“TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO’JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUXANDISLARI INSTITUTI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI

Vektorlarni bazis bo’yicha yoyish. Vektor ko’paytmalar

Fan nomi: Hisob (Calculus)

Reja:

1. Vektorlarni basis bo'yicha yoyish
2. Vektor ko'paytma
3. Aralash ko'paytma

Bazisning vektorlari o'zaro perpendikular va birga teng uzunlikka ega bo'lsa, bu bazis *ortanormallangan bazis* deb ataladi. Dekart koordinatalar sistemasi $Oxyz$ ortanormallangan bazis tashkil qiladi. Bunda bazis sifatida Ox, Oy, Oz o'qlarnig ortlari bo'lgan $\overline{i,j,k}$ vektorlar olinadi. $\bar{a}$ vektor $\overline{i,j,k}$ bazisda quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\,. \tag{1.1}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (1; -1; 1),\ \vec{\boldsymbol{b}} = (-5; -3; 1),\ \vec{\boldsymbol{c}} = (2; -1; 0),\ \vec{\boldsymbol{d}} = (-15; -10; 5).$$

$\vec{a}$ *vektorning* $\vec{b}$ *vektorga vektor ko'paytmasi* deb quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikular, ya'ni $\vec{c} \perp \vec{a}$ va $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $\vec{c}$ vektorning uzunligi son jihatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat bo'lgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$,

bu yerda $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $[\vec{a}, \vec{b}]$ kabi belgilanadi.

Vektor ko'paytmaning xossalari:

1°. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2°. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash xossasi);

3°. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi);

4°. Agar nolga teng bo'lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo'ladi. Shuningdek, agar $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ $(|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0)$ bo'lsa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

Misol $\vec{a}=\{-1;2;3\}$ va $\vec{b}=\{2;-1;3\}$ vektorlar berilgan. Vektor ko'paytmalarni toping: 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $(3\vec{a}-\vec{b})\times\vec{b}$; 3) $(\vec{a}+2\vec{b})\times\vec{a}$; 4) $(2\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{b}-\vec{a})$.

2.2.3. *Uchta $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorning aralash ko'paytmasi* deb $\bar{a}$ vektorni $\bar{b}$ vektorga vektor ko'paytirishdan hosil bo'lgan $\bar{a} \times \bar{b}$ vektorni $\bar{c}$ vektorga skalyar ko'paytirib topilgan songa aytiladi va $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ kabi belgilanadi.

***Aralash ko'paytmaning xossalari*:**

1°. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$;

2°. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}$;

3°. Ikkita qo'shni ko'paytuvchining o'rinlari almashtirilsa aralash ko'paytma ishorasini almashtiradi. Masalan, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$;

4°. Agar nolga teng bo'lmagan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shuningdek, agar $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ $(|\bar{a}| \neq 0, |\bar{b}| \neq 0, |\bar{c}| \neq 0)$ bo'lsa $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi.

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

U holda

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.7)$$

misol. $\vec{a}=\{-1;-3;2\}$, $\vec{b}=\{2;2;-4\}$, $\vec{c}=\{3;0;-5\}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ko‘paytmani hisoblang.

2.1.5. Tekislikda uchta $\vec{a}=\{3;-2\}$, $\vec{b}=\{-2;1\}$ va $\vec{c}=\{7;-4\}$ vektorlar berilgan. Har bir vektorning qolgan ikki vektor bazisi bo'yicha yoyilmasini toping.

2.2.14. Agar $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=10$, $\vec{a}\vec{b}=25$ bo'lsa, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ni toping.

2.2.15. Agar $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=13$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=36$ bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}$ni toping.

Uyga vazifa

2.2.24. α ning qanday qiymatlarida $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi?

1) $\vec{a}=\{1;1;\alpha\}$, $\vec{b}=\{0;1;0\}$, $\vec{c}=\{3;0;1\}$; 2) $\vec{a}=\{\alpha;3;1\}$, $\vec{b}=\{5;-1;2\}$, $\vec{c}=\{-1;5;4\}$.