“TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO’JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUXANDISLARI INSTITUTI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI

Integral.
Karrali integral

Fan nomi: Hisob (Calculus)

Reja:

1. Boshlang’ich funktsiya tushunchasi
2. Asosiy integrallar jadvali
3. Aniq integral va uning xossalari
4. Nyuton-Leybnits formulasi
5. Ikki karrali integral

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

[a,b] kesmada aniqlangan $y = f(x)$ funksiya uchun ushbu kesmaning barcha nuqtalarida

$$F'(x) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya shu kesmada $f(x)$ funksiyaning **boshlang'ich funksiyasi** deyiladi.

Masalan: 1/3 sin3x ning hosilasi cos3x ga teng. Shuning uchun 1/3 sin3x funksiya cos3x funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}\sin 3x\right)'}_{F(x)} = \underbrace{\cos 3x}_{f(x)}$$

Boshlang'ich funksiya mavjudligi haqida teorema:

Har bir uzluksiz funksiya, bir – biridan ixtiyoriy o'zgarmasga farq qiluvchi cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega bo'ladi.

Boshlang'ich funksiyaning umumiy $F(x) + C$ ko'rinishi berilgan

$y = f(x)$ funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi.

Bu yerda C – ixtiyoriy o'zgarmas son va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

Bunda $\int$ - integral belgisi,

$f(x)$ – integral osti funksiyasi,

$f(x)dx$ –integral ostidagi ifoda deyiladi.

Asosiy integrallar jadvali

Asosiy integrallar jadvali quyidagi formulalardan iborat:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

10. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C;$

11. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right| + C.$

Aniq integral tushunchasi

Aniq integral. Aniqmas integral ifodasiga ixtiyoriy C o'zgarmas kirgani uchun x ning berilgan qiymatida bu integralning qiymatini topib bo'lmaydi. Ammo berilgan b va a nuqtalarda integral qiymatlarining ayirmasini toppish mumkin:

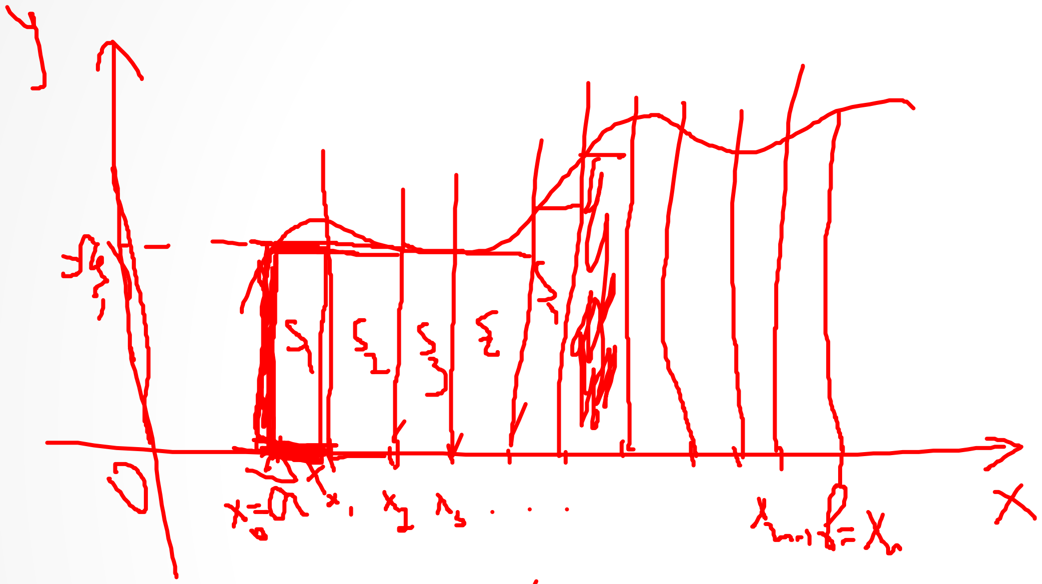
$$[F(b)+\cancel{C}]-[F(a)+\cancel{C}]=F(b)-F(a).$$

$F(x)+C$

Bu tenglik y=f(x) funktsiyaning barcha boshlang'ichlari uchun b va a nuqtalardagi ular qiymatlarining ayirmasi bir xil va u C ning tanlanishiga bog'liq emasligini ko'rsatadi. Shuning uchun y=f(x) funktsiya b va a nuqtalardagi boshlang'ich qiymatlarining ayirmasi y=f(x) funktsiyaning [a;b] kesmadagi aniq integrali deyiladi. [a;b] kesmadagi aniq integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi.



$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1$$

$$S \approx S_n$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

3. Aniq integralning asosiy xossalari

1-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin: agar $A = const$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

2-xossa. Bir necha funksiyalarning algebraic yig'indisidan olingan aniq integral qo'shiluvchilardan olingan integrallarning algebraic yig'indisiga teng. Ikki qo'shiluvchi bo'lgan holda

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \qquad (2)$$

3-xossa. Agar $[a,b]$ kesmada ($a < b$) $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $f(x) \le \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda

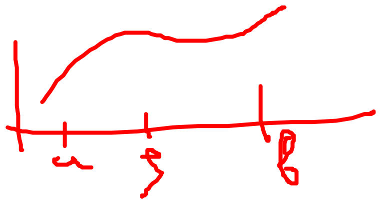
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (3)$$

4-xossa. Agar m va M - $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng kata qiymatlari bo'lib, $a \le b$ bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (4)$$

5-xossa. (o'rta qiymat haqida teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday ξ nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \qquad (5)$$



4. Aniq integralni hisoblash. Nyuton-Leybnits formulasi

$$\int_a^b f(x)dx$$

Aniq integralda quyi a chegara mahkamlangan, yuqori b chegara esa o'zgraib tursin. U holda integralning qiymati ham o'zgarib turadi, ya'ni integral yuqori chegaraning funksiyasi bo'lib qoladi.

Yuqori chegarani x bilan, integral o'zgaruvchini t bilan belgilaymiz:

$$\int_a^x f(t)dt$$

Integralga ega bo'lamiz. a o'zgarmas son bo'lganda bu integral x yuqori chegaraning funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani biz $\Phi(x)$ bilan belgilaymiz:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Agar $f(t)$ - nomanfiy funksiya bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ miqdor son jihatdan $aAXx$ egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng (216-rasm). x o'zgarganda bu yuza o'zgarishi ochiq ravshan.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$F(b) - F(a)$ ayirma F boshlang'ich funksiyaning tanlanishiga bog'liq emas.

Agar

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$$

belgilash kiritsak

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Nyuton-Leybnits formula aniq integrallarni hisoblashning qulay usulidir.

$y = f(x)$

1. Ikki karrali integralning ta'rifi.

$f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan bo'lsin. D sohani n ta D_i qismlarga bo'lamiz. Har bir D_i qismda $P_i(x_i, y_i)$ bittadan nuqta tanlaymiz hamda

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \quad (1)$$

yig'indini to'zamiz. (1) yig'indiga $f(x,y)$ funksiya uchun D sohadagi ***integral yig'indi*** deyiladi. λ qism sohalar diametrlarining eng kattasi bo'lsin. ΔS_i, D_i sohaning yuzi.

Ta'rif. (1) integral yig'indining, qismlarga bo'linish usuliga, P_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \to 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi ***ikki karrali integrali*** deyiladi va

$$\iint_D f(x,y)ds$$

simvol bilan belgilanadi.

Ikki karrali integral aniq integralning ikki o'zgaruvchili(argumentli) funksiya uchun umumlashgan holidir.

Ikki karrali integral ham aniq integralning asosiy xossalariga ega. Aniq integralning xossalarini takrorlashni tavsiya etamiz.

2. Ikki karrali integralni hisoblash.

Ikki karrali integralni hisoblash ikkita aniq integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. D soha $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ funksiyalar grafklari hamda $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa, ikki karrali integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

(1)

Oxirgi aniq integral ***ichki integral*** deb ataladi va uni hisoblashda x ni o'zgarmas deb, integrallash y bo'yicha olib boriladi. Ichki integralni hisoblash natijasi ***tashqi integral*** uchun integral osti funksiyasi bo'ladi.

- Integralni hisoblang

$$\iint (3x^2 - 2xy + y)dxdy$$

$x = 0,\ x = y^2,\ y = 2.$

$\int (3x^2 - 2xy + y)\ dx$

- Yechilishi:

$$\iint\limits_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y)dxdy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y)dx = \int_0^2 (x^3 - yx^2 + yx)\Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{244}{21}$$

$(\ {}^{2}\ ) - (\ {}^{0}\ )$

Uyga vazifa

Aniqmas integrallarni hisoblang.

1. a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$; b) $\int \cos 2x \cdot \sin 10x dx$;

c) $\int tg^2 7x dx$.

2. a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$; b) $\int \sin(7x-1) \sin 5x dx$;

c) $\int \frac{3x+2}{x^2+1} dx$.

3. a) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$; b) $\int \sin^3(1-3x) dx$;

c) $\int \frac{x+3}{x+1} dx$.