m-0} = D_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=m+0}. \quad (8)$$

$(\theta_1)_0, (\theta_2)_0$ начальные значения концентраций солей в подземных и напорных водоносных горизонтах; m – толщина; t_0 – начальное время.

Для решения задач (1) - (8) введем следующие безразмерные величины:

$$h^* = \frac{h}{h_0}, \quad H^* = \frac{H}{H_0}, \quad x^* = \frac{x}{L_x}, \quad z^* = \frac{z}{L_z}, \quad \tau = \frac{m_0}{\mu_1 n_0 L_x^2} t, \quad m^* = \frac{m}{m_0}, \quad D_1^* = \frac{D_1}{(D_1)_0}, \quad D_2^* = \frac{D_2}{(D_2)_0},$$

$$\theta_1^* = \frac{\theta_1}{(\theta_1)_0}, \quad \theta_2^* = \frac{\theta_2}{(\theta_2)_0}.$$

В этом случае задачи (1) - (8) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial \tau} &= \frac{(D_1)_0 n_0}{m_0} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(D_1^* h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial x^*} \right) + \frac{(D_1)_0 n_0 L_x^2}{(k_1)_0 m_0 L_z^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(D_1^* h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial z^*} \right) - \frac{n_0 L_x}{m_0} v_x h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial x^*} - \\ &\quad - \frac{n_0 L_x^2}{m_0 L_z^2} v_z h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial z^*} + \frac{n_0 L_x^2}{m_0 h_0 (\theta_1)_0} f \cdot \theta_f, \\ H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial \tau} &= \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0}{\mu_2 m_0} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(D_2^* H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 L_z^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(D_2^* H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial z^*} \right) - \\ &\quad - \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0 L_x}{\mu_2 m_0} v_x H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial x^*} - \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 L_z^2} v_z H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial z^*} + \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 H_0 (\theta_2)_0} f_1 \cdot \theta_{1f}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

И граничные условия:

$$\frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_x} h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = -((\theta_1)_0 \theta_1^* - (\theta_1)_0), \quad \frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_x} h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} = ((\theta_1)_0 \theta_1^* - (\theta_1)_0), \quad (10)$$

$$\frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_z} h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} = -((\theta_1)_0 \theta_1^* - (\theta_1)_0), \quad \frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_z} h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=1} = ((\theta_1)_0 \theta_1^* - (\theta_1)_0), \quad (11)$$

$$\frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_x} H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = -((\theta_2)_0 \theta_2^* - (\theta_2)_0), \quad \frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_x} H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} = ((\theta_2)_0 \theta_2^* - (\theta_2)_0), \quad (12)$$

$$\frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_z} H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} = -((\theta_2)_0 \theta_2^* - (\theta_2)_0), \quad \frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_z} H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=1} = ((\theta_2)_0 \theta_2^* - (\theta_2)_0), \quad (13)$$

$$(\theta_1)_0 \theta_1^* \Big|_{z^*=\frac{m-0}{L_z}} = (\theta_2)_0 \theta_2^* \Big|_{z^*=\frac{m+0}{L_z}}, \quad (14)$$



$$\frac{(D_1)_0 h_0(\theta_1)_0}{L_z} D_1 h^* \frac{\partial \theta_1^*}{\partial y^*} \Big|_{y^* = \frac{m-0}{L_z}} = \frac{(D_2)_0 H_0(\theta_2)_0}{L_z} D_2 H^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial z^*} \Big|_{z^* = \frac{m+0}{L_z}} \cdot \cdot \quad (15)$$

Для упрощения следующих расчетных последовательностей мы опускаем знак «*» в уравнениях (9) - (15) и записываем уравнения в виде:

$$\left. \begin{aligned} h \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} &= \frac{(D_1)_0 n_0}{m_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) + \frac{(D_1)_0 n_0 L_x^2}{m_0 L_z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(D_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) - \frac{n_0 L_x}{m_0} v_x h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \\ &\quad - \frac{n_0 L_x^2}{m_0 L_z} v_z h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{n_0 L_x^2}{m_0 h_0(\theta_1)_0} f \theta_f, \\ H \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} &= \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0}{\mu_2 m_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) + \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 L_z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(D_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0 L_x}{\mu_2 m_0} v_x H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 L_z} v_z H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 H_0(\theta_2)_0} f_1 \theta_{1f}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

вводя следующие определения в (16), задача упрощается

$$\varphi = \frac{(D_1)_0 n_0}{m_0}, \quad \varphi_1 = \frac{(D_1)_0 n_0 L_x^2}{m_0 L_z^2}, \quad \varphi_2 = \frac{n_0 L_x}{m_0}, \quad \varphi_3 = \frac{n_0 L_x^2}{m_0 L_z}, \quad \varphi_4 = \frac{n_0 L_x^2}{m_0 h_0(\theta_1)_0}, \quad \psi = \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0}{\mu_2 m_0},$$

$$\psi_1 = \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 L_z^2}, \quad \psi_2 = \frac{\mu_1 n_0 (D_2)_0 L_x}{\mu_2 m_0}, \quad \psi_3 = \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 L_z}, \quad \psi_4 = \frac{\mu_1 n_0 L_x^2}{\mu_2 m_0 H_0(\theta_2)_0}, \quad D_1 = D_1 h, \quad D_2 = D_2 H \quad \text{мы}$$

выражаем как

$$\left. \begin{aligned} h \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} &= \varphi \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) + \varphi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(D_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) - \varphi_2 v_x h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \varphi_3 v_z h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \varphi_4 f \theta_f, \\ H \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} &= \psi \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) + \psi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) - \psi_2 v_x H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \psi_3 v_z H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \psi_4 f_1 \theta_{1f}, \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

Размерные формы граничных условий могут быть выражены следующими уравнениями:

$$\frac{\mu_1 h_0(\theta_1)_0}{L_x} h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -((\theta_1)_0 \theta_1 - (\theta_1)_0), \quad \frac{\mu_1 h_0(\theta_1)_0}{L_x} h \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = ((\theta_1)_0 \theta_1 - (\theta_1)_0), \quad (17)$$

$$\frac{\mu_1 h_0(\theta_1)_0}{L_z} h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -((\theta_1)_0 \theta_1 - (\theta_1)_0), \quad \frac{\mu_1 h_0(\theta_1)_0}{L_z} h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=1} = ((\theta_1)_0 \theta_1 - (\theta_1)_0), \quad (18)$$

$$\frac{\mu_2 H_0(\theta_2)_0}{L_x} H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = -((\theta_2)_0 \theta_2 - (\theta_2)_0), \quad \frac{\mu_2 H_0(\theta_2)_0}{L_x} H \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = ((\theta_2)_0 \theta_2 - (\theta_2)_0), \quad (19)$$

$$\frac{\mu_2 H_0(\theta_2)_0}{L_z} H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = -((\theta_2)_0 \theta_2 - (\theta_2)_0), \quad \frac{\mu_2 H_0(\theta_2)_0}{L_z} H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=1} = ((\theta_2)_0 \theta_2 - (\theta_2)_0), \quad (20)$$

$$(\theta_1)_0 \theta_1 \Big|_{z = \frac{m-0}{L_z}} = (\theta_2)_0 \theta_2 \Big|_{z = \frac{m+0}{L_z}}, \quad (21)$$

$$\frac{(D_1)_0 h_0(\theta_1)_0}{L_z} D_1 h \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z = \frac{m-0}{L_z}} = \frac{(D_2)_0 H_0(\theta_2)_0}{L_z} D_2 H \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{y = \frac{m+0}{L_z}} \cdot \quad (22)$$

При разработке эффективного численного алгоритма прогнозирования изменения концентрации солей в подземных и напорных водах использована нераскрытая конечно-дифференциальная схема второго порядка точности $O[(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta \tau)^2]$ используется. Для этого введем сетку с шагами $\Delta x, \Delta z, \Delta \tau$ в домене $D = \{0 \leq x < L_x, 0 \leq z < L_z, 1 \leq t \leq N\}$, учитывая



граничные условия [21,23]:

$$\omega_{\Delta x, \Delta z, \Delta \tau} = \{(x_i, z_j, t_n), x_i = i \Delta x; i = 0, 1, 2, \dots, I; z_j = j \Delta z; j = 0, 1, 2, \dots, J; t_n = n \Delta \tau; n = 1, 2, \dots, N\}$$

Аппроксимируем систему (16*) и граничные условия (17) - (22) с помощью сетки $\omega_{\Delta x, \Delta z, \Delta \tau}$ в $n + \frac{1}{2}$ слоя с течением времени вдоль Ox направление [1, 2, 9, 10, 12, 14, 22, 26]:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\varphi}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_2 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| + v_x) \right) (\theta_1)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta \tau} + \frac{\varphi}{\Delta x^2} ((D_1)_{i-0.5,j} + (D_1)_{i+0.5,j}) + \frac{\varphi_2 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) (\theta_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \\ & + \left(\frac{\varphi}{\Delta x^2} (D_1)_{i+0.5,j} - \frac{\varphi_2 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| - v_x) \right) (\theta_1)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & = - \left(\frac{h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta \tau} (\theta_1)_{i,j}^n + \varphi_1 \frac{(D_1)_{i,j-0.5} (\theta_1)_{i,j-1}^n - ((D_1)_{i,j-0.5} + (D_1)_{i,j+0.5}) (\theta_1)_{i,j}^n + (D_1)_{i,j+0.5} (\theta_1)_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\varphi_3 h_{i,j}^n}{2\Delta z} (2v_z (\theta_1)_{i,j}^n - (|v_z| + v_z) (\theta_1)_{i,j-1}^n + (|v_z| - v_z) (\theta_1)_{i,j+1}^n) + \varphi_4 f \theta_f \right), \\ & \left(\frac{\psi}{\Delta x^2} + \frac{\psi_2 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| + v_x) \right) (\theta_2)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta \tau} + \frac{\psi}{\Delta x^2} ((D_2)_{i-0.5,j} + (D_2)_{i+0.5,j}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\psi_2 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} v_x \right) (\theta_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\psi}{\Delta x^2} (D_2)_{i+0.5,j} - \frac{\psi_2 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| - v_x) \right) (\theta_2)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \\ & - \left(\frac{H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta \tau} (\theta_2)_{i,j}^n + \psi_1 \frac{(D_2)_{i,j-0.5} (\theta_2)_{i,j-1}^n - ((D_2)_{i,j-0.5} + (D_2)_{i,j+0.5}) (\theta_2)_{i,j}^n + (D_2)_{i,j+0.5} (\theta_2)_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\psi_3 H_{i,j}^n}{2\Delta z} (2v_y (\theta_2)_{i,j}^n - (|v_z| + v_z) (\theta_2)_{i,j-1}^n + (|v_z| - v_z) (\theta_2)_{i,j+1}^n) + \psi_4 f_1 \theta_{f1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Проведя некоторые преобразования и сгруппировав подобные члены, конечно-разностную систему (23) перепишем в следующем виде:

$$\tilde{a}_{i,j} (\theta_1)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{b}_{i,j} (\theta_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{i,j} (\theta_1)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\tilde{d}_{i,j}^n, \quad (24)$$

$$\tilde{\tilde{a}}_{i,j} (\theta_2)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\tilde{b}}_{i,j} (\theta_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\tilde{c}}_{i,j} (\theta_2)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\tilde{\tilde{d}}_{i,j}^n, \quad (25)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j} &= \frac{\varphi}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_2 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| + v_x), \quad \tilde{b}_{i,j} = \frac{h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta \tau} + \frac{\varphi}{\Delta x^2} ((D_1)_{i-0.5,j} + (D_1)_{i+0.5,j}) + \frac{\varphi_2 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} v_x, \\ \tilde{c}_{i,j} &= \frac{\varphi}{\Delta x^2} (D_1)_{i+0.5,j} - \frac{\varphi_2 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| - v_x), \quad D_{i-0.5,j} = D_{i-0.5,j} h_{i-0.5,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad D_{i+0.5,j} = D_{i+0.5,j} h_{i+0.5,j}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{d}_{i,j}^n &= \frac{h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta\tau} (\theta_1)_{i,j}^n + \varphi_1 \frac{(D_1)_{i,j-0.5}(\theta_1)_{i,j-1}^n - ((D_1)_{i,j-0.5} + (D_1)_{i,j+0.5})(\theta_1)_{i,j}^n + (D_1)_{i,j+0.5}(\theta_1)_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} - \\ &\quad - \frac{\varphi_3 h_{i,j}^n}{2\Delta z} (2v_y (\theta_1)_{i,j}^n - (|v_z| + v_z)(\theta_1)_{i,j-1}^n + (|v_z| - v_z)(\theta_1)_{i,j+1}^n) + \varphi_4 f \cdot \theta_f, \\ \tilde{a}_{i,j} &= \frac{\psi}{\Delta x^2} + \frac{\psi_2 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| + v_x), \quad \tilde{b}_{i,j} = \frac{H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta\tau} + \frac{\psi}{\Delta x^2} ((D_2)_{i-0.5,j} + (D_2)_{i+0.5,j}) + \frac{\psi_2 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} v_x, \\ \tilde{c}_{i,j} &= \frac{\psi}{\Delta x^2} (D_2)_{i+0.5,j} - \frac{\psi_2 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (|v_x| - v_x), \quad D_{i-0.5,j} = D_{i-0.5,j} H_{i-0.5,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad D_{i+0.5,j} = D_{i+0.5,j} H_{i+0.5,j}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \tilde{d}_{i,j}^n &= \frac{H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{0.5\Delta\tau} (\theta_2)_{i,j}^n + \psi_1 \frac{(D_2)_{i,j-0.5}(\theta_2)_{i,j-1}^n - ((D_2)_{i,j-0.5} + (D_2)_{i,j+0.5})(\theta_2)_{i,j}^n + (D_2)_{i,j+0.5}(\theta_2)_{i,j+1}^n}{\Delta z^2} - \\ &\quad - \frac{\psi_3 H_{i,j}^n}{2\Delta z} (2v_y (\theta_2)_{i,j}^n - (|v_z| + v_z)(\theta_2)_{i,j-1}^n + (|v_z| - v_z)(\theta_2)_{i,j+1}^n) + \psi_4 f_i \cdot \theta_{f_i}. \end{aligned}$$

Полученные системы уравнений (24) и (25) относительно искомых переменных решаются методом прогонки, где коэффициенты прогонки вычисляются как:

$$(\theta_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_{i+1,j} (\theta_1)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_{i+1,j}^n, \tag{26}$$

$$(\theta_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_{i+1,j} (\theta_2)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_{i+1,j}^n. \tag{27}$$

Здесь $\tilde{\alpha}_{i,j}$, $\tilde{\beta}_{i,j}^n$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_{i,j}$, $\tilde{\tilde{\beta}}_{i,j}^n$ коэффициенты развертки

$$\tilde{\alpha}_{i+1,j} = \frac{\tilde{c}_{i,j}}{\tilde{b}_{i,j} - \tilde{a}_{i,j} \tilde{\alpha}_{i,j}}, \quad \tilde{\beta}_{i+1,j}^n = \frac{\tilde{d}_{i,j}^n + \tilde{a}_{i,j} \tilde{\beta}_{i,j}^n}{\tilde{b}_{i,j} - \tilde{a}_{i,j} \tilde{\alpha}_{i,j}}, \quad \tilde{\tilde{\alpha}}_{i,j} = \frac{\tilde{\tilde{c}}_{i,j}}{\tilde{b}_{i,j} - \tilde{a}_{i,j} \tilde{\tilde{\alpha}}_{i,j}}, \quad \tilde{\tilde{\beta}}_{i+1,j}^n = \frac{\tilde{\tilde{d}}_{i,j}^n + \tilde{\tilde{a}}_{i,j} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,j}^n}{\tilde{b}_{i,j} - \tilde{a}_{i,j} \tilde{\tilde{\alpha}}_{i,j}}.$$

Теперь соответственно аппроксимируем граничные условия (17)-(22) и получаем:

$$\frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_x} h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{(\theta_1)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} - 4(\theta_1)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 3(\theta_1)_{2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = -((\theta_1)_0 (\theta_1)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (\theta_1)_0), \tag{28}$$

$$\frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_x} h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{-3(\theta_1)_{l-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 4(\theta_1)_{l,j}^{n+\frac{1}{2}} - (\theta_1)_{l+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = ((\theta_1)_0 (\theta_1)_{l,j}^{n+\frac{1}{2}} - (\theta_1)_0), \tag{29}$$

$$\frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_z} h_{i,1}^{n+1} \frac{(\theta_1)_{i,0}^{n+1} - 4(\theta_1)_{i,1}^{n+1} + 3(\theta_1)_{i,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -((\theta_1)_0 (\theta_1)_{i,1}^{n+1} - (\theta_1)_0), \tag{30}$$

$$\frac{\mu_1 h_0 (\theta_1)_0}{L_z} h_{i,j}^{n+1} \frac{-3(\theta_1)_{i,l-1}^{n+1} + 4(\theta_1)_{i,l}^{n+1} - (\theta_1)_{i,l+1}^{n+1}}{2\Delta z} = ((\theta_1)_0 (\theta_1)_{i,l}^{n+1} - (\theta_1)_0), \tag{31}$$

$$\frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_x} H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{(\theta_2)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} - 4(\theta_2)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 3(\theta_2)_{2,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = -((\theta_2)_0 (\theta_2)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (\theta_2)_0), \tag{32}$$

$$\frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_x} H_{l,j}^{n+\frac{1}{2}} \frac{-3(\theta_2)_{l-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + 4(\theta_2)_{l,j}^{n+\frac{1}{2}} - (\theta_2)_{l+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} = ((\theta_2)_0 (\theta_2)_{l,j}^{n+\frac{1}{2}} - (\theta_2)_0), \tag{33}$$



$$\frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_z} H_{i,1}^{n+1} \frac{(\theta_2)_{i,0}^{n+1} - 4(\theta_2)_{i,1}^{n+1} + 3(\theta_2)_{i,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -((\theta_2)_0 (\theta_2)_{i,1}^{n+1} - (\theta_2)_0), \quad (34)$$

$$\frac{\mu_2 H_0 (\theta_2)_0}{L_z} H_{i,J}^{n+1} \frac{-3(\theta_2)_{i,I-1}^{n+1} + 4(\theta_2)_{i,J}^{n+1} - (\theta_2)_{i,J+1}^{n+1}}{2\Delta z} = ((\theta_2)_0 (\theta_2)_{i,J}^{n+1} - (\theta_2)_0), \quad (35)$$

$$(\theta_1)_0 (\theta_1)_{i,\frac{J}{2}}^n = (\theta_2)_0 (\theta_2)_{i,\frac{J}{2}}^n, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(D_1)_0 h_0 (\theta_1)_0}{L_z} (D_1)_{i,J} H_{i,J}^n \frac{-3(\theta_1)_{i,I-1}^n + 4(\theta_1)_{i,J}^n - (\theta_1)_{i,J+1}^n}{2\Delta z} = \\ & = \frac{(D_2)_0 H_0 (\theta_2)_0}{L_z} (D_2)_{i,J} H_{i,J}^n \frac{-3(\theta_2)_{i,I-1}^n + 4(\theta_2)_{i,J}^n - (\theta_2)_{i,J+1}^n}{2\Delta z}. \end{aligned} \quad (37)$$

Если $i=1$, то вместо уравнений (24) и (25) получаем:

$$(\theta_1)_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tilde{a}_{i,j}}{\tilde{c}_{i,j}} (\theta_1)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tilde{b}_{i,j}}{\tilde{c}_{i,j}} (\theta_1)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{d}_{i,j}^n}{\tilde{c}_{i,j}}, \quad (38)$$

$$(\theta_2)_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tilde{a}_{i,j}}{\tilde{c}_{i,j}} (\theta_2)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tilde{b}_{i,j}}{\tilde{c}_{i,j}} (\theta_2)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{d}_{i,j}^n}{\tilde{c}_{i,j}}, \quad (39)$$

С учетом (28) и (32) путем упрощения граничных условий получаем:

$$(\theta_1)_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{4\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Delta x L_x}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}} (\theta_1)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} (\theta_1)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (40)$$

$$(\theta_2)_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} = -3(\theta_2)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{4\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Delta x L_x}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}} (\theta_2)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}}. \quad (41)$$

Сравнивая (38) с (40) и (39) с (41), находим $(\theta_1)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и $(\theta_2)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$(\theta_1)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{i,j} - 4\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{i,j} + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j}}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{i,j} - \tilde{c}_{i,j})} (\theta_1)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{i,j}^n - 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j}}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{i,j} - \tilde{c}_{i,j})}, \quad (42)$$

$$(\theta_2)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{i,j} - 4\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{i,j} + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j}}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{i,j} - \tilde{c}_{i,j})} (\theta_2)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{3\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{i,j}^n + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j}}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{i,j} - \tilde{c}_{i,j})}. \quad (43)$$

(26) и (27) — рекуррентные формулы, и если предположить, что $i=0$, то имеем следующие уравнения:

(26) и (27) — рекуррентные формулы, и если предположить, что $i=0$, то имеем следующие уравнения:

$$(\theta_1)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_{1,j} (\theta_1)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_{1,j}^n, \quad (44)$$

$$(\theta_2)_{0,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_{1,j} (\theta_2)_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_{1,j}^n. \quad (45)$$



Сравнивая уравнения (42) и (44) и (43) и (45), находим начальные значения коэффициентов

$\tilde{\alpha}_{1,j}$, $\tilde{\beta}_{1,j}^n$ и $\tilde{\alpha}_{1,j}$, $\tilde{\beta}_{1,j}^n$:

$$\tilde{\alpha}_{1,j} = \frac{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{1,j} - 4\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{1,j} + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j}}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{1,j} - \tilde{c}_{1,j})}, \quad \tilde{\beta}_{1,j}^n = -\frac{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{1,j}^n - 2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j}}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{1,j} - \tilde{c}_{1,j})},$$

$$\tilde{\alpha}_{1,j} = \frac{3\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{1,j} - 4\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{1,j} + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j}}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{1,j} - \tilde{c}_{1,j})}, \quad \tilde{\beta}_{1,j}^n = -\frac{3\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{1,j}^n + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j}}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (3\tilde{a}_{1,j} - \tilde{c}_{1,j})}.$$

Если мы предположим, что $i = I$, то из систем (24) и (25)

$$(\theta_1)_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tilde{a}_{1,j}}{\tilde{c}_{1,j}} (\theta_1)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tilde{b}_{1,j}}{\tilde{c}_{1,j}} (\theta_1)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{d}_{1,j}^n}{\tilde{c}_{1,j}}, \quad (46)$$

$$(\theta_2)_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tilde{a}_{1,j}}{\tilde{c}_{1,j}} (\theta_2)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tilde{b}_{1,j}}{\tilde{c}_{1,j}} (\theta_2)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{d}_{1,j}^n}{\tilde{c}_{1,j}}, \quad (47)$$

с уравнениями (29) и (33) путем упрощения граничных условий имеем следующие уравнения:

$$(\theta_1)_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -3(\theta_1)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{4\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Delta x L_x}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}} (\theta_1)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x}{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (48)$$

$$(\theta_2)_{I+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = 3(\theta_2)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{4\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\Delta x L_x}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}} (\theta_2)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta x L_x}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (49)$$

Сравнивая уравнения (46) и (48) и (47) и (49), находим $(\theta_1)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и $(\theta_2)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$(\theta_1)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{1,j} - 4\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{1,j} + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j}}{3\tilde{c}_{1,j} - \tilde{a}_{1,j}} (\theta_1)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mu_1 h_0 h_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{1,j}^n + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j}}{3\tilde{c}_{1,j} - \tilde{a}_{1,j}}, \quad (50^*)$$

$$(\theta_2)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{1,j} + 4\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{1,j} - 2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j}}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (\tilde{a}_{1,j} + 3\tilde{c}_{1,j})} (\theta_2)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2\Delta x L_x \tilde{c}_{1,j} + \mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{1,j}^n}{\mu_2 H_0 H_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} (\tilde{a}_{1,j} + 3\tilde{c}_{1,j})}. \quad (50)$$

(26) и (27) находятся в рекуррентных формулах, и если предположить,

что $i = I - 1$, то имеем следующие уравнения:

$$(\theta_1)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_{1,j} (\theta_1)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_{1,j}^n, \quad (51)$$

$$(\theta_2)_{I-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\alpha}_{1,j} (\theta_2)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_{1,j}^n. \quad (52)$$

Сравнивая уравнения (50*) и (51) и (50) и (52), находим $(\theta_1)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}}$ и $(\theta_2)_{I,j}^{n+\frac{1}{2}}$ граничные значения концентраций солей в водоносном и напорном водоносных горизонтах:



$$(\theta_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{i,j}^n + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j} + (3\tilde{c}_{i,j} - \tilde{a}_{i,j}) \tilde{\beta}_{i,j}^n}{\mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{i,j} - 4\mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{i,j} + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j} - (3\tilde{c}_{i,j} - \tilde{a}_{i,j}) \tilde{\alpha}_{i,j}},$$

$$(\theta_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} (\tilde{a}_{i,j} + 3\tilde{c}_{i,j}) \tilde{\beta}_{i,j}^n + 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j} + \mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{d}_{i,j}^n}{\mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{i,j} + 4\mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \tilde{c}_{i,j} - 2\Delta x L_x \tilde{c}_{i,j} - \mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} (\tilde{a}_{i,j} + 3\tilde{c}_{i,j}) \tilde{\alpha}_{i,j}}.$$

Аппроксимируем систему (16*) по неявной схеме на сетке $\omega_{\Delta x, \Delta z, \Delta \tau}$ в $n+1$ слоя с течением времени вдоль Oz направлении, подобно приведенному выше алгоритму, и привести его к следующей системе трех диагональных алгебраических уравнений:

$$\bar{\bar{a}}_{i,j}(\theta_1)_{i,j-1}^{n+1} - \bar{\bar{b}}_{i,j}(\theta_1)_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{c}}_{i,j}(\theta_1)_{i,j+1}^{n+1} = -\bar{\bar{d}}_{i,j}^n, \tag{53}$$

$$\tilde{\tilde{a}}_{i,j}(\theta_2)_{i,j-1}^{n+1} - \tilde{\tilde{b}}_{i,j}(\theta_2)_{i,j}^{n+1} + \tilde{\tilde{c}}_{i,j}(\theta_2)_{i,j+1}^{n+1} = -\tilde{\tilde{d}}_{i,j}^n, \tag{54}$$

здесь

$$\bar{\bar{a}}_{i,j} = \frac{\varphi_1}{\Delta z^2} (D_1)_{i,j-0.5} + \frac{\varphi_3 h_{i,j}^{n+1}}{2\Delta z} (|v_z| + v_z), \quad \bar{\bar{c}}_{i,j} = \frac{\varphi_1}{\Delta z^2} (D_1)_{i,j+0.5} - \frac{\varphi_3 h_{i,j}^{n+1}}{2\Delta z} (|v_z| - v_z),$$

$$\bar{\bar{b}}_{i,j} = \frac{h_{i,j}^{n+1}}{0.5\Delta \tau} + \frac{\varphi_1}{\Delta z^2} ((D_1)_{i,j-0.5} + (D_1)_{i,j+0.5}) + \frac{\varphi_3 h_{i,j}^{n+1}}{\Delta z} v_z,$$

$$D_{i,j-0.5} = D_{i,j-0.5} h_{i,j-0.5}^{n+1}, \quad D_{i,j+0.5} = D_{i,j+0.5} h_{i,j+0.5}^{n+1},$$

$$\bar{\bar{d}}_{i,j}^n = \frac{h_{i,j}^{n+1}}{0.5\Delta \tau} (\theta_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \varphi \frac{(D_1)_{i-0.5,j} (\theta_1)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - ((D_1)_{i-0.5,j} + (D_1)_{i+0.5,j}) (\theta_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (D_1)_{i+0.5,j} (\theta_1)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{\varphi_2 h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (2v_x (\theta_1)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - (|v_x| + v_x) (\theta_1)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (|v_x| - v_x) (\theta_1)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \varphi_4 f \cdot \theta_f,$$

$$\tilde{\tilde{a}}_{i,j} = \frac{\psi_1}{\Delta z^2} (D_2)_{i,j-0.5} + \frac{\psi_3 H_{i,j}^{n+1}}{2\Delta z} (|v_z| + v_z), \quad \tilde{\tilde{c}}_{i,j} = \frac{\psi_1}{\Delta z^2} (D_2)_{i,j+0.5} - \frac{\psi_3 H_{i,j}^{n+1}}{2\Delta z} (|v_z| - v_z),$$

$$\tilde{\tilde{b}}_{i,j} = \frac{H_{i,j}^{n+1}}{0.5\Delta \tau} + \frac{\psi_1}{\Delta z^2} ((D_2)_{i,j-0.5} + (D_2)_{i,j+0.5}) + \frac{\psi_3 H_{i,j}^{n+1}}{\Delta z} v_z,$$

$$D_{i,j-0.5} = D_{i,j-0.5} H_{i,j-0.5}^{n+1}, \quad D_{i,j+0.5} = D_{i,j+0.5} H_{i,j+0.5}^{n+1},$$

$$\tilde{\tilde{d}}_{i,j}^n = \frac{H_{i,j}^{n+1}}{0.5\Delta \tau} (\theta_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \psi \frac{(D_2)_{i-0.5,j} (\theta_2)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - ((D_2)_{i-0.5,j} + (D_2)_{i+0.5,j}) (\theta_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + (D_2)_{i+0.5,j} (\theta_2)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{\psi_2 H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} (2v_x (\theta_2)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - (|v_x| + v_x) (\theta_2)_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (|v_x| - v_x) (\theta_2)_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \psi_4 f_1 \cdot \theta_{f1}.$$

Решаем (53) и (54) системы трех диагональных линейных алгебраических уравнений методом прогонки. Ищем решение во внутренних точках сети по следующим рекуррентным формулам:

$$(\theta_1)_{i,j}^{n+1} = \bar{\bar{\alpha}}_{i,j+1} (\theta_1)_{i,j+1}^{n+1} + \bar{\bar{\beta}}_{i,j}^n, \tag{55}$$

$$(\theta_2)_{i,j}^{n+1} = \tilde{\tilde{\alpha}}_{i,j+1} (\theta_2)_{i,j+1}^{n+1} + \tilde{\tilde{\beta}}_{i,j}^n, \tag{56}$$



Здесь $\bar{\bar{\alpha}}_{i,j}, \bar{\bar{\beta}}_{i,j}, \bar{\alpha}_{i,j}, \bar{\beta}_{i,j}$ – коэффициенты развертки и определяются по следующим формулам:

$$\bar{\bar{\alpha}}_{i,j+1} = \frac{\bar{\bar{c}}_{i,j}}{\bar{b}_{i,j} - \bar{\bar{a}}_{i,j} \bar{\bar{\alpha}}_{i,j}}, \quad \bar{\bar{\beta}}_{i,j+1} = \frac{\bar{d}_{i,j}^n + \bar{\bar{a}}_{i,j} \bar{\bar{\beta}}_{i,j}}{\bar{b}_{i,j} - \bar{\bar{a}}_{i,j} \bar{\bar{\alpha}}_{i,j}}, \quad \bar{\alpha}_{i,j+1} = \frac{\bar{\alpha}_{i,j}}{\bar{b}_{i,j} - \bar{\alpha}_{i,j} \bar{\alpha}_{i,j}}, \quad \bar{\beta}_{i,j+1} = \frac{\bar{d}_{i,j}^n + \bar{\alpha}_{i,j} \bar{\beta}_{i,j}}{\bar{b}_{i,j} - \bar{\alpha}_{i,j} \bar{\alpha}_{i,j}}.$$

$\bar{\bar{\alpha}}_{i,1}, \bar{\bar{\beta}}_{i,1}$ и $\bar{\alpha}_{i,1}, \bar{\beta}_{i,1}$ – начальные значения коэффициентов, рассчитанные по направлению, из следующих уравнений

$$\bar{\bar{\alpha}}_{i,1} = \frac{3\mu_1 h_0 h_{i,1}^{n+1} \bar{\bar{b}}_{i,1} - 4\mu_1 h_0 h_{i,1}^{n+1} \bar{\bar{c}}_{i,1} + 2\Delta z L_z \bar{\bar{c}}_{i,1}}{3\mu_1 h_0 h_{i,1}^{n+1} (3\bar{\bar{a}}_{i,1} - \bar{\bar{c}}_{i,1})}, \quad \bar{\bar{\beta}}_{i,1} = -\frac{2\Delta z L_z \bar{\bar{c}}_{i,1} + 3\mu_1 h_0 h_{i,1}^{n+1} \bar{\bar{d}}_{i,1}^n}{3\mu_1 h_0 h_{i,1}^{n+1} (3\bar{\bar{a}}_{i,1} - \bar{\bar{c}}_{i,1})},$$

$$\bar{\alpha}_{i,1} = \frac{3\mu_2 H_0 H_{i,1}^{n+1} \bar{\alpha}_{i,1} - 4\mu_2 H_0 H_{i,1}^{n+1} \bar{\alpha}_{i,1} + 2\Delta z L_z \bar{\alpha}_{i,1}}{\mu_2 H_0 H_{i,1}^{n+1} (3\bar{\alpha}_{i,1} - \bar{\alpha}_{i,1})}, \quad \bar{\beta}_{i,1} = -\frac{2\Delta z L_z \bar{\alpha}_{i,1} + 3\mu_2 H_0 H_{i,1}^{n+1} \bar{\alpha}_{i,1}^n}{\mu_2 H_0 H_{i,1}^{n+1} (3\bar{\alpha}_{i,1} - \bar{\alpha}_{i,1})}.$$

Сравнивая системы трех диагональных линейных алгебраических уравнений (53), (54), рекуррентных формул (55), (56) и граничных условий (34), (35) вдоль направления соответственно, находим граничные значения концентраций солей в подземных и напорных водоносных горизонтах:

$$(\theta_1)_{i,j}^{n+1} = \frac{2\Delta z L_z \bar{\bar{c}}_{i,j} - \mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+1} \bar{\bar{d}}_{i,j}^n + \mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+1} (\bar{\bar{a}}_{i,j} - 3\bar{\bar{c}}_{i,j}) \bar{\bar{\beta}}_{i,j}^n}{\mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+1} \bar{\bar{b}}_{i,j} - 4\mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+1} \bar{\bar{c}}_{i,j} + 2\Delta z L_z \bar{\bar{c}}_{i,j} - \mu_1 h_0 h_{i,j}^{n+1} (\bar{\bar{a}}_{i,j} - 3\bar{\bar{c}}_{i,j}) \bar{\bar{\alpha}}_{i,j}^n},$$

$$(\theta_2)_{i,j}^{n+1} = \frac{2\Delta z L_z \bar{\alpha}_{i,j} + \mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+1} \bar{\alpha}_{i,j}^n + \mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+1} (\bar{\alpha}_{i,j} - 3\bar{\alpha}_{i,j}) \bar{\beta}_{i,j}^n}{\mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+1} \bar{\alpha}_{i,j} - 4\mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+1} \bar{\alpha}_{i,j} + 2\Delta z L_z \bar{\alpha}_{i,j} - \mu_2 H_0 H_{i,j}^{n+1} (\bar{\alpha}_{i,j} - 3\bar{\alpha}_{i,j}) \bar{\alpha}_{i,j}^n}.$$

Используя метод обратной прогонки, значения концентраций солей $(\theta_1)_{i,j-2}^{n+1/2}, (\theta_1)_{i,j-2}^{n+1/2}, \dots, (\theta_1)_{i,1}^{n+1/2}$, $(\theta_2)_{i,j-2}^{n+1/2}, (\theta_2)_{i,j-2}^{n+1/2}, \dots, (\theta_2)_{i,1}^{n+1/2}$ в осадочных и напорных водоносных горизонтах $n + \frac{1}{2}$ слоя с течением времени вдоль Ox направление, а значения концентраций солей $(\theta_1)_{i,j-1}^{n+1}, (\theta_1)_{i,j-2}^{n+1}, \dots, (\theta_1)_{i,1}^{n+1}$, $(\theta_2)_{i,j-1}^{n+1}, (\theta_2)_{i,j-2}^{n+1}, \dots, (\theta_2)_{i,1}^{n+1}$ в осадочных и напорных водоносных горизонтах $n+1$ слоя с течением времени вдоль Oz направление найдено.

Результаты

Машинный алгоритм решения задачи следующий:

- 1-й шаг. Ввод исходных (исходных) данных (ввод констант).
- 2-й шаг. Вычисление граничных значений искоемых переменных из граничных условий задачи.
- 3-й шаг. Вычисление элементов трехдиагональной матрицы перехода, полученной приближением дифференциальных операторов к конечно-разностным.
- 4-й шаг. Расчет коэффициентов развертки.
- 5-й шаг. Расчет значений искоемых переменных задачи.
- 6-й шаг. Проверка адекватности задания.
- 7-й шаг. Интерпретация результатов компьютерных экспериментов.

В результате численных вычислительных экспериментов на основе разработанных вычислительных алгоритмов численного решения сложных математических моделей были построены следующие графики:



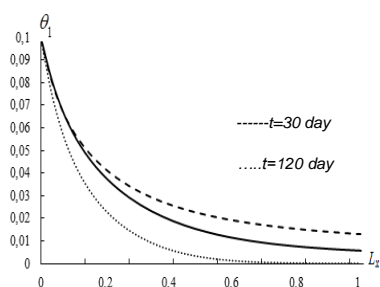


Рисунок 1. Изменение концентрации соли со временем. [Составлено авторами].

$$(\mu_1 = 0.16, \mu_2 = 0.01, v_x = 0.007, v_z = 0.005, \\ D_1 = 0.006 \cdot 10^{-2}, D_2 = 0.007 \cdot 10^{-2}, \\ \theta_f = 0.00026, \theta_{1f} = 0.0001)$$

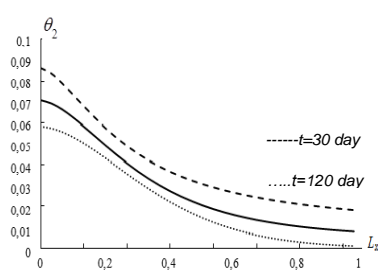


Рисунок 2. Изменение концентрации соли со временем. [Составлено авторами].

$$(\mu_1 = 0.16, \mu_2 = 0.01, v_x = 0.007, v_z = 0.005, \\ \theta_f = 0.00026, \theta_{1f} = 0.0001, \\ D_1 = 0.006 \cdot 10^{-2}, D_2 = 0.007 \cdot 10^{-2},)$$

В результате изменения уровня грунтовых вод и напорных вод мы можем наблюдать снижение концентрации солей в грунтовых водах и напорных водоносных горизонтах с течением времени (рис. 1 и 2).

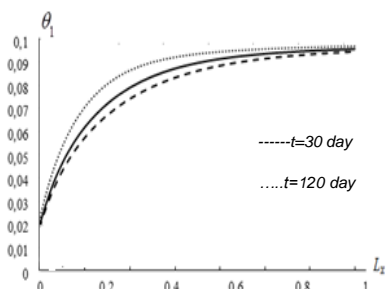


Рисунок 3. Изменение концентрации соли со временем. [Составлено авторами].

$$(\mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.1, v_x = 0.008, v_z = 0.003, \\ D_1 = 0.004 \cdot 10^{-2}, D_2 = 0.007 \cdot 10^{-2}, \\ \theta_f = 0.0036, \theta_{1f} = 0.001)$$

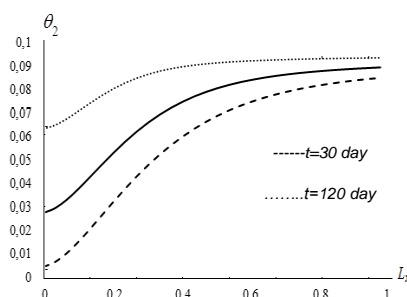


Рисунок 4. Изменение концентрации соли со временем. [Составлено авторами].

$$(\mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.1, v_x = 0.008, v_z = 0.003, \\ D_1 = 0.004 \cdot 10^{-2}, D_2 = 0.007 \cdot 10^{-2}, \\ \theta_f = 0.0036, \theta_{1f} = 0.001)$$

Зимой и весной уровень грунтовых и напорных вод повышается под влиянием внешних источников, испарения, пористости почвы в водоносном горизонте, дебитов. В результате мы можем наблюдать увеличение концентрации солей с течением времени из-за изменения таких параметров, как водоотдача, скорости фильтрации и коэффициенты диффузии, т. е. возникновение засоления на поверхности почвы (рис. 3 и 4).

По изменению концентрации солей в водоносном горизонте видно, что важны такие параметры, как составляющие скорости фильтрации, коэффициенты диффузии и концентрации солей (в инфильтрационной воде) (рис. 1 - 4).

Нехватка водных ресурсов в мире является одной из самых больших экологических проблем. Можно отметить, что чрезмерное использование химикатов в промышленности и сельском хозяйстве оказывает негативное влияние на состояние подземных вод, приводя к снижению качества водных ресурсов и их засолению. Это, в свою очередь, приводит к дальнейшему снижению потребления водных ресурсов и загрязнению подземных вод. Поэтому изучение математических и программных средств важно при мониторинге и прогнозировании изменений уровня подземных вод и состояния минерализации. В статье показано, что исследование таких важных параметров, как функциональные связи, пористость, подземные воды, основано на нелинейных общих граничных условиях. Для



решения задач об изменении уровня подземных вод разработаны абсолютно устойчивая схема раскрытия с высоким порядком точности по временным и пространственным переменным, эффективные численные вычислительные алгоритмы. Результаты, полученные на основе данной математической модели и численного алгоритма, представлены в разделах 1 и 4 в виде графиков. Летом минерализованные воды из стока водоносного горизонта сбрасываются в канализацию. При попадании подземных вод в скважину пресная вода подается в систему водопровода. В канализационную сеть вода подается из низконапорного водоносного горизонта.

Зимой вода поступает в напорный водоносный слой. Следует отметить, что разные режимы подземных вод приводят к взаимодействию гидродинамического и гидрохимического режимов подземных вод в обоих слоях. В таких условиях особое внимание следует уделить защите пласта от попадания высокоминерализованных вод с границ взаимодействующих пластов.

Дискуссия

Исследования, проведенные Wang, Xi Chen, предусматривали анализ математических моделей течения подземных и поверхностных вод на основе моделей геофильтрации [32, 34]. Ф.Б. Абуталиев и Э.Б. Абуталиев разработал математическую модель, основанную на гидродинамической природе исследуемого объекта, для расчета и прогнозирования изменения уровня грунтовых вод [1, 2, 3]. Э.Б. Соболева предложила математическую модель исследования миграции солей для численного решения нестационарных задач и контроля качества подземных и поверхностных вод [27].

Выводы

Разработаны математическая модель и эффективный численный алгоритм комплексного исследования процессов геофильтрации; проведены вычислительные эксперименты по определению изменения концентрации солей в подземных и напорных водах. Поскольку процесс характеризуется системой дифференциальных уравнений и соответствующими начальными и граничными условиями, использовался метод безразмерных величин.

С помощью построенного эффективного численного алгоритма изучена важность разработки рекомендаций перед внедрением новых технологий по прогнозированию изменения концентрации солей в воде в зависимости от уровня и расхода сточных вод. В результате изучения закономерностей движения потоков сточных вод была отмечена возможность проведения экспериментов с использованием алгоритма определения изменения дальности и скорости распространения сточных вод с растворимыми в воде химическими веществами и активными свойствами.

Результаты показывают, что модель и алгоритм могут быть использованы для прогнозирования процесса инфильтрации вод и изменения уровня воды в районах водообеспечения, технологических процессов миграции солей и качественного и количественного анализа процессов в гидрогеологии.

Созданный математический и численный аппарат позволяет значительно сократить объем натурных исследований и минимизировать экспериментальные работы, требующие дорогостоящих ресурсов в процессе проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ.

Использованная литература

1. Abutaliev F.B. (1972), Solving problems of transient filtration. Tashkent: Fan
2. Abutaliev F.B., Abutaliev E.B. (1968), Methods for solving problems of underground hydromechanics on a computer. Tashkent: Fan
3. Abutaliev F.B., Khodzhibaev N.N., Umarov U.U., Izmailov I.I. (1976), Application of numerical methods and computers in hydrogeology. Tashkent: Fan
4. Abutaliev F.B., Usmanov R.N. (1982), Proceedings of the I - All-Union Hydrogeological Conference. M.: Nauka
5. Anatoliy Vlasyuk, Tetiana Tsvetkova, Pawel Falat, Aleksandra Klos-Witkowska, Kornel Warwas (2017), Proc. of Int. Conf. on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IEEE)



6. Anderson E.I. (2003), *Water Resource* 39 1071. doi:10.1029/2002WR001536.
7. Bereslavsky E.N., Aleksandrova L.A., Pesterev E.V. (2010), *Matem. modeling.* 2010, V.22 (No. 6):27 - 37.
8. Bereslavsky E.N., Aleksandrova L.A., Pesterev E.V. (2011), *Matem. modeling.* 2011, V.23 (No. 2):27 - 40.
9. Daliev Sh. (2020), *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29(7): 3366 – 3381.
10. Daliev Sh., Abdullaeva B., Kubyasev K. (2020), *J. Materials Science and Engineering. Conf. Series* 896 (2020) 012069
11. Daliev Sh.K. (2019), *Inverse and ill-posed problems. international Conference. Uzbekistan, Samarkand.* 2019
12. Daliev Sh.K. (2020), *Actual problems of mathematical modeling, computational mathematics and software engineering. Republican scientific conference. Karshi,* 2020
13. Hill M.C., Banta E.R., Harbaugh A.W., Anderman E.R. *Modflow-2000. The U.S. Geological Survey Modular Ground-Water Model. User Guide to the observation, sensitivity, and parameter-estimation process and three post-processing programs, Denver, Colorado,* 2000.
14. Kalitkin, N.N. (2014), *Numerical methods,* St. Petersburg: BHV
15. Kovalevsky V.S. (1986), *Studies of the groundwater mode in connection with their operation,* M: Nedra
16. Mutaov H and Yong T (2015), *Proc. of Int. Conf. on Sustainable Energy and Environmental Engineering (SEEE)*
17. Nikolaevsky V. N.(1984), *Mechanics of porous and cracked media.* M.: Nedra
18. Ravshanov N, Khurramov I and Aminov S M (2019) *J. of Phys.: Conf. Series* 2019, 1210 012118, doi:10.1088/1742-6596/1210/1/012118
19. Ravshanov N., Daliev Sh. (2019), *Journal "Problems of Computational and Applied Mathematics" Tashkent, Uzbekistan,* No. 4(22):12-31.
20. Ravshanov N., Daliev Sh. (2020) *Proceedings of the XX International Scientific and Methodological Conference Voronezh,* 2020
21. Ravshanov N., Daliev Sh. and Abdullaev Z. (IEEE), (2020), *ICISCT 2020,* 9351467
22. Ravshanov N., Daliev Sh.K. (2021), *Journal "Problems of Computational and Applied Mathematics. Tashkent,* 2021, No. 2(32):94-117.
23. Ravshanov N., Shafiev T., Daliev Sh. (2021), *Journal of Physics: Conference Series,* 2021, 1791(1), 012083
24. *Recommendations of the Ministry of Agriculture and Water Resources of the Republic of Uzbekistan on "Procedures for irrigation of agricultural crops." Tashkent-2006.*
25. Rong R, Juanjuan M, Qiyun Ch, Lijian Zh, Xianghong G and Xihuan S (2017), *Water* 9456, doi:10.3390/w9070456
26. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. (2015), *Numerical methods for solving problems of convection-diffusion.* M.: KD Librokom
27. Soboleva E.B. (2014) *Method for numerical study of the dynamics of salt water in soil. Math. modeling.* V. 26 (No. 2):50 - 64
28. Tenalem Ayenew, Molla Demlie, Stefan Wohnlich. (2008), *Math Geosci* 40: 887–906. Doi: 10.1007/s11004-008-9144-x
29. Troyansky M.S. (2012) *Economics, Statistics and Informatics M: No. 3:*175-178.
30. *United Nations Environmental Review of Uzbekistan.//Second Review. New York and Geneva,* 2010 (Environmental Status Series 29)
31. Vasilenkov V.F., Demina O.N., Aksenov Ya.A. (2016) *International Research Journal ▪ Ekaterinburg,* doi: 10.18454/IRJ.2016.46.112
32. Wang H, Gao J-e, Zhang S-l, Zhang (2013) *PLOS ONE* 8(11. doi:10.1371/journal.pone.0079103
33. Xamidov M.X., Xamraev K.Sh. (2019) *Bulletin of Khorezm Mamun Academy, Regional Department of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan Khorezm Mamun Academy, Khiva:* 59-64.
34. Xi Chen, Zhicai Zhang, Yongqin David Chen. (2006). *Promise and Progress. Proceedings of symposium S7 held during the Seventh IAHS Scientific Assembly at Foz do Iguaçu, Brazil, April 2005.* IAHS.

