Мухамедиева Дилноз Тулкуновна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

Мухамедиева Дилноз Тулкуновна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ «ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ
ИНЖЕНЕРОВ ИРРИГАЦИИ И МЕХАНИЗАЦИИ
СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

ТАШКЕНТ – 2023

ИЗДАТЕЛЬСТВО «FAN ZIYOSI»

УДК 330.115

Д.Т.Мухамедиева. «Решение задач математической оптимизации с использованием методов интеллектуального анализа данных». Монография – Т.:Изд.«Fan ziyosi», 2023. 319 с.

В работе описаны методы и алгоритмы решения задач математической оптимизации с использованием методов интеллектуального анализа данных и практическое применение разработанных интеллектуальных систем. Рассмотрены основные составляющие Soft Computing - теория нечетких множеств, нейронные сети, эволюционные алгоритмы, особенности и принципы моделирования слабо формализованных процессов при нечетко заданной исходной информации.

Приведено описание практических интеллектуальных систем на основе технологий Soft Computing для альтернативного принятия решений. Книга рассчитана на широкой круг читателей, включающих специалистов по прикладной математике, инженеров, а также лиц, интересующихся вопросами применения технологии искусственного интеллекта при решении задач оценки состояния слабоформализуемых процессов, оптимизации, теории систем и общими вопросами принятия решений.

Рекомендовано к печати НТС
Научно-инновационного центра информационно-коммуникационных технологий при Ташкентском университете информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми

Ответственный редактор
Доктор технических наук, профессор Ш.Х.Фазилов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В задачах математической оптимизации предпочтение между возможными вариантами описывается с помощью целевых функций на заданном множестве вариантов. Значения целевой функции описывают влияние (значимость) каждого варианта, так что варианты с большей предпочтительностью имеют большие значения, чем менее предпочтительные. Например, в экономических задачах эти значения могут отражать доходы, получаемые от различных способов производства. Множество допустимых вариантов в задачах оптимизации описывается с помощью ограничений - уравнений или неравенств, представляющих необходимые связи между вариантами. Результаты анализа значительно зависят от того, насколько адекватно различные факторы реальных систем отражены в описании целевой функции (или функций) и в ограничениях.

Математическая формулировка целевой функции и ограничений в задачах оптимизации обычно включает некоторые параметры. Например, в задачах распределения ресурсов параметры могут представлять экономические показатели, такие как стоимость различных типов продукции, стоимость доставки и т. д.

Значения таких параметров зависят от многих факторов, обычно не включаемых в формулировку задачи. Пытаясь сделать модель более адекватной, мы часто вводим в нее сложные связи, делая модель все более громоздкой и аналитически неразрешимой. Нередко такие попытки увеличить «точность» модели практически бесполезны вследствие невозможности точного измерения ее параметров. С другой стороны, модель с фиксированными значениями параметров может быть слишком грубой, поскольку эти значения часто выбираются весьма произвольно.

Альтернативный подход базируется на включении в модель описания экспертного понимания природы этих параметров в той или иной адекватной форме.

Глава 1. МЕТОДЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

1.1. Нечеткие множества, нечеткие величины

В этом параграфе дается сводка основных понятий и результатов теории нечетких множеств, необходимых в данной главе. Всюду в этом параграфе *X* обозначает непустое множество [1-10].

Определение 1.1. Нечеткое подмножество А множества Х – это семейство подмножеств $A_\alpha \subseteq X$, где $\alpha \in [0,1]$, обладающее следующими свойствами [11-20]:

$$A_0 = X, \tag{1.1}$$

$$A_\beta \subseteq A_\alpha, \text{ если } 0 \le \alpha < \beta \le 1, \tag{1.2}$$

$$A_\alpha = \bigcap_{0 \le \alpha < \beta} A_\alpha . \tag{1.3}$$

Нечеткое подмножество А множества Х называется нечетким множеством. Класс всех нечетких подмножеств множества Х обозначаем как F(x) [21-25].

Определение 1.2. Пусть А - некоторое подмножество Х. Нечеткое подмножество $\{A_\alpha\}_{\alpha \in [0,\ 1]}$ из Х, определяемое равенством $A_\alpha = A$ для всех $\alpha \in (0,1]$, называется четким подмножеством Х, порожденным множеством А. Нечеткое подмножество множества Х, порожденное некоторым множеством $A \subseteq X$, называется четким подмножеством Х или, иначе, обычным подмножеством Х.

В Определении 1.2 четкие подмножества *X* и «классические» подмножества *X* находятся во взаимно-однозначном соответствии. Таким образом, «классические» подмножества *X* являются изоморфно вложенными в нечеткие подмножества множества *X* [26-27].

Определение 1.3. Пусть $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in [0,\ 1]}$ - нечеткое подмножество из Х. Функция $\mu_A : X \to [0,1]$, определяемая как [26-28]

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha \mid \alpha \in [0,\ 1], x \in A_\alpha\} \tag{1.4}$$

называется функцией принадлежности множества А, а ее значение $\mu_A(x)$ называется степенью принадлежности х нечеткому множеству А.

Заметим, что функция принадлежности четкого подмножества множества X совпадает с характеристической функцией соответствующего множества.

Определение 1.4. Пусть А – некоторое нечеткое подмножество X. Ядро Core(A) множества A определим как [26-28]

$$Core(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

Дополнение CA подмножества A определяется как нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{CA}(x) = 1 - \mu_A(x). \qquad (1.5)$$

Если ядро подмножества A непусто, то говорят, что A нормально. Носитель Supp(A) подмножества A определяется как [26-27]

$$Supp(A) = C1\{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\},$$

где C1 обозначает топологическое замыкание. Высота Hgt(A) подмножества A определяется как

$$Hgt(A) = \sup \{\mu_A(x) \mid x \in X\}.$$

Множество уровня функции принадлежности μ_A подмножества A для значения $a \in [0, 1]$ обозначается как $(A)_\alpha$ и называется α-сечением подмножества A, т. е.

$$[A]_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha \}. \qquad (1.6)$$

Строгое множество уровня функции принадлежности μ_A подмножества A для значения $a \in [0,1]$ обозначается как $(A)_\alpha$ и называется строгим α-сечением подмножества A, т. е.

$$(A)_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha \}. \qquad (1.7)$$

Заметим, что если A нормально, то Hgt(A) = 1, но обратное неверно.

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{R}^т$ – t - мерное евклидово пространство и X C $\mathbb{R}^т$. Нечеткое подмножество $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in [0,\ 1]}$ называется замкнутым, ограниченным, компактным или выпуклым, если для каждого $a \in (0,1]$ множество A_a является замкнутым, ограниченным, компактным или выпуклым подмножеством X, соответственно [26-27].

В следующих двух предложениях показывается, что семейство, множеств уровня некоторой функции μ: $X \rightarrow [0,1]$ удовлетворяет условиям (1.1) - (1.3) и, таким образом, оно порождает некоторое нечеткое подмножество множества X, а функция принадлежности μ_A, определенная в (1.4), совпадает с μ. Кроме того, для заданного нечеткого множества каждое обсечение

$[A]_\alpha$, определяемое посредством (1.6), совпадает с соответствующим A_a.

Предложение 1.1. Пусть μ: $X\to[0,1]$ - некоторая функция, и пусть $A = \{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,\ 1]}$ - семейство ее множеств уровня. Тогда A является нечетким подмножеством множества X, а μ, - функцией принадлежности A [26-27].

Предложение 1.2. Пусть $A = \{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,\ 1]}$ - нечеткое подмножество из X, и пусть μ_A: $X\to [0, 1]$ - функция принадлежности множества A. Тогда для каждого $a \in [0,1]$ α - сечение множества $[A]_\alpha$ совпадает с $A_{\alpha.}$

Мы будем исследовать нечеткие подмножества вещественной оси, положив $X = \mathbb{R}$ и $F(X)=F(\mathbb{R})$ [26-28].

Определение 1.6.

(i) Нечеткое множество $A = \{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ называется нечетким интервалом, если A_α непусто для всех $a\in[0,1]$ и является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}$.

(ii) Нечеткий интервал A называется нечетким числом, если его ядро - одноточечное множество. Множество всех нечетких чисел обозначается как $F_N(\mathbb{R})$.

Заметим, что функция принадлежности μ_A: $\mathbb{R} \to[0, 1]$ нечеткое интервала A квазивогнута на $\mathbb{R}$.

Определение 1.7. Пусть $X\subseteq \mathbb{R}$ Функция $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ называется

(i) квазивогнутой на X, если

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq \min\{\ f(x),\ f(y)\}$$

для любых $x,y \in X$ и всякого $\lambda\in(0,1)$ при $x\lambda + (1\text{-}X)y \in X$;

(ii) строго квазивогнутой на X, если

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) > \min\{\ f(x),\ f(y)\}$$

для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ и всякого $\lambda\in (0,1)$ при $x\lambda + (1 - \lambda)y \in X$;

(iii) полустрого квазивогнутой на X, если f квазивогнута на X и (1.8) верно для любых $x,y \in X$, $x\neq y$ и всякого $\lambda \in (0,1)$ при $x\lambda+(1- \lambda)y \in X$, $f(\lambda x +(1-\lambda)y)>0$ u $f(x)\neq f(y)$.

Функции принадлежности четких подмножеств M являются квазивогнутыми, но не строго квазивогнутыми. Они, однако, являются полустрого квазивогнутыми на $\mathbb{R}$ [26-28].

Определение 1.8. Нечеткое подмножество A из $\mathbb{R}$ называется нечеткой величиной, если A нормально, компактно и обладает полустрого квазивогнутой функцией принадлежности μ_A. Множество всех нечетких величин обозначается как $F_0(\mathbb{R})$.

По определению $F_0(\mathbb{R}) \subseteq F_I(\mathbb{R})$, кроме того, $F_0(\mathbb{R})$ содержит обычные вещественные (четкие) числа, обычные (четкие) интервалы, нечеткие числа треугольной формы, нечеткие числа колоколообразной формы и т. Д [26-27].

Пример 1.1 (Гауссовское нечеткое число). Пусть $a \in \mathbb{R}$, e (0, +∞) и для всех $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = e^{-x/\gamma}.$$

Тогда функция принадлежности μ_A, задаваемая выражением

$$\mu_A(x) = G(x-a) = e^{-(x-a)^2/\gamma},$$

является функцией принадлежности нечеткого множества, являющегося нечетким числом в соответствии с Определением 1.8. Заметим, что гауссовское нечеткое число компактно; следовательно, оно также является нечеткой величиной.

1.2. Нечеткие отношения

Пусть X и Y - непустые множества. В теории множеств бинарное отношение R между элементами множеств X и Y определяется как подмножество прямого произведения X × У, т.е. R $\subseteq$ X × Y [1-5].

Взвешенное отношение R на X×Y есть, по определению, некоторое нечеткое подмножество $X \times Y$. Взвешенное отношение R на X является взвешенным отношением $X \times X$.

Любое бинарное отношение R, $R \subseteq X \times Y$, является изоморфно вложенным в класс взвешенных отношений посредством своей характеристической функции, которая является его функцией принадлежности. В этом смысле всякое бинарное отношение является взвешенным.

Пусть R - взвешенное отношение на $X \times Y$. В задачах нечеткого линейного программирования мы рассматриваем нечеткие отношения, приписывающие каждой паре нечетких подмножеств некоторое вещественное число из интервала [0,1]. Другими словами, рассматриваются взвешенные отношения $\tilde{R}$ на $F(X) \times F(Y)$, такие что $\mu_{\tilde{A}} : F(X) \times F(Y) \to [0,1]$.

Элементы $x \in X$ и $\boldsymbol{y} \in Y$ рассматриваются как нечеткие подмножества X и Y с характеристическими функциями $\aleph_x$ и $\aleph_y$ качестве функций принадлежности. При этом мы получаем изоморфное вложение *X* в *F(X)* и У в *F(Y),* и именно в этом смысле пишем $X \subseteq F(X)$ и $Y \subseteq F(Y)$ соответственно.

Очевидно, что обычные бинарные отношения «=», «<» и «^» могут пониматься как взвешенные отношения.

Определим теперь нечеткие отношения, которые используются для сравнения правых и левых частей ограничений в задачах оптимизации.

Определение 1.9. Нечеткое подмножество множества F(X) × F(Y) называется нечетким отношением на X × Y. Множество всех нечетких отношений на F(X) × F(Y) обозначается как F(F(X) × F(Y)). Нечеткое отношение на X × X называется нечетким отношением на X [1-5].

Определение 1.10. Пусть R - взвешенное отношение на X × Y. Нечеткое отношение R на X×Y, задаваемое функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}} : F(x) \times F(Y) \to [0,1]$, называется нечетким расширением отношения R, если для любых x ∈ X и y ∈ У имеет место

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_R(x, y)\,. \tag{1.9}$$

В левой части (1.9) x и y понимаются как нечеткие подмножества X и У, определенные функциями принадлежности, идентичными характеристическим функциям одиночных элементов {x} и {y}, соответственно.

Определение 1.11. Пусть ψ : Ғ(X × Y) → Ғ(F(X) × F(Y)) - некоторое отображение. Пусть для ψ(R) - нечеткое расширение отношения R всех R∈ψ: Ғ(X × Y). Тогда отображение ψ называется нечетким расширением взвешенных отношений [26-27].

Определение 1.12. Пусть Φ, ψ:F(X×У)→F(F(X)× F(Y)) - отображения. Говорим, что отображение Φ является двойственным к отображению ψ, если

$$\Phi\,(C\,R) = C\,\psi\,(R) \tag{1.10}$$

верно для всех R ∈ Ғ(X×Y). Для Φ, двойственного к ψ, и взвешенного отношения R∈Ғ(X×Y) нечеткое отношение Φ(R) называется двойственным к нечеткому отношению[26-27].

Предложение 1.3. Отображение Φ является двойственным к отображению ψ тогда и только тогда, когда отображение ψ является двойственным к Φ [26-27].

Доказательство. Предложение прямо следует из (1.10), (1.5) и тождества

Аналогичное утверждение верно и для двойственных отношений Φ(*R*) и Φ(*R*). Теперь определим ряд специальных отображений, представляющих собой важные нечеткие расширения взвешенных отношений. При этом используются понятия t-нормы и t-конормы.

Класс функций $T:[0,1]^2 \to [0,1]$, являющихся коммутативными, ассоциативными, неубывающими по каждой переменной и удовлетворяющих граничному условию

$T(a,1) = a$ для всех $a \in [0,1]$,

называется треугольными нормами или t-нормами. Четырьмя наиболее известными примерами t-норм являются:

$T_M(a, b) = \min\{a, b\}$,

$T_P(a, b) = a\cdot b$,

$T_L(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$,

$$T_D(a,b) = \begin{cases} \min\{a,b\}, & \text{если } \max\{a, b\} = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Они называются: T_M-минимальная t-норма, T_p - мультипликативная t-норма, T_L-t-норма Лукасевича, сильное (drastic) произведение T_D.

Класс функций, тесно связанный с классом t-норм - это функции $S:[0,1]^2 \to [0,1]$, которые являются коммутативными, ассоциативными, неубывающими по каждой переменной и удовлетворяют граничному условию $S(a, 0) = a$ для всех $a \in [0,1]$.

Функции, удовлетворяющие всем перечисленным условиям, называются треугольными конормами или t-конормами, см. [29]. Например, функции S_M, S_P, S_L и S_D, определенные на $a, b \in [0,1]$ выражениями

$S_M(a, b) = max\{a, b\}$,

$S_P(a, b) = a+b- a\cdot b$,

$S_L(a,b) = min\{1, a+b-1\}$,

$$S_D(a,b) = \begin{cases} \max\{a,b\}, & \text{если } \min\{a, b\} = 0, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

являются конормами. S_M, S_P, S_L и S_D, часто называются максимумом, вероятностной суммой, ограниченной суммой и сильной (drastic) суммой, соответственно. Легко проверить, что для каждой из t-норм T функция T^* :

$[0,1]^2 \to [0,1]$, определенная для всех $a, b \in [0,1]$ выражением

$$T^*(a, b) = 1\text{-}T(1\text{-}a, 1\text{-}b), \qquad (1.11)$$

является t-конормой. Обратное утверждение также верно. Именно, если S - t-конорма, то функция $S^* : [0,1]^2 \to [0,1]$, определенная для всех a, $b \in [0,1]$ выражением

$$S^*(a, b) = 1\text{-}S(1\text{-}a, 1\text{-}b), \qquad (1.12)$$

является t-нормой t-конорма T^* и t-норма S^* называются двойственными к t-норме T и t-конорме 5, соответственно. Легко проверить, что

$$T_M^* = S_M, \quad T_P^* = S_P, \quad T_L^* = S_L, \quad T_D^* = S_D.$$

Говорят, что треугольная норма T является строгой, если она непрерывна и строго монотонна. Говорят, что она архимедова, если для всех $x,y \in (0,1)$ существует положительное целое число n, такое что $T^{n-1}(x,..,x)<y$. Пользуясь свойствами коммутативности и ассоциативности этой нормы, можно определить ее расширение на более чем два аргумента по формуле

$$T^{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = T(T^{n-2}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}),\ x_n), \qquad (1.13)$$

где $T^1(x_1, x_2)$=T(x_1, x_2).

Заметим, что если T - строгая норма, то она является архимедовой.

Определение 1.13. Аддитивный генератор Х-нормы T - это строго неубывающая функция f: $[0,1] \to [0, \infty)$, которая непрерывна справа в нуле, удовлетворяет условию f(1) = 0 и такова, что для всех x, y $\in [0,1]$ имеет место

$$f(x) + f(y) \in Ran(f) \cup [f(0), +\infty], \qquad (1.14)$$

$$T(x, y)=f^{(-1)}(f(x) + f(x)), \qquad (1.15)$$

где $Ran(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in [0,1]\}$ - область значений f на интервале [0,1].

Треугольные нормы (t-конормы), построенные с помощью аддитивных генераторов (или аналогичных им мультипликативных генераторов, определения которых мы здесь не приводим), всегда архимедовы. Это свойство и некоторые другие свойства t-норм детально рассмотрены в [26-29].

Определение 1.14. Пусть T - t-норма, а S - t-конорма. Пусть R - некоторое взвешенное отношение на X. Нечеткие расширения $\Phi^T(R)$ и $\psi(R)$ взвешенного отношения R на X, определенные на всех нечетких множествах A, B с функциями принадлежности $\mu_A \to [0,1]$, μ_B: Y $\to [0,1]$, соответственно, выражениями

$$\mu_{\Phi^T(R)}(A,B) = \sup\{T(\mu_R(x,\ y)),\ T(\mu_A(x),\ \mu(y)))\big|x,y \in X\}, \qquad (1.16)$$

$$\mu_{\psi^S(R)}(A,B) = \inf\ \{S(S(1-\mu_A(x),1-\mu_B(y)),\ \mu_R(x,\ y))\big|x,y \in X\} \qquad (1.17)$$

называются T–нечетким расширением отношения R и S-нечетким расширением отношения R, соответственно [26-29].

Можно легко проверить, что T–нечеткое расширение отношения *R* и *S*-нечеткое расширение отношения *R* являются нечеткими расширениями отношения *R,* охватываемыми Определением 1.10.

В следующем предложении мы докажем двойственность между нечеткими расширениями взвешенных отношений. В специальном случае, когда *T = min* и *S = max*, аналогичные результаты можно найти в [29].

Определение 1.15. Пусть T – t - норма, а S – t - конорма, двойственная к T [26-27]. Тогда расширение Φ^T является двойственным к ψ^S.

Доказательство. Пусть $R \subseteq F(X + Y)$; нам нужно установить (1.10), т.е.

$$\Phi^T(CR) = C\Phi^S(R). \qquad (1.18)$$

Возьмем $A \in F(X)$ и $B \in \mathrm{F}(Y)$ и покажем

$$\mu_{\Phi^T(CR)}(A,B) = \mu_{C\Phi^S(R)}(A,B).$$

По определению 1.16 и из двойственности *T* и *S* (см. (1.11) и (1.12)) получаем

$$\mu_{\Phi^T(CR)}(A,B) = \sup\{T(T(\mu_A(x),\mu_B(y),\ \mu_{CR}(x,\ y))\big|x \in X, y \in Y\} =$$

$$\sup\{1 - S(1 - T(\mu_A(x),\mu_B(y),\ \mu_R(x,\ y))\big|x \in X, y \in Y\} =$$

$$1 - \inf\{\ S(S(\mu_{CA}(x),\mu_{CB}(y),\ \mu_R(x,\ y))\big|x \in X, y \in Y\} =$$

$$1 - \mu_{\Phi^S(R)}(A,B) = \mu_{C\Phi^S(R)}(A,B),$$

что и требовалось.

Определение 1.16. Пусть отношение R–это неравенство «≤»т.е. обычное бинарное отношение «меньше или равно» на $\mathbb{R}$, пусть также T=min u S=max. Обозначим Φ^T(R) u Φ^S(R) из (1.16) и (1.17) как $\tilde{\leqq}^{\min}$ и $\tilde{\leqq}^{\max}$ соответствен. Из (1.16) и (1.17) получаем два нечетких расширения отношения «≤», определяемые посредством.

$$\mu_{\tilde{\leqq}^{\min}}(A,B) = \sup\{\min(\ \mu_A(x),\mu_B(y),\ \mu_R(x,\ y))\big|x,y \in X\}, \qquad (1.19)$$

$$\mu_{\tilde{\leqq}^{\min}}(A,B) = \inf\{\max(\ 1-\mu_A(x),1-\mu_B(y),\ \mu_R(x,\ y))\big|x,y \in R\}. \qquad (1.20)$$

Эквивалентным образом мы будем писать $A \tilde{\leq}^{\min} B$ и $A \tilde{\leq}^{\max} B$ вместо, $\mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(A,B)$ и $\mu_{\tilde{\leq}^{\max}}(A,B)$ соответственно. Под $A \tilde{\geq}^{\min} B$ подразумеваем $B \tilde{\leq}^{\min} A$.

Для изучения задач нечеткого линейного программирования принципиален следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть отношение R - это неравенство «≤» и пусть T= min и S = max. Пусть A,B∈F(R) - нормальные и компактные нечеткие множества и $\alpha \in (0,1)$. Тогда [1,26]

(i) $\mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(A,B) \geq \alpha$ тогда

и только тогда, когда $\inf[A]_\alpha \leq \sup[B]_\alpha$;

(ii) $\mu_{\tilde{\leq}^{\max}}(A,B) \geq \alpha$ тогда и только тогда,

когда $\sup[A]_{1-\alpha} \leq \inf[A]_\alpha \leq \sup[B]_\alpha$.

Доказательство. Сначала докажем (i). Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $\mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(A,B) \geq \alpha$. Тогда в силу (1.19) имеем

$$\sup\{\min(\mu_A(x)),\ \mu_B(y))|x \leq y\} \geq \alpha.$$

Поскольку *[A]* $_a$ и *[B]* $_a$ непустые и компактны, получаем $\inf[A]_\alpha \leq \sup[B]_\alpha$.

С другой стороны, пусть $\alpha \in (0,1)$ и inf $[A]_\alpha \leq \sup[B]_\alpha$. Из свойства компактности следует, что существуют $x' \in [A]_\alpha$ и $y' \in [B]_\alpha$ такие что $x' \leq y'$. Тогда $\mu_A(X') \geq \alpha$, $\mu_B(Y') \geq \alpha$ и $\min\{\mu_A(x'), \mu_B(y')\} \geq \alpha$, поэтому

$$\sup\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y))|x \leq y\} \geq \alpha, \qquad \text{т.е.} \qquad \mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(a,B) \geq \alpha.$$

Теперь докажем (ii). Пусть $a \in (0,1)$ и $\mu_{\tilde{\leq}^{\max}}(A,B) \geq \alpha$. Тогда согласно (1.20) получаем

$$\inf\{\min(1-\mu_A(x), 1-\mu_B(y), \mu_R(x,y))|x,y \in \mathrm{R}\} \geq \alpha.$$

Ясно, что это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sup\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y))|x > y\} \leq 1-\alpha. \tag{1.21}$$

Возьмем произвольные $x' \in (A)_{1-\alpha}$ и $y' \in (B)_{1-\alpha}$ и предположим, что $x' \geq y'$. Тогда $\min\{\mu_A(x''), \mu_B(y')\} > 1-\alpha$, что противоречит (1.21). Таким образом, $x' \leq y'$ верно для любой пары $x' \in (A)_{1-\alpha}$ и $y' \in (B)_{1-\alpha}$, что дает $\sup(A)_{1-\alpha} \leq \inf(B)_{1-\alpha}$.

С другой стороны, пусть $\alpha \in (0,1)$ и $\sup(A)_{1-\alpha} \leq \inf(B)_{1-\alpha}$. Возьмем произвольные $x', y' \in$ M, такие что $x' \geq y'$. Тогда или $x' \notin (A)_{1-\alpha}$, или $y' \in (B)_{1-\alpha}$, в противном случае $x' \leq y'$. По этой причине

$min\{\mu_A(x'), \mu_B(y')\} \leq 1\text{-}\alpha$, и как следствие, $\sup\{\min\{\mu_A(x'), \mu_B(y')\}| \{x \leq y\} \leq 1\text{-}\alpha$, что эквивалентно $\mu_{\lesssim_{\min}}(A,B) \geq \alpha$.

Предположим теперь, что T- t-норма и *S*- t-конорма.

Определение 1.17.

(i) Для всякого взвешенного отношения R $\in$ F(X $\times$ Y) и для всех нечетких множеств A $\in$ F(X) и B $\in$ F(Y) отображение $\psi^{T,S}$: F(X×Y)→F(X×Y)→F(F(X)×F(Y) определим выражением [29]

$$\mu_{\psi^{T,S}(R)}(A, B) = \sup\left\{\inf\left\{T(\mu_A(x), S(\mu_{CB}(y), \mu_R(x,y)))\,|\,y \in Y\right\}\middle|\,x \in X\right\}. \quad (1.22)$$

(ii) Дта всякого взвешенного отношения R $\in$ F(X $\times$ Y) и для всех нечетких множеств A $\in$ F(X) и B$\in$F(Y) отображение $\psi_{T,S}$: (X ×Y) → F(Ғ(X)×F(Y)) определим выражением

$$\mu_{\psi^{T,S}(R)}(A, B) = \sup\left\{\inf\left\{S(T(\mu_A(x),\ \mu_R(x,y),\ \mu_{CB}(y)))\,|\,x \in X\right\}\middle|\,y \in Y\right\}. \quad (1.23)$$

(iii) Для всякого взвешенного отношения R $\in$ F(X $\times$ Y) м для всех нечетких множеств A $\in$ (X) u B$\in$(Y) отображение $\psi^{S,T}$: F(X × Y) → F(F(X)×(Y)) определим выражением

$$\mu_{\psi^{T,S}(R)}(A, B) = \sup\left\{\inf\left\{T(S(\mu_{CA}(x),\ \mu_R(x,y),\ \mu_B(y)))\,|\,y \in Y\right\}\middle|\,x \in X\right\}. \quad (1.24)$$

(iv) Для всякого взвешенного отношения R $\in$ F (X $\times$ Y) и для всех нечетких множеств A $\in$ F(X) и B$\in$ (Y) отображение.

F(X × Y) → F(F(X)×(F(Y)).

F(F(X))×F(Y) определим выражением

$$\mu_{\psi_{S,T}(R)}(A, B) = \inf\{\sup(\ \mu_{CA}(x), \mu_B(y),\ \mu_R(x,\ y)))\ |y \in Y\}|x \in X\} \quad (1.25)$$

Введенные четыре взвешенные нечеткие отношения согласно Определению 1.11 являются также нечеткими расширениями некоторых взвешенных отношений.

1.3. Нечеткая логика - математические основы

Для сложных процессов, характеризующихся неопределенностью (неточностью, нестохастичностью, неполнотой, нечеткостью) в исходной информации и ситуациях внешней и внутренней среды, обычно не предоставляется возможность построения простых адекватных математических моделей. Информация о параметрах таких процессов обычно выражается экспертами в виде слов и предложений, т.е. в лингвистической форме. В таких случаях целесообразно применять системы моделирования, принятия решений и управления, использующие средства технологии мягких вычислений (Soft Computing) [1,26-29].

Ввиду ограниченности возможностей традиционных методов математического моделирования при решении слабо формализуемых задач применяются технологии интеллектуального анализа данных. В их основе лежат методы искусственного интеллекта и, особенно, методы мягких вычислений, и зарождающиеся на этой теоретико-методологической базе направления интеллектуальных вычислительных технологий. Последние позволяют получать решения с приемлемой для практики точностью, путем обучения на доступных исходных данных, имеющихся в ограниченном, неполном объеме, а также представленных в качественном виде.

Достоинством нечеткой логики является возможность использования экспертных знаний о структуре объекта в виде лингвистических высказываний. Однако аппарат нечеткой логики не содержит механизмов обучения. Нечеткая логика в так называемом чистом виде не всегда применима для создания интеллектуальных систем. В частности, когда проектировщик не имеет достаточной априорной информации (знаний) о системе, построить приемлемую базу нечетких правил оказывается невозможным. С возрастанием сложности системы возникает трудность, связанная с определением корректного множества правил и функций принадлежности для адекватного описания поведения системы. Нечеткие системы страдают недостатками извлечения дополнительных знаний по результатам эксперимента и корректировки нечетких правил для улучшения качества функционирования системы.

Многих этих недостатков лишены нейронные сети, являющиеся другой компонентой мягких вычислений являются. Наиболее важным признаком этих сетей является их адаптивная природа, где «обучение по примеру» заменяет традиционное «программирование». Другим ключевым признаком нейронных сетей является встроенный параллелизм, что позволяет реализовать быстро работающие решающие схемы на основе параллельных цифровых компьютеров.

Использование нечетко-множественного подхода для описания параметров нейронной сети позволяет строить так называемые нейронечеткие системы, сочетающие преимущества указанных двух компонент Soft Computing – технологии. Это, в свою очередь, создает предпосылки для разработки более эффективных средств информационных технологий (алгоритмов и программ) построения нейронечетких моделей задач оценки, прогнозирования и принятия решений [1-4].

Объединение нечеткой логики с нейронными сетями дает принципиально новое качество. Получаемая в результате такого объединения нейронечеткая сеть обладает интеллектуальными свойствами использования знаний на естественном языке. При этом база правил должна обеспечивать возможность достижения требуемой точности нечеткой модели (после того, как определены параметры последней). Одновременно с этим, чтобы уменьшить стоимость вычислений и сделать модель более «прозрачной» (интуитивно понятной), число правил, содержащихся в базе, должно быть как можно меньшим. Более того, сокращение число правил в модели с несколькими входами может быть предварительным требованием для выполнения настройки ее параметров [5-7].

Поэтому разработка алгоритмов и программ построения нейронечетких моделей задач оценки, прогнозирования и принятия решений, основанных на нечетких правилах вывода и нейронных сетях, является актуальной проблемой.

Математическая теория нечетких множеств (fuzzy sets) и нечеткая логика (fuzzy logic) являются обобщениями классической теории множеств и классической формальной логики. Данные понятия были впервые предложены американским ученым Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) в 1965 г. Основной причиной появления новой теории стало наличие нечетких и приближенных рассуждений при описании человеком процессов, систем, объектов [26-28].

Прежде чем нечеткий подход к моделированию сложных систем получил признание во всем мире, прошло не одно десятилетие с момента зарождения теории нечетких множеств. И на этом пути развития нечетких систем принято выделять три периода.

Первый период (конец 60-х–начало 70 гг.) характеризуется развитием теоретического аппарата нечетких множеств (Л. Заде, Э. Мамдани, Беллман). Во втором периоде (70–80-е годы) появляются первые практические результаты в области нечеткого управления сложными техническими системами (парогенератор с нечетким управлением). Одновременно стало уделяться внимание вопросам построения экспертных систем, построенных на нечеткой логике, разработке нечетких контроллеров. Нечеткие экспертные системы для поддержки принятия решений находят широкое применение в медицине, экономике и технической диагностике. Наконец, в третьем периоде, который длится с конца 80-х годов и продолжается в настоящее время, появляются пакеты программ для построения нечетких экспертных систем, а области применения нечеткой логики заметно расширяются. Она применяется в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в области изделий бытовой техники, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений и многих других [1,26-29].

Триумфальное шествие нечеткой логики по миру началось после доказательства в конце 80-х Бартоломеем Коско знаменитой теоремы FAT (Fuzzy Approximation Theorem). В бизнесе и финансах нечеткая логика получила признание после того как в 1988 году экспертная система на основе нечетких правил для прогнозирования финансовых индикаторов единственная предсказала биржевой крах. И количество успешных фаззиприменений в настоящее время исчисляется тысячами [1-5,26-29].

Характеристикой нечеткого множества выступает функция принадлежности (Membership Function). Обозначим через $\mu_c(x)$ – степень принадлежности к нечеткому множеству *C*, представляющей собой обобщение понятия характеристической функции обычного множества. Тогда нечетким множеством *C* называется множество упорядоченных пар вида $C=\{\mu_c(x)/x\}, \mu_c(x)\in[0,1]$. Значение $\mu_c(x)=0$ означает отсутствие принадлежности к множеству, 1 – полную принадлежность [26-29].

Для нечетких множеств, как и для обычных, определены основные логические операции. Самыми основными, необходимыми для расчетов, являются пересечение и объединение [1-5].

Пересечение двух нечетких множеств (нечеткое "И"): *A B*:

$$\mu_{AB}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x)).$$

Объединение двух нечетких множеств (нечеткое "ИЛИ"): *A B*:

$$\mu_{AB}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x)).$$

В теории нечетких множеств разработан общий подход к выполнению операторов пересечения, объединения и дополнения, реализованный в так называемых треугольных нормах и конормах. Приведенные выше реализации операций пересечения и объединения – наиболее распространенные случаи t-нормы и t-конормы.

Для описания нечетких множеств вводятся понятия нечеткой и лингвистической переменных.

Нечеткая переменная описывается набором *(N,X,A)*, где *N* – это название переменной, *X* – универсальное множество (область рассуждений), *A*–нечеткое множество на *X*.

Значениями лингвистической переменной могут быть нечеткие переменные, т.е. лингвистическая переменная находится на более высоком уровне, чем нечеткая переменная. Каждая лингвистическая переменная состоит из: названия, множества своих значений, которое также называется базовым терм-множеством *T*. Элементы базового терм-множества представляют собой названия нечетких переменных, универсального множества *X,* синтаксического правила *G*, по которому генерируются новые термы с применением слов естественного или формального языка и семантического правила *P*, которое каждому значению лингвистической переменной ставит в соответствие нечеткое подмножество множества *X*.

Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности. Наибольшее распространение получили: треугольная, трапецеидальная и гауссова функции принадлежности.

Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел (a, b, c), и ее значение в точке x вычисляется согласно выражению [26]:

$$\mu(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a},\ a\le x\le b,\\ 1-\dfrac{x-b}{c-b},\ b\le x\le c,\\ 0,\ \textit{востальных случфях}.\end{cases}$$

При *(b-a)=(c-b)* имеем случай симметричной треугольной функции принадлежности, которая может быть однозначно задана двумя параметрами из тройки (a, b, c).

Аналогично для задания трапецеидальной функции принадлежности необходима четверка чисел (a, b, c, d) [27]:

$$\mu(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a},\ a\le x\le b,\\ 1,\ b\le x\le c,\\ 1-\dfrac{x-c}{d-c},\ c\le x\le d,\\ 0,\ \textit{востальных случфях}.\end{cases}$$

При *(b-a)=(d-c)* трапецеидальная функция принадлежности принимает симметричный вид.

Функция принадлежности гауссова типа описывается формулой

$$\mu(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right]$$

и оперирует двумя параметрами. Параметр c обозначает центр нечеткого множества, а параметр отвечает за крутизну функции.

Основой для проведения операции нечеткого логического вывода является база правил, содержащая нечеткие высказывания в форме "Если-то" и функции принадлежности для соответствующих лингвистических термов. При этом должны соблюдаться следующие условия [26-29]:

1. Существует хотя бы одно правило для каждого лингвистического терма выходной переменной;

2. Для любого терма входной переменной имеется хотя бы одно правило, в котором этот терм используется в качестве предпосылки (левая часть правила).

В противном случае имеет место неполная база нечетких правил [1-5].

Пусть в базе правил имеется m правил вида:

R_1: *ЕСЛИ* x_1 *это* A_{11} … *И* … x_n *это* A_{1n}, *ТО* y *это* B_1

…

R_i: *ЕСЛИ* x_1 *это* A_{i1} … *И* … x_n *это* A_{in}, *ТО* y *это* B_i

…

R_m: *ЕСЛИ* x_1 *это* A_{i1} … *И* … x_n *это* A_{mn}, *ТО* y *это* B_m ,

где x_k , $k=1..n$ – входные переменные; y – выходная переменная; A_{ik} – заданные нечеткие множества с функциями принадлежности.

Результатом нечеткого вывода является четкое значение переменной y^* на основе заданных четких значений x_k , $k=1..n$.

В общем случае механизм логического вывода включает четыре этапа: введение нечеткости (фазификация), нечеткий вывод, композиция и приведение к четкости, или дефазификация (см. рисунок 1.1) [5-7].

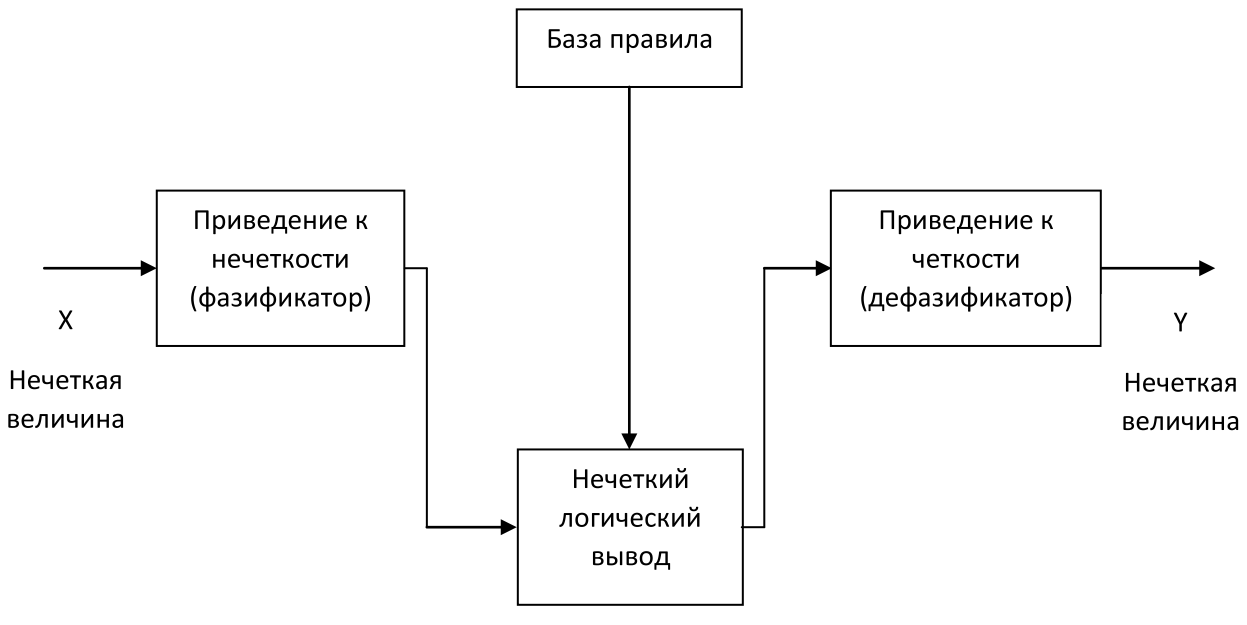


Рис. 1.1. Система нечеткого логического вывода.

Алгоритмы нечеткого вывода различаются главным образом видом используемых правил, логических операций и разновидностью метода дефазификации. Разработаны модели нечеткого вывода Мамдани, Сугено, Ларсена, Цукамото.

Системы нечеткого вывода предназначены для преобразования значений входных переменных в выходные переменные на основе использования нечетких правил продукций. Основными этапами нечеткого вывода являются:

1. Формирование базы правил систем нечеткого вывода;
2. Фаззификация входных переменных;
3. Агрегирование подусловий в нечетких правилах продукций;
4. Активизация или композиция подзаключений в нечетких правилах продукций;
5. Аккумулирование заключений нечетких правил продукций;
6. Дефаззификация выходных переменных.

В результате объединения нескольких технологий искусственного интеллекта появился специальный термин – "мягкие вычисления" (soft computing), который ввел Л. Заде в 1994 году. В настоящее время мягкие вычисления объединяют такие области как: нечеткая логика, искусственные нейронные сети, вероятностные рассуждения и эволюционные алгоритмы. Они дополняют друг друга и используются в различных комбинациях для создания гибридных интеллектуальных систем.

Влияние нечеткой логики оказалось, пожалуй, самым обширным. Подобно тому, как нечеткие множества расширили рамки классической математическую теорию множеств, нечеткая логика "вторглась" практически в большинство методов Data Mining, наделив их новой функциональностью [8-10].

Нечеткие нейронные сети (fuzzy-neural networks) осуществляют выводы на основе аппарата нечеткой логики, однако параметры функций принадлежности настраиваются с использованием алгоритмов обучения НС. Поэтому для подбора параметров таких сетей применим метод обратного распространения ошибки, изначально предложенный для обучения многослойного персептрона. Для этого модуль нечеткого управления представляется в форме многослойной сети. Нечеткая нейронная сеть как правило состоит из четырех слоев: слоя фазификации входных переменных, слоя агрегирования значений активации условия, слоя агрегирования нечетких правил и выходного слоя [1-5].

Приложения нейронных сетей ориентированы в основном на задачи классификации.

Нейрон состоит из элементов трех типов:

• Синапсы;
• сумматор

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + b,$$

• нелинейный преобразователь.

Для подборки параметров сети (обучения) используется алгоритм обратного распространения.

Основной инструмент нечеткой нейронной сети — многослойная нейронная сеть. Наибольшее распространение в настоящее время получили архитектуры нечеткой НС вида ANFIS и TSK. Доказано, что такие сети являются универсальными аппроксиматорами. Сравнительный анализ достоинстве и недостатков системы нечеткого вывода и нейронный сети показана в таблице 1.1 [1-5].

Таблица 1.1.

Сравнительный анализ системы нечеткого вывода и нейронный сети

Система нечеткого вывода.	**Нейронная сеть.**
Достоинство	
прозрачность нечетких систем, которая возможна благодаря их лингвистической интерпретации в виде нечетких продукционных правил. Лингвистическая структура этих правил способствует пониманию и анализу системы.	возможность выявления закономерностей в данных, т.е. извлечение знаний из данных
Недостатки	
априорное определение компонентов таких моделей (нечетких высказываний, функций принадлежности для лингвистических переменных, структуры базы нечетких правил и т.д.).	сложность определения размера и структуры нейронной сети (конструктивный и деструктивный методы определения размера)

Мотивация построения нечеткой нейронной сети можно описать следующими процедурами:

• Компенсация недостатков одной системы за счет достоинств другой.

• Лингвистическая структура базы правил способствует пониманию и анализу системы.

• Нечеткий вывод в интегрированных системах реализован с помощью нейронных сетей.

• Нейронные сети используются для настройки параметров функций принадлежности, которые применяются в системах нечеткого вывода.

• Нечеткие нейронные сети типа ANFIS (adaptive neuro-fuzzy inference system), используемые для решения задачи аппроксимации, показали хорошие результаты.

• Построение модели нечеткой нейронной сети, применяются в задачах классификации, путем соединения системы нечеткого вывода и нейронной сети.

• Реализация нечеткой нейронной сети, используются для решения задач классификации, кластеризации и многокритериальной оптимизации.

Нечеткие методы кластеризации, в отличие от четких методов, позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким кластерам, но с различной степенью. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более "естественна", чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров. Наиболее распространены: алгоритм нечеткой самоорганизации c-means и его обобщение в виде алгоритма Густафсона-Кесселя.

Задача классификации представляет собой задачу отнесения образца к одному из нескольких классов [1-5].

Пусть X — множество описаний объектов,

Y — множество номеров (или наименований) классов.

Известно: $X^m = \{(x_1, y_1),\ldots,(x_m, y_m)\}$ — обучающая выборка.

Требуется: построить отображение $f : X \to Y,\ f(x_i) = y_i$.

Идентифицируемая нелинейная зависимость представлена выборкой данных «входы – выход»:

$$(X_r, Y_r),\ r = \overline{1, M},$$

где $X_r = (x_{r,1}, x_{r,2},\ldots,x_{r,n})$- вектор входов и Y_r - вектор выход в r – паре; M – объем выборки.

Задача идентификации состоит в нахождении нечеткой модели F, обеспечивающей минимальное значение среднеквадратической невязки:

$$R = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(Y_r - F\left(X_r\right)\right)^2 \to \min,$$

где $F\left(X_r\right)$ - значение выхода нечеткой модели при значении входов, заданных вектором X_r.

Решение данной задачи требует оптимальную идентификацию для нахождения структуры и параметров нечеткой модели, обеспечивающих минимальное значение приведенного критерия.

В связи с этим, изложим решения задач параметрической идентификации с учетом особенностей модели Сугэно и Мамдани.

Быстрые алгоритмы обучения и интерпретируемость накопленных знаний – эти факторы сделали сегодня нечеткие нейронные сети одним из самых перспективных и эффективных инструментов мягких вычислений.

Задачи математического программирования относятся к детерминированным моделям принятия решений. Необходимо заметить, что данный раздел «составляет» классику исследования операций и в теоретическом плане является хорошо «проработанным» [1-3]. Однако реальные прикладные задачи оказываются намного сложнее, чем предусмотрено классическими постановками. Эта сложность обусловливается необходимостью учета многих критериев при принятии решения, порождая класс задач многокритериальной оптимизации. Исключительное значение для решения таких задач играет принцип Парето, согласно которому оптимальное решение следует выбирать среди Парето-оптимальных точек, образующих область компромисса, причем выбор окончательного решения осуществляется с учетом дополнительной информации. Заметим, что принцип Парето не является универсальным и применяется только при выполнении ряда аксиом. И даже если эти аксиомы выполняются, построение множества Парето может вызывать значительные трудности [4-7].

В основе другого подхода к решению проблемы многокритериальное оптимизации лежит идея последовательных уступок, основанная на ранжировании критериев в порядке убывающей важности и решении однокритериальной задачи, в которой самый важный критерий принимает экстремальное значение, а на остальные накладываются ограничений. Недостаток данного подхода заключается в усложнении ограничивающих условий и необходимости анализа различных вариантов задачи.

Переход к однокритериальной задаче возможен и при агрегировании отдельных критериев в некоторый обобщенный (интегральный) критерий с помощью подходящей свертки [8-10]. При внешней привлекательности такой подход порождает ряд вопросов: неясно, как определить вид функции агрегирования; трудно или невозможно обосновать принцип оценки ее параметров (весовых коэффициентов, показателей степеней и т.п.); проблематична интерпретация полученных результатов [29].

Рассмотрим задачу

Максимизировать: $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$

при ограничениях:

$$a_{i1}x_n + \ldots. + a_{in}x_n \le b_i,\ \ i \in M,$$
$$x_j \ge 0,\ j \in N. \quad (1.26)$$

Предполагается, что значения параметров c_j, a_{ij} *и* b_i содержат некоторую неопределенность. Допустимые отклонения от цели и ограничений характеризуются неотрицательными числами p_i, $i \in \{0\} \cup M$, субъективно выбранными и введенными в модель (1.26).

Также субъективно задается некоторый допустимый уровень $d_0 \in \mathbb{R}$, полностью удовлетворяющий лицо, принимающее решение, при условии, что значение целевой функции больше или равно заданной величины d_0. С другой стороны, если целевая функция становится меньше, чем $(d_0 - P_0)$, то принимающий решение субъект таким ответом совсем не удовлетворен. В пределах промежутка $(d_0 - P_0, d_0)$ степень удовлетворения лица, принимающего решение, повышается (например, линейно) от 0 до 1. При таких допущениях функция принадлежности $\mu_{\tilde{d}}$ нечеткой цели $\tilde{d}$ определяется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{d}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если}}\ \ t \ge d_0, \\ 1 + \dfrac{t - d_0}{p_0}, & \text{\textit{если}}\ d_0 - p_0 \le t \le d_0 \\ 0, & \text{\textit{иначе}} \end{cases} \quad (1.27)$$

Пусть теперь для i-ой функции ограничений в (1.26), $i \in M$, известна такая правая часть $b_i \in \mathbb{R}$, что принимающий решение субъект полностью удовлетворен ситуацией, когда левая часть меньше или равна этому значению. С другой стороны, если целевая функция больше, чем (b_i + p_i), то принимающий решение субъект совсем не удовлетворен. В рамках промежутка (b_i,b_i+p_i) степень удовлетворения убывает (например, линейно) от 1 до 0. При таких допущениях функция принадлежности $\mu_{\tilde{b}_i}$ нечеткой правой части b_i определяется следующим образом [29]:

$$\mu_{\tilde{b}_i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \le b_i, \\ 1 + \dfrac{t - b_i}{p_i}, & \text{если } b_i \le t \le b_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1.28}$$

Связь между целевой функцией и ограничениями в задаче гибкого линейного программирования симметрична, т. е. между ними нет различия. «Максимизация» понимается как поиск вектора $x \in \mathbb{R}$, такого что степень принадлежности пересечения нечетких множеств (1.27) и (1.28) максимизируется. Эта задача эквивалентна следующей задаче оптимизации:

Максимизировать: λ

при ограничениях:

$$\begin{aligned} &\mu_{\tilde{d}}\left(\sum_{j\in N} c_j x_j\right) \ge \lambda, \\ &\mu_{\tilde{b}_i}\left(\sum_{j\in N} a_{ij} x_j\right) \ge \lambda,\ i \in M, \\ &0 \le \lambda \le 1 \\ &x_j \ge 0,\ j \in N. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Задачу (1.29) легко преобразовать к эквивалентной задаче линейного программирования

Максимизировать: λ

при ограничениях:

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in N} c_j x_j \ge d_0 + \lambda p_0, \\ &\sum_{j\in N} a_{ij} x_j \le b_i + (1-\lambda) p_i,\ i \in M, \\ &0 \le \lambda \le 1 \\ &x_j \ge 0,\ j \in N. \end{aligned} \tag{1.30}$$

При формулировке задачи многокритериальной оптимизации в качестве требования к оптимальности решения вводится условие обязательного удовлетворения всем частным критериям и ограничениям, т.е. в. точке оптимума все функции желательности должны быть отличными от нуля. Также требуется, чтобы в оптимуме критерии удовлетворялись в максимально возможной степени. Иными словами, полагается нежелательным, чтобы значение обобщенного критерия возрастало при улучшении ряда показателей качества за счет ухудшения остальных. В терминологии теории принятия решений последнее требование эквивалентно условию принадлежности точки оптимума множеству Парето [29].

В большинстве случаев ограничения моделей многокритериальной оптимизации представляет собой математическое описание и количественное выражение самых разнообразных условий, от которых зависит некоторый технический или производственный процесс. Это разнообразие может сказаться, в частности, и в том, что причины, влияющие на изменение величин, при помощи которых выражаются соответствующие ограничения, необходимо рассматривать как независимые, но действующие одновременно. Задачи такого рода естественно описывать при помощи нескольких параметров. Часто имеется только “расплывчатая” - нечёткая информация о коэффициентах параметрической модели. В качестве математического аппарата, позволяющего формализовать нечёткую информацию, в работе применяется теория нечётких множеств. Параметрическая модель с S независимыми параметрами $t_1,\dots, t_s$ или S параметрическая задача в матричном виде записывается следующим образом [29-30]:

$$z = (\bar{a}_0' + t'\bar{b}) + \bar{e}t \to \min ,$$

$$(\bar{a} + \bar{c}t)x \subset K ,$$

$$t \in R^s .$$

Здесь K={y| $y \in R^n, y \le a_{.0} + dt$ } – заданное выпуклое подмножество пространства R^n .

Задачу такого типа можно назвать задачей параметрического программирования с множественно – значными коэффициентами. Ясно, что в рамках этой задачи не имеет смысла говорить о максимизации функции цели, поскольку значения этой функции – не числа, а множество чисел. В этом случае необходимо выяснить, какое отношение предпочтения в множестве альтернатив порождает эта функция, а затем исследовать вопрос о том, какие выборы считать рациональными в смысле этого отношения предпочтения.

Классические нечеткие системы обладают тем недостатком, что для формулирования правил и функций принадлежности необходимо привлекать экспертов той или иной предметной области, что не всегда удается обеспечить. Адаптивные нечеткие системы (adaptive fuzzy systems) решают эту проблему. В таких системах подбор параметров нечеткой системы производится в процессе обучения на экспериментальных данных. Алгоритмы обучения адаптивных нечетких систем относительно трудоемки и сложны по сравнению с алгоритмами обучения нейронных сетей, и, как правило, состоят из двух стадий:

1. Генерация лингвистических правил;
2. Корректировка функций принадлежности.

Первая задача относится к задаче переборного типа, вторая – к оптимизации в непрерывных пространствах. При этом возникает определенное противоречие: для генерации нечетких правил необходимы функции принадлежности, а для проведения нечеткого вывода – правила. Кроме того, при автоматической генерации нечетких правил необходимо обеспечить их полноту и непротиворечивость.

1.4. Обучение нейро-нечеткой сети при разных функциях принадлежности

Нейронные сети и нечеткая логика - принципиально различные математические конструкции - являются универсальными аппроксиматорами сложных (нелинейных) функциональных зависимостей во многих интеллектуальных задачах кибернетики: прогнозировании, диагностике, распознавании образов и др.

Главной особенностью нейронных сетей является их способность к обучению. Она реализуется с помощью специально разработанных алгоритмов, среди которых наиболее популярно правило <обратного распространения ошибки> (back-propagation) [1,2]. Для обучения нейронной сети не требуется никакой априорной информации о структуре искомой функциональной зависимости. Нужна лишь обучающая выборка в виде экспериментальных пар <входы-выход>. Платой за это является то, что обученная нейронная сеть - граф со взвешенными дугами - не поддается содержательной интерпретации.

Достоинством нечеткой логики является возможность использования экспертных знаний о структуре объекта в виде лингвистических высказываний: если <входы>, то <выход>. Однако аппарат нечеткой логики не содержит механизмов обучения. Поэтому результаты нечеткого логического вывода сильно зависят от вида функций принадлежности, которыми формализуются нечеткие термы: <малый>, <большой>, <холодный>, <горячий> и т. п.

Объединение нечеткой логики с нейронными сетями дает принципиально новое качество. Получаемая в результате такого объединения нейро-нечеткая сеть обладает двумя важнейшими человеческими (интеллектуальными) свойствами:

а) лингвистичностью, т.е. использованием знаний на естественном языке.

Рассматривается объект вида

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)\,, \tag{1.31}$$

для которого связь <входы(x_i)-выход(y)> можно представить в виде экспертной матрицы знаний, показанной в табл.1.2.

Таблица 1.2.

Экспертная матрица знаний

№	ЕСЛИ <входы>				ТО <выход>	Вес правила
	x_1	x_2	:	x_n		
11 12 : $1k_1$	a_1^{11} a_1^{12} : $a_1^{1k_1}$	a_2^{11} a_2^{12} : $a_2^{1k_1}$	: : : :	a_n^{11} a_n^{12} : $a_n^{1k_1}$	d_1	w_{11} w_{12} : w_{1k_1}
:	:	:	:	:	:	:
$m1$ $m2$: mk_m	a_1^{1m1} a_1^{1m2} :	a_2^{1m1} a_2^{1m2} :	: : :	a_n^{1m1} a_n^{1m2} :	d_m	w_{m1} w_{m2}

	$a_1^{mk_m}$	$a_2^{mk_m}$	:	$a_n^{mk_m}$		: w_{mk_m}

Матрице соответствует нечеткая база знаний:
ЕСЛИ $[(x_1 = a_1^{j1})$ È $(x_2 = a_2^{j1})$ È ...È $(x_n = a_n^{j1})]$ (с весом w_{j1}):
: ИЛИ $[(x_1 = a_1^{jk_j})$ È $(x_2 = a_2^{jk_j})$ È ...È $(x_n = a_n^{jk_j})]$ (с весом w_{jk_j}),

ТО $y \in d_j = [y_{j-1}, y_j]$, $j = \overline{1,m}$ (1.32)

где a_i^{jp} - лингвистический терм, оценивающий переменную x_i в строке $p = \overline{1,k_j}$;

k_j - количество строк-конъюнкций, соответствующих классу d_j, $j = \overline{1,m}$ выходной переменной y;

w_{jp} - число в диапазоне [0,1], характеризующее субъективную меру уверенности эксперта в части высказывания с номером $p = k_j$.

Классы d_j, $j = \overline{1,m}$, формируются путем квантования диапазона $[\underline{y}, \overline{y}]$ выходной переменной на m уровней:

$$[\underline{y}, \bar{y}] = \underbrace{[\underline{y}, y_1)}_{d_1} \cup \underbrace{[y_1, y_2)}_{d_2} \cup \ldots \cup \underbrace{[y_{j-1}, y_j)}_{d_j} \cup \ldots \cup \underbrace{[y_{m-1}, \bar{y}]}_{d_m}; \qquad (1.33)$$

Нечеткой базе знаний (1.32) соответствует следующая аппроксимация объекта (1.31):

$$y = (\underline{y}\mu^{d_1}(y) + y_1\mu^{d_2}(y) + \ldots + y_{m-1}\mu^{d_m}(y)) / \sum_{j=1}^{m} \mu^{d_j}(y), \qquad (1.34)$$

$$\mu^{d_j}(y) = \max_{p=\overline{1,k_j}} \{w_{jp} \min_{i=\overline{1,n}} [\mu^{jp}(x_i)]\}, \qquad (1.35)$$

где $\mu^{d_j}(y)$ - функция принадлежности выхода y к классу d_j;
$\mu^{jp}(x_i)$ - функция принадлежности переменной x_i к терму a_i^{jp};
b_i^{jp}, c_i^{jp} - параметры настройки функций принадлежности.

В этом разделе предлагается способ представления лингвистической информации об объекте (1.31) в виде специальной нейро-нечеткой сети, изоморфной базе знаний (1.32). Структура такой сети представлена на рис.1, а содержание узлов показано в табл.1.3.

Из рис.1.2 видно, что нейро-нечеткая сеть имеет пять слоев:

слой 1 - входы объекта идентификации;

слой 2 - нечеткие термы, используемые в базе знаний (1.32);

слой 3 - строки-конъюнкции нечеткой базы знаний (1.32);

слой 4 - правила, объединяемые в классы $d_j,\ j=\overline{1,m}$;

слой 5 - операция дефаззификации (1.34), т. е. преобразование результатов нечеткого логического вывода в четкое число.

Число узлов в нейро-нечеткой сети определяется так:

слой 1 - по количеству входов объекта идентификации;

слой 2 - по количеству нечетких термов в базе знаний (1.32);

слой 3 - по количеству строк-конъюнкций в базе знаний;

слой 4 - по количеству классов, на которые разбивается диапазон выходной переменной.

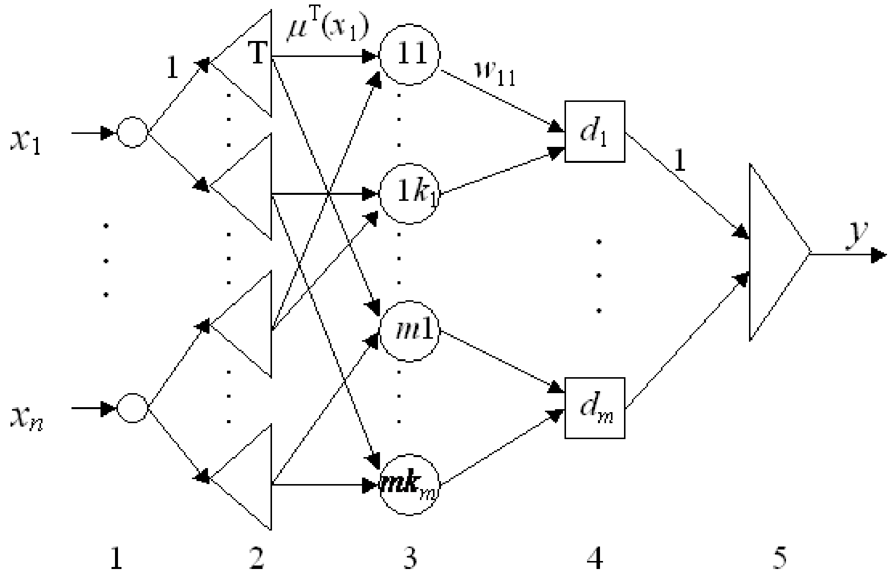
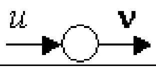
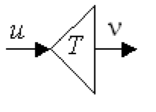
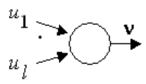
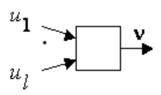
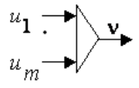


Рис.1.2. Структура нейро-нечеткой сети

Таблица 1.3.

Элементы нейро-нечеткой сети

Узел	Название	Функция
	Вход	$v=u$
	Нечеткий терм	$v=\mu^{T}(u)$
	Нечеткое правило	$v=\prod_{i=1}^{l} u_i$

	Класс правил	$v = \sum_{i=1}^{l} u_i$
	Дефаззификация	$v = \sum_{j=1}^{m} u_j \bar{d}_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} u_j$

Дуги графа взвешиваются следующим образом:

единицей - дуги между 1-м и 2-м слоями;

функциями принадлежности входа к нечеткому терму - дуги между 2-м и 3-м слоями;

весами правил - дуги между 3-м и 4-м слоями;

единицей - дуги между 4-м и 5-м слоями.

В табл.1.3 обозначено:

$\mu^T(u)$ - функция принадлежности переменной u к терму Т;

$\bar{d}_j$ - центр класса $d_j \in [\underline{y}, \overline{y}]$.

При определении элементов *нечеткое правило* и *класс правил*, входящих в табл.1.3, нечетко-логические операции *min* и *max* из формулы (1.35) заменены арифметическими операциями умножения и сложения. Возможность такой замены обоснована в работе [3]. Здесь это позволяет получить аналитические выражения, удобные для дифференцирования.

Суть обучения состоит в подборе таких весов дуг, которые минимизируют различие между результатами нейро-нечеткой аппроксимации и реальным поведением объекта. Для обучения используется система рекуррентных соотношений:

$$w_{jp}(t+1) = w_{jp}(t) - \mu \frac{\partial E_t}{\partial w_{jp}(t)}, \tag{1.36}$$

$$c_i^{jp}(t+1) = c_i^{jp}(t) - \eta \frac{\partial E_t}{\partial c_i^{jp}(t)}, \tag{1.37}$$

$$b_i^{jp}(t+1) = b_i^{jp}(t) - \eta \frac{\partial E_t}{\partial b_i^{jp}(t)}, \quad j = \overline{1,m}, i = \overline{1,n}, p = k_j, \tag{1.38}$$

минимизирующих критерий

$$E_t = \frac{1}{2}(\hat{y}_t - y_t)^2, \tag{1.39}$$

применяемый в теории нейронных сетей, где:

$\hat{y}_t$ и y_t − теоретический и экспериментальный выходы объекта (1.31) на t -м шаге обучения;

$w_j^p; c_i^{jp}, b_i^{jp}$ - веса правил (w) и параметры функций принадлежности (b,c) на t -м шаге обучения;

η- параметр обучения, который может выбираться в соответствии с рекомендациями работы [2].

Частные производные, входящие в соотношения (1.40)-(1.42), характеризуют чувствительность ошибки (E_t) к изменению параметров нейро-нечеткой сети, и вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial E_t}{\partial w_{jp}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial \mu^{dj}(y)}{\partial w_{jp}}, \qquad (1.40)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial c_i^{jp}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial c_i^{jp}}, \qquad (1.41)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial b_i^{jp}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial b_i^{jp}}, \qquad (1.42)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial E_t}{\partial y} = y_t - \hat{y}_t, \qquad (1.43)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial y}{\partial \mu^{d_j}(y)} = \frac{\overline{d_j} \sum_{j=1}^{m} \mu^{d_j}(y) - \sum_{j=1}^{m} \overline{d}_j \mu^{d_j}(y)}{\left(\sum_{j=1}^{m} \mu^{d_j}(y)\right)^2}, \qquad (1.44)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial \mu^{d_j}(y)}{\partial \left(\prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i)\right)} = w_{jp}, \qquad (1.45)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i)\right)}{\partial \nu^{jp}(x_i)} = \frac{1}{\mu^{jp}(x_i)} \prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i), \qquad (1.46)$$

$$\frac{\partial \mu^{d_j}(y)}{\partial w_{jp}} = \prod_{i=1}^{n} \mu^{jp}(x_i), \qquad (1.47)$$

$$\frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial c_i^{jp}} = \frac{2c_i^{jp}(x_i - b_i^{jp})^2}{((c_i^{jp})^2 + (x_i - b_i^{jp})^2)^2}, \qquad (1.48)$$

$$\frac{\partial \mu^{jp}(x_i)}{\partial b_i^{jp}} = \frac{2(c_i^{jp})^2 (x_i - b_i^{jp})}{\left((c_i^{jp})^2 + (x_i - b_i^{jp})^2\right)^2}. \qquad (1.49)$$

Для гауссовой функции принадлежности $\mu(\tilde{o}) = \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)$ с учетом значений частных производных

$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial a_i^{jp}} = \frac{(x_i^* - a_i^{jp}) \cdot \mu_i^{jp}(x_i^*)}{(b_i^{jp})^2},$$
$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial b_i^{jp}} = \frac{(x_i^* - a_i^{jp})^2 \cdot \mu_i^{jp}(x_i^*)}{(b_i^{jp})^3} \qquad (1.50)$$

значения параметров на $t+1$ определяются следующим образом:

$$a_i^{jp}(t+1) = a_i^{jp}(t) - \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{(x_i^* - a_i^{jp})\mu_i^{jp}(x_i*)}{(b_i^{jp})^2},$$
$$b_i^{jp}(t+1) = b_i^{jp}(t) - \beta\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{(x_i^* - a_i^{jp})^2 \mu_i^{jp}(x_i^*)}{(b_i^{jp})^2}.$$

Для колоколообразной функции принадлежности $\mu(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$ с учетом значений частных производных

$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial a_i^{jp}} = \frac{2b_i^{jp}(x_i^* - a_i^{jp})^2}{\left((b_i^{jp})^2 - (x_i^* - a_i^{jp})^2\right)^2},$$
$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial b_i^{jp}} = \frac{2b_i^{jp}(x_i^* - a_i^{jp})}{\left((b_i^{jp})^2 + (x_i^* - a_i^{jp})^2\right)^2}$$

значения параметров на $t+1$ определяются следующим образом:

$$a_i^{jp}(t+1) = a_i^{jp}(t) - \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{2b_i^{jp}(x_i^* - a_i^{jp})^2}{\left((b_i^{jp})^2 - (x_i^* - a_i^{jp})^2\right)^2},$$
$$b_i^{jp}(t+1) = b_i^{jp} - \beta\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{2(b_i^{jp})^2(x_i^* - a_i^{jp})}{\left((b_i^{jp})^2 - (x_i^* - a_i^{jp})^2\right)^2}.$$

Для параболических функций принадлежности $\mu(x) = 1 - \left(\frac{x-a}{b}\right)^2$ с учетом значений частных производных

$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial a_i^{jp}} = \frac{2(x_i^* - a_i^{jp})^2}{(b_i^{jp})^2}, \; \frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial b_i^{jp}} = \frac{2(x_i^* - a_i^{jp})^2}{(b_i^{jp})^3}.$$

значения параметров на *t+1* определяются следующим образом:

$$a_i^{jp}(t+1) = a_i^{jp}(t) - \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{2(x_i^* - a_i^{jp})}{(b_i^{jp})^2},$$

$$b_i^{jp}(t+1) = b_i^{jp} - \beta\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{2(x_i^* - a_i^{jp})^2}{(b_i^{jp})^3}.$$

Для треугольных функций принадлежности

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & b \le x \le c, \\ 0 & \text{вдругих случаях.} \end{cases}$$

частные производные равны

$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial a_i^{jp}} = \frac{x_i - b_i^{jp}}{(b_i^{jp} - a_i^{jp})^2}, \quad \frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial c_i^{jp}} = \frac{x_i - b_i^{jp}}{(b_i^{jp} - c_i^{jp})^2},$$

$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial b_i^{jp}} = \begin{cases} \dfrac{a_i^{jp} - x_i}{(b_i^{jp} - a_i^{jp})^2}, & a \le x \le b, \\ \dfrac{c_i^{jp} - x_i}{(b_i^{jp} - c_i^{jp})^2}, & b \le x \le c. \end{cases}$$

Значения параметров на *t+1* определяются следующим образом:

$$a_i^{jp}(t+1) = a_i^{jp}(t) - \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{x_i^* - b_i^{jp}}{(b_i^{jp} - a_i^{jp})^2},$$

$$b_i^{jp}(t+1) = b_i^{jp}(t) - \beta\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \begin{cases} \dfrac{a_i^{jp} - x_i^*}{(b_i^{jp} - a_i^{jp})^2}, & a \le x \le b, \\ \dfrac{c_i^{jp} - x_i^*}{(b_i^{jp} - c_i^{jp})^2}, & b \le x \le c, \end{cases}$$

$$c_i^{jp}(t+1) = c_i^{jp}(t) - \gamma\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{x_i^* - b_i^{jp}}{(b_i^{jp} - c_i^{jp})^2}.$$

Для трапециевидных функций принадлежности:

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & b \le x \le c, \\ \dfrac{x-d}{c-d}, & c \le x \le d, \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

частные производные равны:

$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial a_i^{jp}} = \frac{x_i - b_i^{jp}}{(b_i^{jp} - a_i^{jp})^2}, \quad \frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial b_i^{jp}} = \frac{a_i^{jp} - x_i}{(b_i^{jp} - a_i^{jp})^2},$$

$$\frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial c_i^{jp}} = \frac{d_i^{jp} - x_i}{(c_i^{jp} - d_i^{jp})^2}, \quad \frac{\partial \mu_i^{jp}}{\partial a_i^{jp}} = \frac{x_i - c_i^{jp}}{(c_i^{jp} - d_i^{jp})^2}.$$

Значения параметров на *t+1* определяются следующим образом:

$$a_i^{jp}(t+1) = a_i^{jp}(t) - \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{x_i^* - b_i^{jp}}{(b_i^{jp} - a_i^{jp})^2},$$

$$b_i^{jp}(t+1) = b_i^{jp}(t) - \beta\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{a_i^{jp} - x_i^*}{(b_i^{jp} - \grave{a}_i^{jp})^2},$$

$$c_i^{jp}(t+1) = c_i^{jp}(t) - \gamma\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{d_i^{jp} - x_i^*}{(c_i^{jp} - d_i^{jp})^2},$$

$$d_i^{jp}(t+1) = d_i^{jp}(t) - \delta\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \cdot \frac{x_i^* - c_i^{jp}}{(c_i^{jp} - d_i^{jp})^2}.$$

Аналогично правилу, алгоритм обучения нейро-нечеткой сети состоит из двух фаз. На первой фазе вычисляется модельное значение выхода объекта (y), соответствующее заданной архитектуре сети. На второй фазе вычисляется значение невязки (E_t) и по формулам (1.40)-(1.49) пересчитываются веса межнейронных связей.

1.5. Нейро-нечеткая технология

1.5.1. Нечеткие нейронные сети

Нечеткая логика, основанная на теории возможностей, была успешно применена во многих областях. При использовании нечеткой логики входные данные в форме лингвистических переменных представляются функциями принадлежности, которые используются для определения нечеткого множества четкой величины и степеней принадлежности в этом множестве. Многие параметры систем, основанных на нечеткой логике, должны быть определены специалистом по нечеткой логике, однако, эти процессы конструирования связаны с методом проб и ошибок или некоторыми эвристическими алгоритмами. Более того, конструктор, знающий характеристики системы, также нуждается в сборе первоначальных правил. В некоторых исследованиях предлагаются механизмы генерирования нечетких правил и способы их модификации на базе опыта. Среди них следует отметить самоорганизующийся нечеткий регулятор, который может формировать и модифицировать нечеткие правила, алгоритм кластеризации для нечеткого разбиения пространства входных данных и алгоритм наименьшего квадрата для определения последовательности параметров, который может быть использован для конструирования параметров систем, основанных на нечеткой логике [31-40].

Хотя эти методы являются полезными, они все еще являются, в некотором смысле, эвристическими, и выбор функций принадлежности в нечетких правилах связан с процедурой проб и ошибок. Для устранения этих недостатков недавно разработаны интересные методы, использующие способность обучения искусственных нейронных сетей. Многослойные нейронные сети с алгоритмами обучения, такими как backpropagation, reinforcement и несупервизорные алгоритмы обучения или комбинации этих алгоритмов, были применены для выбора нечетких правил или точной настройки функций принадлежности в этих правилах [1-5,8-10].

Под нечеткой нейронной сетью мы будем понимать нейронную сеть, которая перерабатывает нечеткие сигналы и/или имеет нечеткие веса. Следовательно, если рассматриваемая нейронная сеть нечеткая, то сигналы и/или веса должны быть представлены нечеткими множествами. Будем различать 3 типа нечетких нейронных сетей ($ННС_i$, $i=\overline{1,3}$). Первый тип нечетких нейронных сетей ($ННС_1$) (рис.1.3) перерабатывает четкие сигналы (x_i), но веса представляются как нечеткие множества $(\tilde{w}_{ij}, \tilde{k}_i)$.

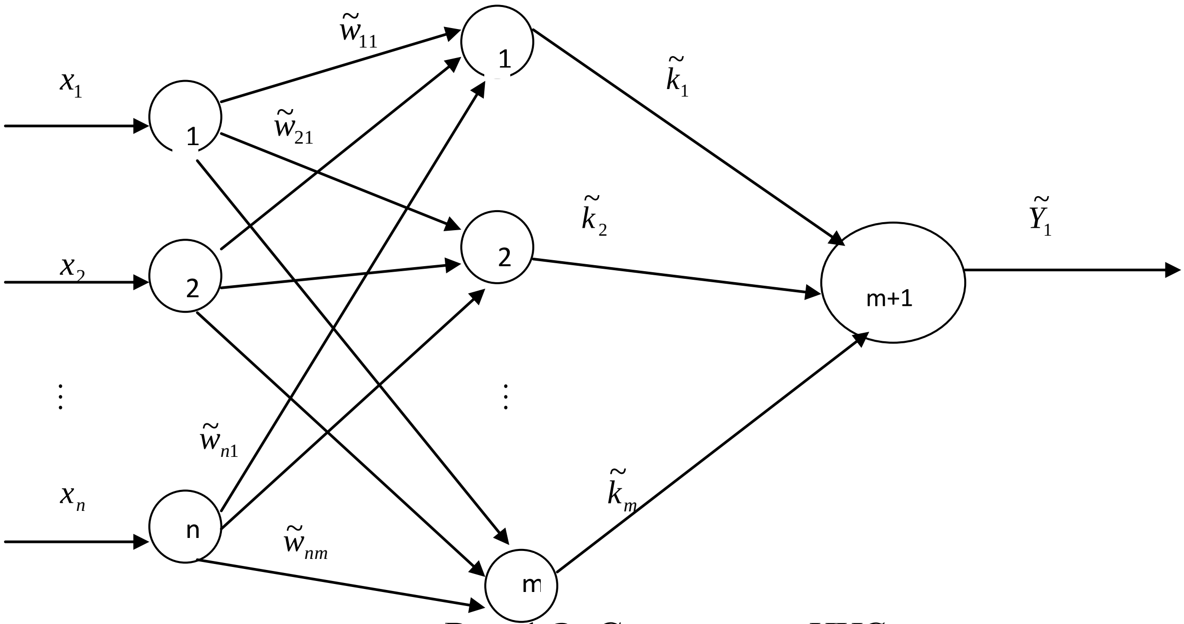


Рис.1.3. Структура $ННС_1$.

Второй тип нечетких нейронных сетей (HHC_2) перерабатывает нечеткие сигналы $\tilde{x}_i$, однако имеет четкие весовые коэффициенты (w_{ij}, k_i)(рис.1.4).

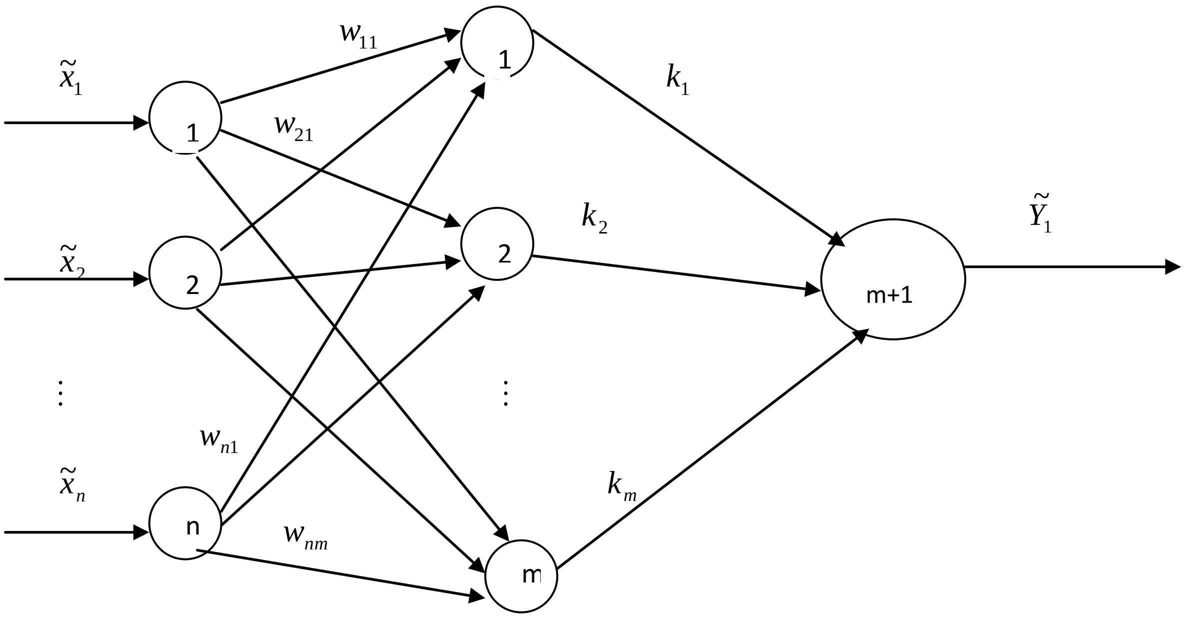


Рис.1.4. Структура HHC_2

Третий тип (HHC_3) имеет и нечеткие входные сигналы ($\tilde{x}_i$) и нечеткие веса (w_{ij}, k_i) (рис.1.5).

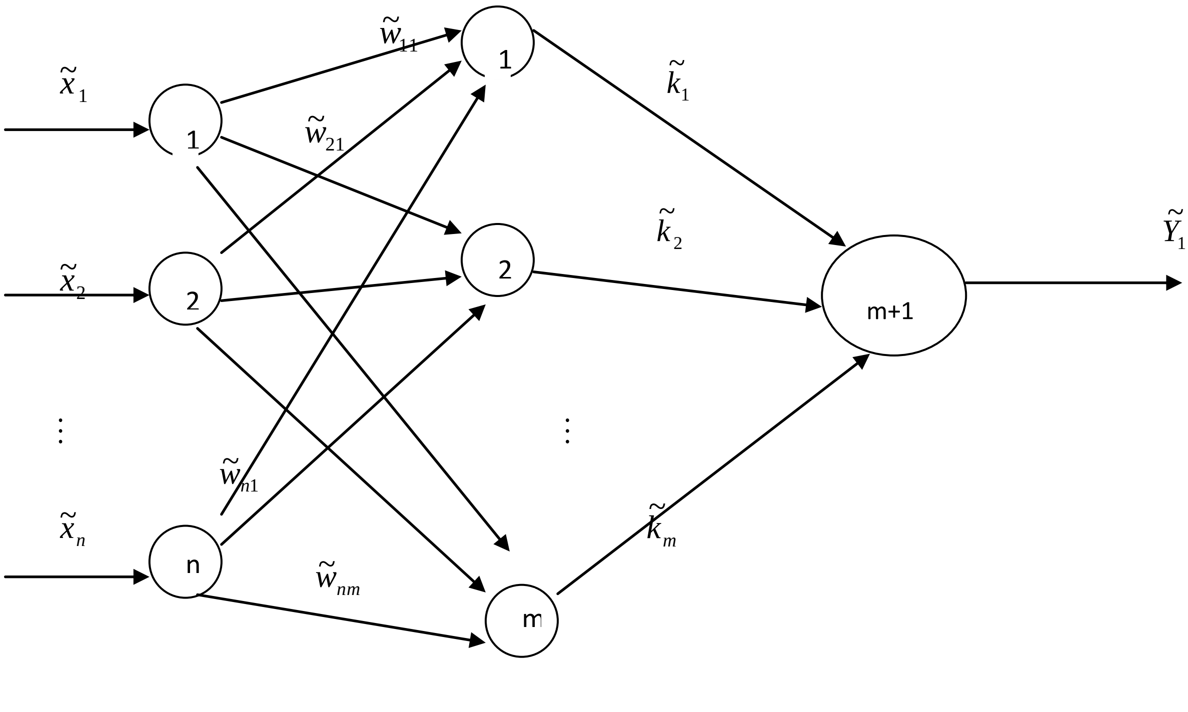


Рис.1.5. Структура HHC_3.

1.5.2. Общий алгоритм обучения нечетких нейронных сетей

Рассматривается общие фаззификационное правило обучения ННС типа 3. Общий выход рассматриваемой HHC_3 . $\tilde{Y}_i$ определяется как [1-5,8-10]

$$\tilde{Y}_i = f\left[\sum_{j=1}^{n} \tilde{k}_j \tilde{z}_{ij}\right], \tag{1.51}$$

где $\tilde{z}_{ij}$ выход j-го нейрона скрытого слоя при поступлении на вход сети вектора $\tilde{X}_i = (\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, ..., \tilde{x}_{in})$, $\tilde{k}_j$ - нечеткий весовой коэффициент связи между j-ь нейроном среднего слоя и выходным (m+1)-ым, f – функция активации, которая в данной работе принимается как

$$f(y) = [1 + e^{-y}]^{-1}.$$

Согласно рис.1.5 $\tilde{z}_{ij}$ определяется как

$$\tilde{z}_{ij} = f\left[\sum_{l=1}^{L} \tilde{x}_{il} \tilde{w}_{lj}\right], \tag{1.52}$$

где $\tilde{w}_{ij}$ - нечеткий весовой коэффициент связи между i-ым нейроном входного слоя и j-ым нейроном скрытого слоя.

Нечеткая ошибка между текущим выходом HHC_3, и желаемым выходом определяется как

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} (\tilde{Y}_l - \tilde{Y}_l^*)^2, \tag{1.53}$$

где $\tilde{Y}_i^*$ - желаемое нечеткое значение выхода HHC_3. Ставится вопрос определения алгоритма обучения HHC_3, заключающегося в определении таких значений $\tilde{w}_{ij}$ и $\tilde{k}_j$, которые обеспечивают минимизацию (1.53), т.е. приближение $\tilde{E}$ к нулю.

Однако, т.к. в вычислении $\tilde{E}$ используется нечеткое вычитание, то даже при $\tilde{Y}_l = \tilde{Y}_l^*$ для всех l $\tilde{E}$ не будет равен нулю. Следовательно, нужно формировать правила останова вычислений в обучении HHC_3. Представим, что носителем нечеткого множества $\tilde{Y}_l$ является интервал $[\tilde{Y}_{l1}, \tilde{Y}_{l2}]$, $1 \le l \le L$. Тогда, если $\tilde{Y}_l = \tilde{Y}_l^*$, то для $\tilde{E}$ носителем будет интервал $[-\lambda, \lambda]$, где

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} (Y_{l1}^* - Y_{l2}^*)^2. \tag{1.54}$$

Если $\varepsilon > 0$ обозначает приемлемое отклонение от $\tilde{E}$, когда $\tilde{Y}_l = \tilde{Y}_l^*$, то правило останова может быть сформировано следующим образом [31,48]. Итерации по поиску $\tilde{w}_{ij}$ и $\tilde{k}_j$ необходимо остановить, когда $\tilde{E}$ находится внутри множества

$$\Omega = [-\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \times [0,1]. \tag{1.55}$$

Перейдем к формированию самого алгоритма обучения. Правила обучения для $\tilde{k}_j$ будут как

$$\tilde{k}_j(q+1) = \tilde{k}_j(q) + \eta \Delta \tilde{k}_j(q), \quad 1 \le j \le m; \quad q = 1,2,..., \tag{1.56}$$

где

$$\Delta \tilde{k}_k = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{k}_j}, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{k}_j} = \sum_{l=1}^{L} \left(\tilde{Y}_l - \tilde{Y}_l^*\right)\left(\tilde{Y}_l\right)\left(1 - \tilde{Y}_l\right)\tilde{z}_{lj}, \tag{1.58}$$

η - скорость обучения.

Для определения весовых коэффициентов $\tilde{w}_{ij}$ можно использовать правила

$$\tilde{w}_{ij}(q+1) = \tilde{w}_{ij}(q) + \eta \Delta \tilde{w}_{ij}(q), \tag{1.59}$$

где

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{w}_{ij}} = \sum_{l=1}^{L} (\tilde{Y}_l - \tilde{Y}_l^*)(\tilde{Y}_l)(1 - \tilde{Y}_l)\tilde{k}_j \frac{\partial \tilde{z}_{ij}}{\partial \tilde{w}_{ij}}, \tag{1.60}$$

$$\frac{\partial \tilde{z}_{lj}}{\partial \tilde{w}_{ij}} = (\tilde{z}_{lj})(1 - \tilde{z}_{lj})\tilde{x}_{li}. \tag{1.61}$$

Указанный выше алгоритм основывается на нечеткой арифметики и нечетком анализе.

1.5.3. Архитектура нейро-нечетких систем

Рисунок 1.6 содержит наиболее общее описание структуры основных функций нейро-нечеткой системы. Как видно из рисунка, система генерирует нечеткие правила и функции принадлежности, используемые в них. Исходными данными для генерации служат данные входа-выхода, определяющие реализацию желаемого функционирования синтезируемой логической системы, на основе конкретных значений, полученных либо экспериментально, либо каким-либо другим способом [1-5].

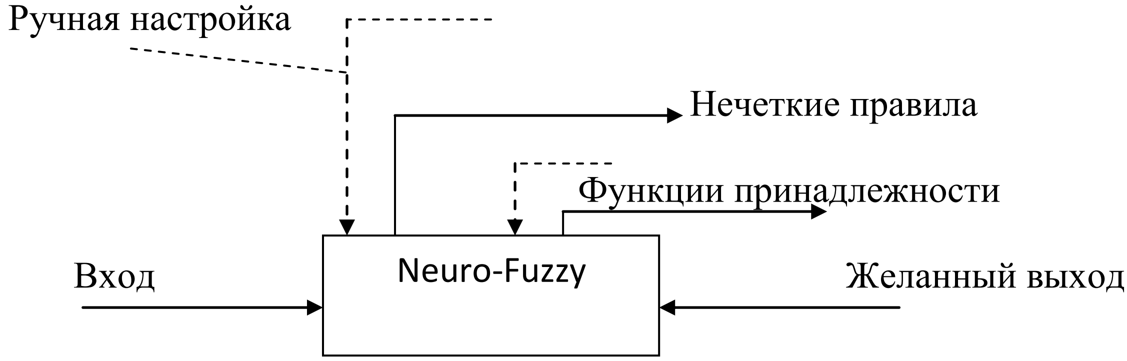


Рис.1.6. Упрощенная структура нейро-нечеткой системы

Более конкретизированная схема нейро-нечеткой системы, непосредственно отражающая ее структурное содержание показана на рисунке 1.7. Здесь для простоты изображена структура нейро-нечеткой системы с двумя входами x_1, x_2 и одним выходом Y. Как видно из рисунка, первый слой нейронов лишь распределяет входы системы по нейронам следующего слоя. Второй слой нейронов объединяет несколько групп нейронов (по количеству входов, в данном случае – 2). Нейроны в каждой группе представляют функции принадлежности для нечетких определений, принадлежащих входу, связанному с данной группой. Выходом каждого такого нейрона является значение функции принадлежности, определяющей отношение соответствия входного значения нечеткому определению, связанному с данным нейроном. Этот процесс называется фаззификацией (fuzzification), а соответствующие нейроны – фаззификаторами.

Нейроны третьего слоя представляют нечеткие правила. Количество нейронов в этом слое, в некоторых случаях, непосредственно определяет число правил, участвующих в нечеткой логической системе ЕСЛИ ТО. В некоторых других случаях, в целях минимизации размера сети, в частности, для более простого и быстрого обучения используются традиционные нейронные сети.

Нейроны четвертого слоя содержат функции принадлежности для нечетких определений, принадлежащих выходным переменным. Данный слой нейронов выполняет наиболее сложную функцию. Вначале, каждым нейроном производится операция

MAX (или некоторое гладкое приближение) над входными сигналами. Найденное значение используется для модификации соответствующей функции принадлежности (ФП) (для одного из нечетких определений выходной переменной) – величины ФП выше этого максимального значения уменьшаются до этого значения. Затем, над всеми, таким же образом модифицированными ФП для других определений, выполняется операция объединения (или MAX). Так получается функция принадлежности, т.е. нечеткое значение выхода. На рис. 1.7 в 5-м слое нижний узел Y с обратным направлением сигнала, изображен для того, чтобы показать, что выход с четвертого слоя нечеткий, и при подаче с этого узла сигнала Y с конкретным четким значением, мы получим с 4-го слоя соответствующее значение функции принадлежности.

В 5-м слое на рисунке 1.7 (нейрон Y вверху) выполняется операция дефаззификации для получения четкого выхода, то есть получения четкого значения на основе выведенного нечеткого.

Такое описание в виде нейроподобной сети позволяет исследовать данную структуру методами, аналогичными применяющимся в искусственных нейронных сетях с «прямым прохождением сигнала» (Feed Forward Neural Networks), и применять методы обучения, использующие алгоритмы «обратного распространения ошибки» (Error Backpropagation Algorithms). В данном случае каждый нейрон характеризуется не простым набором весов, порогами универсальной функции активации, а является сложным преобразователем с индивидуальной функцией, зависящей от расположения нейрона в сети (номера слоя). Связи не являются полносвязными, и каждая из них характеризуется набором параметров, в зависимости от того, на основе какой функции строятся функции принадлежности для нечетких определений переменных. В частности, для треугольной и куполообразной ФП требуется 2 параметра, для трапециадальной – 3 и т.д. При обучении формулы модификации параметров, связанных с конкретным нейроном, различаются в зависимости от номера слоя, в соответствии с типом преобразования сигналов.

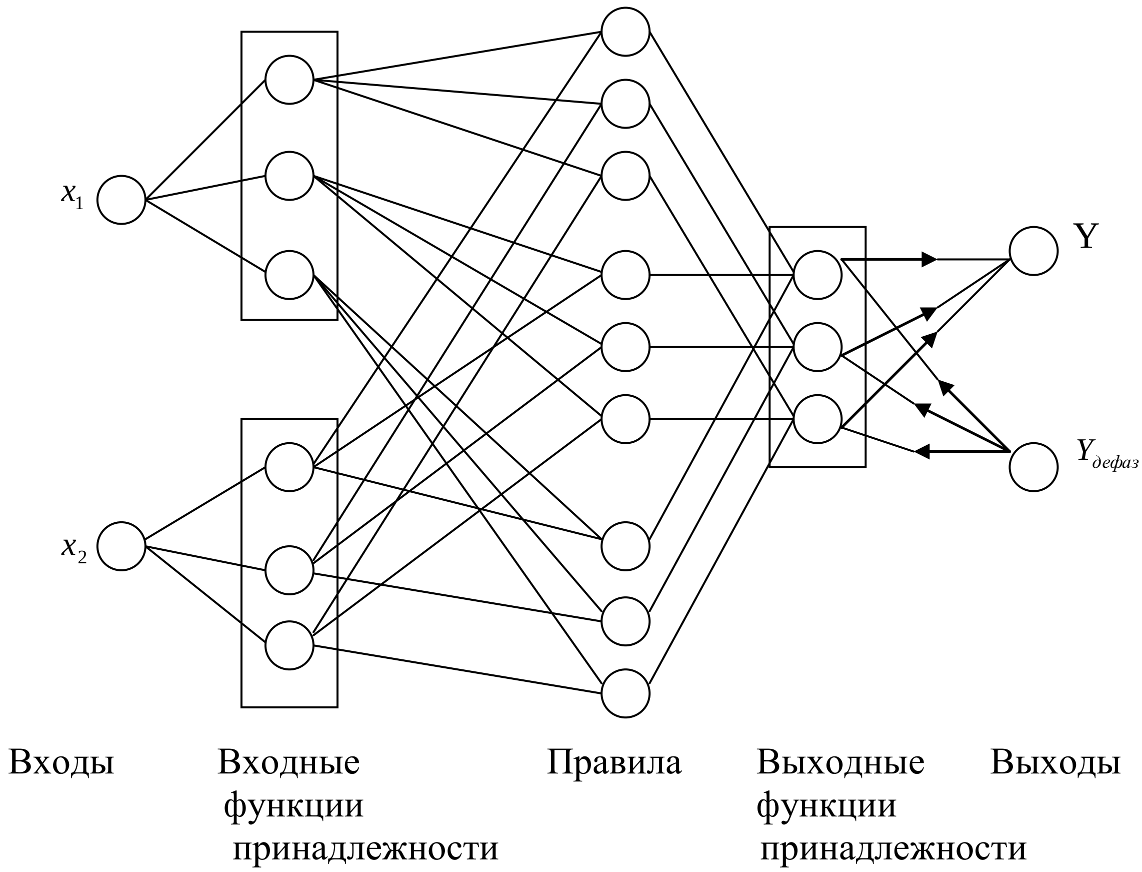


Рис.1.7. Схема нейро-нечеткой системы

При применении градиентных методов обучения всегда стремятся избавиться от негладких функций в узлах типа MIN и MAX, вместо них можно использовать, например,

$$Y = x_1 x_2 \qquad \text{и} \qquad Y = 1-(1-x_1)(1-x_2).$$

При применении генетических алгоритмов для поиска оптимальных значений параметров и структуры сети нет необходимости в гладкости используемых функций и намного облегчаются расчеты, однако, могут требоваться большие временные затраты на обучение (особенно не на начальной стадии обучения и не вблизи локального минимума, вследствии меньшей направленности).

Перечислим основные задачи, которые позволяет решать нейро-нечеткая система (рис.1.7):

1. Осуществление параллельного нечеткого вывода;

2. Автоматическая генерация правил и функции принадлежности по данным входа-выхода;

3. Возможность комбинации автоматического и ручного анализа и модификации правил и функции принадлежности.

1.5.4. Генерация нечетких правил и функций принадлежности сети

В отличии от традиционной нейронной сети, также позволяющей по данным входа-выхода строить модель системы, модель, получаемая на основе нейро-нечеткой технологии не является «черным ящиком». Кроме корректного осуществления отношения вход-выход, она позволяет извлекать эвристические знания и описывать качественную информацию о системе [1-5,8-10].

Под генерацией правил понимается возможность непосредственного отображения структуры сконструированной и обученной нейронной сети в набор нечетких правил с требуемыми характеристиками нечетких определений для левых и правых частей правил, а также алгоритмом дефаззификации, в совокупности определяющими систему логического вывода. При генерации правил определяется (генерируется) также и набор функций принадлежности, описывающих нечеткие определения, используемые в правилах как нечеткие значения для входных и выходных переменных – в левых и правых частях правил, соответственно.

В зависимости от характеристики решаемой задачи, т.е. числа входов и выходов, требований к типам функций принадлежности (например, обязательная гладкая форма для входных определений; входы нечеткие, выходы четкие; на выходе возможно представление в виде синглтонов и т.п.), а также типов используемых сетей, эта процедура может различаться и быть более или менее трудоемкой. Использование особых типов нейронов, осуществляющих операции свойственные для нечеткой логики (MIN, MAX, объединение и т.п.), облегчает преобразование правил в нейро-нечеткую сеть и обратную экстракцию правил, однако, при реализации на традиционной вычислительной технике усложняется обучение, вследствии использования нейронов со сложными нелинейными преобразованиями и требуется большая память.

Часто используются традиционные нейронные сети для каждого из этапов нечеткого вывода: фаззификации, вывода и дефаззификации.

Если требуется куполообразная форма для функций принадлежности, то соответствующие нейроны реализуют функцию [8-10]

$$Y = e^{-w(x-c)^2} \quad . \qquad (1.62)$$

Такой нейрон будет иметь 2 параметра, определяющие центр (c) и ширину (w) области под функцией принадлежности. Треугольные функции принадлежности требуют нейроны с тремя параметрами, трапецеидальные – с четырьмя. Если к форме функций принадлежности не предъявляются никакие требования, то может использоваться традиционная FFBP-сеть с нейронами с сигмоидной функцией активации. Однако, в этом случае желательна предварительная установка формы кривых ФП перед обучением данных входа-выхода системы («обучение начальной формы кривой») или определенная модификация алгоритма Backpropagation, иначе полученные кривые могут быть невыпуклыми и тем самим не выражать никакого традиционного нечеткого понятия и не формировать осмысливаемого эмпирического знания. Будучи предварительно установленными в ожидаемые формы, после обучения, функции принадлежности не будут слишком искажены и в то же время будут подправлены для более точного отражения нечеткой зависимости. Иногда в формулу для ошибки в алгоритме Backpropagation добавляют дополнительную составляющую, показывающую степень нарушения выпуклости. Модифицированное дельта-правило препятствует ее росту, хотя и несколько тормозит процесс обучения.

Блок нейро-нечеткой системы, отвечающий за реализацию нечеткого вывода, представляет набор нечетких правил и может основываться на нейронах, реализующих операцию MIN (или гладкий аналог). Количество нейронов для реализации нечеткого вывода в некоторых случаях непосредственно определяет число правил, участвующих в нечеткой логической системе ЕСЛИ-ТО. В некоторых других случаях, в целях минимизации размера сети, для более простого обучения используются традиционные нейронные сети.

В первом случае процесс экстракции правил из обученной сети проще; здесь максимальное (достаточное) количество нейронов в 3-ем слое может быть равно произведению количеств нейронов во всех группах второго слоя. В случае, изображенном на рисунке 1.7, мы можем иметь максимально 9 ($3 \cdot 3$) нейронов в третьем слое, это соответствует числу правил, которые можно сформировать комбинируя все возможные сочетания для нечетких определений, для каждой входной переменной, принимающей значения из множеств, содержащих 3 нечетких определения. В соответствии с правилами нечеткого вывода, нейроны 3-го слоя производят операцию MIN(или умножение) над всеми своими входами.

В первом случае, автоматическая генерация нечетких правил осуществляется с помощью особого алгоритма, который вначале генерирует максимально возможное (для данных переменных и наборов нечетких определений) количество правил, а затем удаляет малосущественные из них на основе величины весовых коэффициентов при соответствующих связях (которые в данном случае определяет важность связи), а также величины получаемой ошибки на выходе. Параметры нейронов в соответствующих слоях нейронной сети, полученные после обучения до требуемой точности, позволяют непосредственно получить функции принадлежности для всех используемых в правилах нечетких определений.

Во втором случае, когда слой для правил реализуется на основе традиционной Feed-Forward Backpropagation нейронной сети (эту функцию реализуют один или два последовательных слоя нейронов с сигмоидной функцией активации), извлечение правил осуществляется подачей на входы слоя для правил (определяющие левые части) значения 1.0. При этом на выходе определяется соответствующая правая часть правила - подходящее нечеткое определение для выхода будет связано с номером «выигравшего» нейрона.

Естественно, полной автоматизации не добиться – машина не сможет подобрать необходимые лингвистические названия для нечетких определений, типа «чуть ниже», «немного сильнее» (для выявления и формирования эмпирических знаний). Этими понятиями пользуется лишь человек и его делом останется их «генерация». Машинные же понятия стандартны и менее выразительны, что однако нисколько не повлияет на качество получаемого решения, выраженного численно и предназначенного для подачи на другое автоматическое устройство (например, на моторы робота).

1.5.5. Фаззификация и дефаззификация в нейро-нечетких системах

Отличие фаззификации и дефаззификации, осуществляемой в нейро-нечетких системах от традиционно используемых заключается в том, что здесь в большей степени играет роль настройка или обучение. Фаззификатором называется устройство, где для конкретного входа имеется несколько выходов, каждый из которых представляет определенное нечеткое понятие и определяет степень принадлежности к нему данного входа. Фаззификаторы обычно являются настраиваемыми и могут реализовываться в виде различных нейронов и нейронных сетей [1-5].

Аналогично, устройство, позволяющее получить на основе входного нечеткого значения соответствующее ему четкое, называется дефаззификатором. Существует несколько популярных формул дефаззификации – в зависимости от того как вычислять среднее значение по области под выходной функцией принадлежности. Не существует рекомендаций на счет того какая формула является наиболее универсальной и точной, в каждом конкретном случае могут быть свои доводы в пользу использования оригинальной, более подходящей в данном случае формулы. Привлекательная сторона дефаззификации в нейро-нечетких системах в том, что формула дефаззификации здесь может быть настраиваемой также как и функции принадлежности.

Метод реализации фаззификатора (как и дефаззификатора) зависит от того какие требования налагаются на Фому функций принадлежности, т.е. каким общим математическим выражением можно описать все их допустимое многообразие. На основе полученной формулы можно подобрать тип соответствующего нейрона. Например, если все функции принадлежности должны описываться «Гауссовскими колоколами», соответствующий фаззификатор – суть нейрон, выполняющий на выходе функцию (12). Этот нейрон имеет два параметра для настройки – центр (c) и ширину (w). Этот тип нейрона используется очень часто, т.к. выход является гладкой функцией от входа, и возможно применение хорошо исследованных градиентных методов оптимизации.

Если требуются треугольные функции принадлежности, наиболее популярные в нечеткой логике, то фаззификатор может представляться в виде нейрона, реализующего на выходе функцию

$$y = MAX\,(MIN\,((x-m)/(m-l),(x-r)/(m-r)),0)\,. \qquad (1.63)$$

Параметрами этого нейрона являются три величины, однозначно определяющие соответствующее нечеткое число, т.е. левую границу (*l*), середняк (m), и правую границу (r).

Если нет каких-либо рекомендаций или ограничений на счет выбора той или иной формы для функций принадлежности – лишь бы правильно выполнялось отображение вход-выход – можно оставить выбор фаззификатора на усмотрение компьютера, заменив его нейронной сетью, которая после обучения, создаст нейронный (нейронный в традиционном смысле) фаззификатор.

Наиболее популярная формула дефаззификации, смысл которой, в нахождении положения вертикальной линии, делящей площадь под функцией принадлежности дефаззифицируемого числа на равные площади, следующая (так называемый метод определения центра масс) [26-29]

$$y_{defuz} = \int y\mu(y)dy / \int \mu(y)dy\,. \qquad (1.64)$$

Вследствие того, что на выходе функция принадлежности может стать полученной из комбинации (объединения определенных частей) входных ФП, а комбинация определенных форм (например, колоколов) может не повторять свойства оригинальной формы (колокола), результирующая дефаззифицирующая функция трудно поддается компактному обобщению в виде относительно простого (в соответствии с традицией нейронных сетей) выражения. Соответствующий дефаззификатор строится обычно на основе устройства выполняющего функцию (1.64), при этом дискретизируется у и интегрирование заменяется суммированием [26]

$$y_{defuz} = \sum_j y_j \mu(y_j) / \sum_j \mu(y_j)\,, \qquad (1.65)$$

где μ - некоторая функция, возможно непрерывная, но дифференцируемая (вернее кусочно-дифференцируемая).

Однако, в большинстве случаев, особенно, когда речь идет о единых (нейро - и фаззи – в одном корпусе) компактных, простых, недорогих, эффективных нейро-нечетких системах, имеющих только прикладное назначение, выходные функции принадлежности выражаются в виде сиглтонов. В этом случае дефаззификатор строится на основе следующего нейрона [1-5]

$$y_{defuz} = \sum_j y_j w_j / \sum_j w_j\,. \qquad (1.66)$$

В данном случае, выходные функции принадлежности предполагаются синглтонами. Они полностью определяются параметрами нейрона (w_j) после обучения. Здесь можно исключить деление путем нормализации набора коэффициентов w_j, т.е. дефаззификация выполняется нейроном с простым взвешиванием входных сигналов на выходе.

1.5.7. Нейро-нечеткая идентификация

Нечеткое моделирование – это метод описания характеристик системы с помощью нечетких правил. При этом, сложные динамические системы выражаются с помощью нечетких правил ЕСЛИ…ТО…. Для нечеткого моделирования систем очень полезным средством оказываются нейро-нечеткие сети.

Структура нейро-нечеткого идентификатора аналогична структуре нейронного идентификатора, но в дополнение содержит блоки фаззификации и дефаззификации (рис.1.8). Ядром нейро-нечеткого идентификатора являются многослойные нейронные сети, каждая из которых имеет количество степеней свободы достаточное для определения нечетких правил неизвестного объекта или системы [1-5].

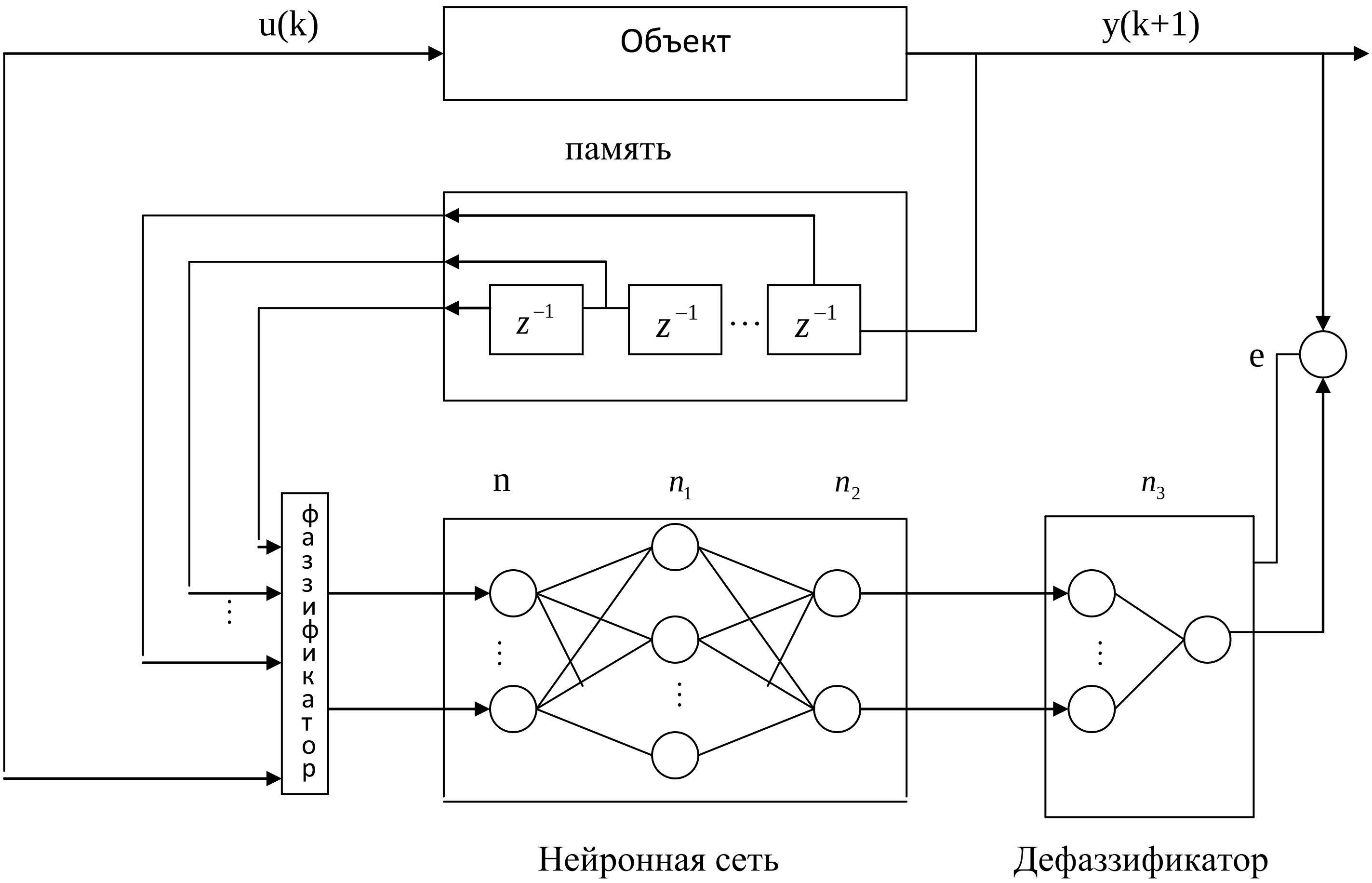


Рис. 1.8. Структура нейро-нечеткого идентификатора

Рисунок 1.8 показывает структуру нейро-нечеткой идентификации. Входами нейро-нечеткой сети являются внешние входы и задержанные на определенное количество тактов выходы системы. На рисунке 1.8 показаны только начальные центральные значения функций принадлежости выходов, а виртуальные значения функций принадлежности выходов получаются на выходе нейронной сети. Затем центровые значения виртуальных функций принадлежности выходов служат в качестве весов дополнительного слоя в блоке дефаззификации и эти дополнительные веса также обучаются для минимизации выходной ошибки в течении процесса обучения. Более того, центровые значения и кривые функций принадлежности входов тоже обучаются с помощью алгоритма обратного распространения ошибок. В [44] и предлагается алгоритм обучения для получения нечеткой модели, представленной лингвистическими правилами. При этом, в качестве меры ошибки используются

$$E(k+1) = \frac{1}{2}\left[\{y(k+1) - \hat{y}(k+1)\}^2 + \sum_{p=1}^{n_3} (\delta^p(k))^2 \right], \tag{1.67}$$

$$\hat{y}(k+1) = \frac{\sum_{p=1}^{n_3} CY^p \hat{y}^p(k)}{\sum_{p=1}^{n_3} \hat{y}(k)} = \frac{\sum_{p=1}^{n_3} CY^p f_1\left(\sum_{j=1}^{n_2} w_{pj}^2 h_j^2\right)}{\sum_{p=1}^{n_3} \hat{y}^p(k)} \tag{1.68}$$

и CY^p - являются центровыми значениями выходных функций принадлежности, n_i показывает число нейронов в i-ом слое и $\delta^p(k)$ - величина отклонения выходных значений принадлежности от выпуклой формы

$$\delta^p(k) = \begin{cases} \max\{\hat{y}^p(k) - \hat{y}^{p+1}(k), 0\}, & когда\ p < P_{\max} \\ \max\{\hat{y}^p(k) - \hat{y}^{p-1}(k), 0\}, & когда\ p > P_{\max} \end{cases} \tag{1.69}$$

где $P_{\max}$ - показывает р-ый нейрон с максимальным значением выхода в нейронной сети. В уравнении (1.67) первый терм – это ошибка для точности идентификации, а второй терм – значение меры выпуклости выходной функции принадлежности. Весовые значения нейронной сети обучаются обычным алгоритмом обратного распространения ошибки с модифицированной функцией ошибки в уравнении (1.67), а дополнительные параметры нейро-нечеткой сети обучаются в соответствии с уравнениями (1.70)-(1.76)

$$CY^p(k+1) = CY^p(k) + \alpha\{y(k+1) - \hat{y}(k+1)\}\frac{\hat{y}^p(k)}{\sum_{p=1}^{n_3}\hat{y}^p(k)} \tag{1.70}$$

и

$$m_i(k+1) = m_i(k) + \alpha_m \varepsilon_m(k+1)x_i, \tag{1.71}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_m(k+1) &= \varepsilon(k+1)\sum_{j=1}^{n_2} w_{pj} f'\cdot\left(\sum_{l=1}^{n_1} w_{jl}h_l^1\right)\times \\ &\times\sum_{l=1}^{n_1} w_{jl} f'\left(\sum_{m=1}^{n} w_{lm}x_m\right)\frac{(x_i - m_i)}{\sigma_i^2(k)}\end{aligned} \tag{1.72}$$

и

$$\sigma_i^2(k+1) = \sigma_i^2(k) + \alpha_\sigma \varepsilon_\sigma(k+1)x_i, \tag{1.73}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma(k+1) &= \varepsilon(k+1)\sum_{j=1}^{n_2} w_{pj} f'\cdot\left(\sum_{l=1}^{n_1} w_{jl}h_l^1\right)\times \\ &\times\sum_{l=1}^{n_1} w_{jl} f'\left(\sum_{m=1}^{n} w_{lm}x_m\right)\frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^3(k)},\end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(k+1) &= (y(k+1) - \hat{y}(k+1))\frac{CY^p\sum_{p=1}^{n_y}\hat{y}^p(k) - \sum_{p=1}^{n_3} CY^p\hat{y}^p(k)}{\left(\sum_{p=1}^{n_3}\hat{y}^p(k)\right)^2}\times \\ &\times f'\left(\sum_{p=1}^{n_3} w_{pj}h_j^2\right) + \sum_{p=1}^{n_3}\delta^p(k) f_1'\left(\sum_{p=1}^{n_3} w_{pj}h_j^2\right),\end{aligned} \tag{1.75}$$

$$f_1(r) = \frac{1}{1+e^{-rn}}, \qquad f_2(r) = \frac{2}{1+e^{-rn}} - 1. \tag{1.76}$$

Здесь, поскольку выходы нейронной сети показывают виртуальные значения функции принадлежности, которые являются реальными значениями в интервале [0,1], функция $f_1(\,)$ используется в качестве сигмоидной функции нейронной сети, $f_2(\,)$ - в качестве передаточной функции скрытых нейронов, а $f_1'(\,)$ и $f_2'(\,)$ показывают производные этих функций, соответственно. w_{uv} показывает весовые значения в блоке нейронной сети между v-ым нейроном некоторого слоя и u-ым нейроном следующего слоя, $m_i(k)$ и $\sigma_i(k)$ показывают i-ое центровое значение и дисперсию входных функций принадлежности, соответственно, CY^p -

центровое значение p-ой виртуальной выходной функции принадлежности, α показывает скорость обучения.

Когда процесс обучения завершается, мы используем модифицированные центровые значения входных нечетких чисел в качестве тестовых сигналов для нахождения лингвистических нечетких правил.

Затем эти нечеткие значения подаются в качестве входных значений для обученной нейронной сети, которая представляет нечеткое отношение. Значения виртуальных выходных функций принадлежности получаются с выхода нейронной сети, и входные и выходные значения нейронной сети формируют нечеткие правила системы.

1.6. Нечеткие генетические алгоритмы

Анализ истории и современных тенденций развития такого научного направления как «искусственный интеллект» показывает, что наиболее перспективной парадигмой в данной области на сегодняшний день можно считать интеграцию различных направлений и создание гибридных интеллектуальных систем [41-50]. Причем речь в данном случае идет не о механическом объединении разнородных структур, а о создании нового синергетического искусственного интеллекта [51-59], который должен обеспечить предпосылки для возникновения новых интеллектуальных организаций. Соединение в рамках таких систем различных методов и моделей, их взаимодополняемость приводит к увеличению эффективности и уменьшению недостатков отдельных методов [31-35].

Одним из наиболее ярких примеров такого рода интеграции являются мягкие интеллектуальные системы, т.е. системы, построенные на основе формулы «мягких вычислений». Сам термин, а равно и формула, «мягкие вычисления» обязаны своим появлением Л. Заде [26-28]]. Основными составляющими формулы «мягких вычислений» по определению Л. Заде являются нечеткие множества, нейронные сети и генетические алгоритмы.

Еще одним направлением, занимающимся проблематикой создания и использования интегрированных интеллектуальных систем является «вычислительный интеллект» (Computational Intelligence). Этот термин получил распространение в начале 90-х годов 20-го века. Вероятно, одной из первых работ, где был предложен этот термин, была работа [4]. Так же как и в «мягких вычислениях» основой «вычислительного интеллекта» является триумвират: нечеткие множества, нейронные сети и эволюционные вычисления. Свидетельством международного признания этого научного направления явилось проведение в 1994 году Всемирного конгресса по вычислительному интеллекту под эгидой IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers). В рамках этого конгресса были проведены три научных конференции, ставшие в последствии традиционными: по нейронным сетям, по нечетким системам и по эволюционным вычислениям [31-40].

Как видно даже из названия области, охватываемые этими двумя терминами, во многом совпадают, а в некотором смысле возможно даже идентичны. Однако очевидно, что имеются и некоторые отличия. Так, например, генетические алгоритмы являются по сути, одной из составляющих эволюционных вычислений, куда кроме них традиционно включают также эволюционное (генетическое) программирование и эволюционные стратегии [45-48]. Следовательно, термин эволюционные вычисления охватывает более широкий круг вопросов, нежели генетические алгоритмы.

При этом необходимо учесть, что вышеуказанные термины появились на свет, как это часто бывает в истории науки, во-первых, независимо друг от друга, и, во-вторых, практически одновременно (1992 – 1994 гг.). Тогда логично предположить, что оба они на самом деле предназначались для обозначения одного и того же явления, а данный случай есть классический пример неустоявшейся терминологии, что характерно для новых, еще не сформировавшихся до конца направлений и областей науки.

Вообще представляется не случайным тот факт, что упомянутые здесь термины «мягкие вычисления» и «вычислительный интеллект», как и многие другие термины являющиеся по сути «зонтичными», т.е. определяющими некую систему методов, моделей и их взаимосвязей основаны на использовании системных триад, единство которых создается тремя элементами одного уровня, каждый из которых может служить мерой совмещения двух других [49]. Примеры таких системных триад мы можем найти не только в науке, но и во многих других областях естествознании, общественных науках, искусстве, религии. Примерами таких триад являются: в архитектуре давно известна триада «польза — красота — прочность»; эволюционная теория опирается на триаду «изменчивость — отбор — наследственность» и т.д.

Тринитарные структуры в отличие от бинарных, основанных на противоречиях, антагонизме составляющих ее компонентов, выглядят более устойчивыми, более приспособленными для объединения, интеграции, сращивания составных частей системы [41-45]. Кроме того, триада является более удобной и полной моделью окружающего нас мира, не страдая при этом от излишней избыточности представления. Так, например, в физике давно известно, что трехмерность обладает неким пограничным свойством, так как при меньшей размерности не могут возникать сложные структуры, а при большей не могут существовать устойчивые атомы [47].

Таким образом, можно предположить неслучайность появления и использования таких структур. Более того, формируя такие структуры, мы, возможно на подсознательном, интуитивном уровне, пытаемся воссоздать и использовать для своих целей некие фундаментальные законы мироздания. Символично в этом смысле, что триадическая структура вычислительного интеллекта рассматривается нами как составляющая часть процесса создания и развития парадигмы синергетического искусственного интеллекта.

Вычислительный интеллект

Как уже отмечалось выше основу вычислительного интеллекта, составляет триада «нечеткие системы – нейронные сети – эволюционные вычисления (генетические алгоритмы)». Каждое звено этой триады является самостоятельным направлением исследований объединенных общей целью создания эффективных интеллектуальных систем [41-50].

Можно выделить следующие основные аспекты применения каждого из этих методов. Так для нечетких множеств основной областью применения являются задачи представления и обработки знаний, они также используются для управления неопределенностью [51-59].

Нейронные сети обладают способностью к самообучению и активно используются для решения таких задач искусственного интеллекта как классификация и распознавание образов. Поскольку нейронные сети позволяют решать задачу аппроксимации функций с нелинейными ландшафтами, их с успехом применяют при решении задач прогнозирования поведения в финансовой, экономической и социальной сфере.

Эволюционные и генетические алгоритмы в свою очередь успешно применяются для решения задач структурной и параметрической оптимизации, возникающих в ходе управления и проектирования сложных интеллектуальных систем, а также при принятии решений в условиях неопределенной или неполной информации [51-59].

В то же время в ходе становления и развития каждого из этих направлений становилось очевидным наличие глубоких взаимосвязей, взаимозависимости между ними. Изучение этих взаимозависимостей, их влияния на конечный результат и в итоге их практическое применение, и является, по-видимому, главной задачей вычислительного интеллекта.

Оказалось, что соединение в единое целое разнородных на первый взгляд составляющих дает синергетический (нелинейный) эффект, который не только превосходит ожидаемый эффект, но и позволяет во многом компенсировать минусы, присущие каждому методу в отдельности [51, 52, 56].

Известно, что эволюционные (генетические) алгоритмы давно и успешно применяются для подбора весов и синтеза топологии и архитектуры нейронных сетей. Они также используются для формирования базы правил и функции принадлежности нечетких систем [52,56].

В свою очередь нейронные сети позволяют подбирать соответствующие значения параметров генетических алгоритмов, и обеспечивают нечетким системам возможность обучения.

И, наконец, методы теории нечетких множеств используются как для подбора параметров генетических алгоритмов, так и для выбора коэффициентов определяющих скорость обучения нейронных сетей [11].

Примерами подобного рода кооперации могут служить нейро-логические, нейро-нечеткие модели, нечеткие логические регуляторы и т.д. [1, 12, 13].

Еще одним интересным моментом является нечеткое кодирование генетических алгоритмов. Известно, что для применения генетических алгоритмов все переменные задачи оптимизации должны быть определенным образом закодированы. Сущность кодирования заключается в преобразовании любого числового значения в некоторую последовательность символов конечного алфавита, состоящего обычно из небольшого числа элементов. Наиболее известный пример такого кодирования – это двоичное кодирование и представление решений в виде последовательности нулей и единиц [51-57].

Очевидно, что можно провести аналогию между процессами кодирования и фаззификации, то есть преобразования исходных числовых величин в распределения, соответствующие термам лингвистической переменной. При этом каждое числовое значение описывается одним или несколькими термами, а степень его соответствия определяется степенью принадлежности нечеткому множеству [52].

Термины конечного алфавита нечетких множеств могут включать такие понятия как «больше», «меньше», «немного больше (меньше)», «значительно больше (меньше)», «примерно ноль», «малая отрицательная (положительная)» и др. Использование таких алфавитов при кодировании решений в генетических алгоритмах дает возможность построить неоднородное разделение пространства поиска. Кроме того, закодированные последовательности могут иметь различную степень детализации.

Степень детализации и характер распределения решений в пространстве поиска может определяться на основе начальных знаний о решаемой задаче. Такое кодирование позволяет сосредоточить основные усилия на поиске в наиболее перспективных областях. В свою очередь для поиска в неперспективных областях (не содержащих элементов, которые оптимизируют функцию пригодности), определяют последовательности относительно низкой степени детализации [56].

Таким образом, можно отметить, по крайней мере, два преимущества нечеткого кодирования. Во-первых, кодовые последовательности могут быть неоднородными и ориентироваться на отдельные многообещающие области поиска, что позволит сократить область поиска и соответственно вычислительные затраты. Кроме того, в самой закодированной последовательности может быть неявным образом включена определенная функция пригодности.

Во-вторых, нечеткое кодирование позволяет выполнять так называемое слабое кодирование оптимизируемых структур. Слабое кодирование, в отличие от обычного (сильного) кодирования, не подразумевает жесткое соответствие типа «один – к – одному» между генотипом и фенотипом в кодируемой структуре.

Основная идея слабого кодирования состоит в использовании отношений типа «один - ко – многим» в процессе задания соответствия генотип - фенотип. Благодаря этому мы получаем единственный генотип, которому соответствует нечеткое семейство фенотипов. Это позволяет нам использовать все преимущества лингвистических переменных при сохранении двоичного кодирования.

Широкое распространение получили также методики кодирования решений в виде вещественных чисел [52-59].

Логическим следствием описанного процесса взаимопроникновения и интеграции различных компонент триады вычислительного интеллекта явилось появление в качестве самостоятельного термина понятия «нечеткие генетические алгоритмы» [52,56].

Термин «нечеткие генетические алгоритмы» был впервые введен в обращение в трудах ученых университета Гранады (Испания) Ф. Эррера и М. Лозано [41 - 53].

Согласно определению, данному в работе [52] нечеткий генетический алгоритм – это генетический алгоритм в котором некоторые компоненты реализованы с использованием инструментов нечеткой логики. Таких как нечеткие операторы и нечеткие правила для создания генетических операторов с различными свойствами; системы нечеткого логического контроля параметров ГА в соответствии принятыми критериями; нечеткие критерии остановки процесса генетического поиска. Математический аппарат теории нечетких систем используется в данном случае для кодирования, подбора оптимальных параметров генетических алгоритмов, выбора функции пригодности и критерия останова, создания нечетких генетических операторов.

Можно считать, что нечеткие генетические алгоритмы представляют собой частный случай нечетких адаптивных генетических алгоритмов [52,56], базирующихся на применении адаптивных процедур и правил для настройки параметров, выбора операторов и представления целевой функции. В частности для подбора значений вероятности операторов кроссинговера и мутации могут использоваться правила работы нечеткого логического контроллера [52].

В работе [56] приведено описание нечеткого генетического алгоритма для решения задачи составления графика работы ремонтных мастерских. Перечислим его основные характеристики:

- Каждая хромосома состоит из двух подхромосом, одна из которых представляет собой перечень имеющихся машин, а вторая правила составления последовательности выполнения заказов;
- Инициализация подхромосомы машин осуществляется путем случайного выбора машины i, i = 1, …, m. Инициализация подхромосомы правил осуществляется путем случайного выбора одного из следующих четырех правил: первый оплаченный заказ, самый короткий по времени процесс, самый длинный по времени процесс, самое длинное время хранения.
- Оператор кроссинговера применяется с некоторой вероятностью чтобы рекомбинации родительских хромосом и создания потомков не получались не корректные решения;
- Мутация применяется независимо к обоим подхромосомам, при этом случайно выбираются пара генов в хромосоме, и происходит их обмен между подхромосомами;
- В качестве селекции используется метод колеса рулетки, хромосомы выживают с вероятностью пропорциональной величине их функции пригодности;
- Применяется элитная стратегия, согласно которой лучшая хромосома популяции автоматически переводится в следующее поколение;
- При задании целевой функции использовались время выполнения работы и время завершения работы

$$F(\tilde{C}_j) = \pi_{\tilde{C}_j}(\tilde{d}_j) = \sup\ \min\{\mu_{\tilde{C}_j}(t), \mu_{\tilde{d}_j}(t)\},$$

где $\pi_{\tilde{C}_j}(\tilde{d}_j)$ - вероятностный критерий оценки возможности совершения нечеткого события $\tilde{C}_j$ на нечетком множестве $\tilde{d}_j$;

$\mu_{\tilde{C}_j}(t)$ и $\mu_{\tilde{d}_j}(t)$ - функции принадлежности нечетких множеств $\tilde{C}_j$ и $\tilde{d}_j$ соответственно.

В работе [56] приведен следующий псевдокод нечеткого генетического алгоритма:

```
Begin FGA
   t = 0 Iteration counter
   Initialize population P(t)
   Evaluate population P(t){i.e., compute fitness values}
   while (the end criterion is not met) do
      t = t + 1
      Select P(t) from P(t - 1)
      Crossover P(t)
      Mutate P(t)
      Evaluate P(t)
      Regulating GA parameters
      {
         Call fuzzy logic controller(e1,e2)
         Update according to equations
      }
   End while
End FGA
```

Как видно из приведенного псевдокода в состав нечеткого генетического алгоритма включен блок нечеткого логического контроллера. Используемый нечеткий логический контроллер представляет собой двумерную систему, в которой есть два параметра e_1, e_2. Значения параметров определяются формулами:

$$e_1(t) = \frac{f_{\max}(t) - f_{ave}(t)}{f_{\max}(t)},$$

$$e_2(t) = \frac{f_{ave}(t) - f_{ave}(t-1)}{f_{\max}(t)},$$

где $f_{max}(t)$ – лучшее значение целевой функции на итерации t;

$f_{ave}(t)$ – среднее значение целевой функции на итерации t;

$f_{ave}(t - 1)$ – среднее значение целевой функции на итерации $t - 1$;

В качестве примера реализации нечетких генетических операторов можно привести нечеткие операторы кроссинговера и мутации, описанные в работе [57]. Предложенные нечеткие операторы кроссинговера и мутации могут эффективно применяться для решения оптимизационных задач на нечетких графах и гиперграфах.

Нечеткий оператор кроссинговера выполняется на основе логических операций булевой алгебры. Новые решения образуются из уже имеющихся за счет использования логических операций И, ИЛИ, И-НЕ и других. Например, при выполнении оператора кроссинговера на основе операции «И» потомок образуется по правилам выполнения конъюнкции нечетких высказываний. Ниже показан пример выполнения оператора кроссинговера когда для образования первого потомка применена операция И, а для образования второго – операция ИЛИ.

Родитель 1	0,3	0,7	0,2	0,4	0,6
Родитель 2	0,8	0,5	0,9	0,3	0,2

Потомок 1	0,3	0,5	0,2	0,3	0,2
Потомок 2	0,8	0,7	0,9	0,4	0,6

Нечеткий оператор мутации (ОМ) выполняется на основе логической операции инверсии. На некотором шаге выполнения алгоритма случайным образом выбирается хромосома (решение). В этой хромосоме случайным образом выбираются две точки, и ко всем разрядам хромосомы находящимся между выбранными точками применяется операция логической инверсии.

Родитель 1	0,3	0,9	0,6	0,2	0,7

Потомок 1	0,3	0,1	0,4	0,8	0,7

Данные нечеткие генетические операторы были успешно использованы для решения задачи нахождения нечетких инвариантов нечетких графов (нечеткие внутренне и внешне устойчивые подмножества, нечеткие ядра и клики и т.д.) которые являются весьма актуальными и распространенными моделями задач дискретной оптимизации [58].

В литературе также описано значительное количество других нечетких генетических операторов: нечеткий кроссинговер, основанный на связях [59]; кроссинговеры с использованием множества родителей и с образованием множества потомков; кроссинговер поиска экстремума [49] и др.

Основной целью данной работы было провести небольшой анализ современного состояния и перспектив развития таких областей науки как «мягкие вычисления» и «вычислительный интеллект» прежде всего с позиций новой парадигмы искусственного интеллекта - создания синергетического искусственного интеллекта. Важным в этом смысле является тот факт, что интеграция методов эволюционных вычислений, нейросетевых моделей, математического аппарата теории нечетких систем дает синергетический эффект позволяющий усиливать преимущества отдельных методов и нивелировать отдельные их недостатки.

Дано описание, основные виды и преимущества нечеткого кодирования для генетических и эволюционных алгоритмов. Особое внимание уделено описанию достаточно нового термина «нечеткие генетические алгоритмы» и представлению основных характеристик нечетких генетических алгоритмов. Приведен ряд примеров использования нечетких генетических алгоритмов для решения оптимизационных задач, а также примеры нечетких генетических операторов для решения оптимизационных задач на нечетких графах и нахождения их нечетких инвариантов.

Безусловно, приведенный обзор является неполным и не охватывает все тенденции, существующие в настоящий момент в вычислительном интеллекте. Однако данная работа является лишь первым шагом на пути к созданию целостной картины, отражающей состояние дел и тенденции развития нечетких эволюционных алгоритмов и вычислительного интеллекта в целом.

1.7. Нейтрософские нечёткие множества

Нейтрософские нечеткие множества и однозначные нейтрософские нечеткие множества были впервые введены в работах [61,62]. Там же были введены интервальные нейтрософские нечеткие множества. Тем не менее однозначные нейтрософские нечеткие множества и интервальные нейтрософские нечеткие множества являются подклассами нейтрософских нечётких множеств и обобщением интуитивных нечётких множеств и интервальных интуитивных нечётких множеств. Свойства однозначных нейтрософских нечетких множеств и интервальных нейтрософских нечетких множеств независимо описываются степенями истинности, неопределенности и ложности. Основное достоинство нейтрософского нечеткого множества состоит в том, что оно представляет собой мощную общую формальную основу для выражения и обработки неполной, неопределённой, противоречивой информации, которая существует в реальных состояниях, в то время как интуитивные нечеткие множества и интервальные интуитивные нечеткие множества не могут выражать и обрабатывать неопределённую и противоречивую информацию [63].

В последнее время во многих работах предложены различные алгоритмы и методы для однозначных нейтрософских нечетких множеств и интервальных нейтрософских нечётких множеств [64,65]. В указанных работах введены некоторые базовые операции над однозначным и интервальным нейтрософскими нечёткими множествами, такие как сложение, умножение, а также некоторые соответствующие операторы агрегирования. Определены некоторые основные операционные законы элементарных нейтрософских нечётких множеств, которые включают однозначные нейтрософские нечёткие множества и интервальные нейтрософские нечёткие множества. Предложены операторы агрегирования взвешенного смешения для агрегирования элементарной нейтрософской нечёткой информации, а затем эти операторы агрегирования применены к множеству принятия решения по признакам [62, 66].

В работе [67] указаны недостатки некоторых законов работы однозначных нейтрософских нечётких множеств, улучшены некоторые законы работы интервальных нейтрософских нечётких множеств для некоторых операторов агрегации интервальных нейтрософских нечётких множеств, а затем показано их применение к множеству принятия решения по признакам с интервальной нейтрософской нечёткой информацией.

В [68] разработан оператор элементарного средневзвешенного значения интервального нейтрософского нечёткого преимущества и его применение к множеству принятия решения по признакам. Следует отметить, что в существующих работах учёных основными элементами однозначных и интервальных нейтрософских нечётких взвешенных геометрических операторов являются чёткие значения (веса) однозначных нейтрософских нечётких множеств или интервальных нейтрософских нечетких множеств.

Кроме того, в [69] предложены однозначные нейтрософские нечёткие множества, нормированные взвешенные средние операторы Бонферрони и применение их к задачам множества принятия решения по признакам.

В [70] представлены некоторые обобщённые операторы агрегации Хамахера нейтрософского нечёткого числа и их применение к множественной группе принадлежности.

В [71] предложены интервальные нейтрософские нечёткие элементарные взвешенные арифметические и геометрические операторы, метод распределённой степени вероятности, их применения к задачам множества принятия решения по признакам в интервальной нейтрософской нечёткой среде. Кроме того, в данной работе представлено предисловие к интервальным нейтрософско-взвешенным арифметическим и геометрическим операторам, смешанным с достоверной информацией, а также их применение к интервальным нейтрософским задачам множества принятия решения по признакам с достоверной информацией.

В [72] для множества принятия решения по признакам разработан обобщённый взвешенный оператор агрегации интервального нейтрософского нечёткого множества.

В [73] представлен метод для множества принятия решения по признакам, основанный на некоторых нормальных нейтрософских нечётких средних операторах Бонферрони.

Предложен также метод для множества принятия решения по признакам, основанный на нейтрософском обобщённом операторе смешанно-взвешенной мощности [74].

В [75] представлены некоторые мощные обобщённые операторы агрегации интервальных нейтрософских чисел для принятия решений.

Определены показательные операционные законы интуитивных нечётких множеств, где основания являются чёткими значениями, показатели интуитивных нечётких множеств. Представлен интуитивный оператор нечёткого показательного агрегирования с чёткими параметрами и его применение в задачах множества принятия решения по признакам. Определены показательные законы работы интервальных интуитивных нечётких множеств, в которых в основе лежат чёткие значения или интервальные числа. Показатели – интервальные интуитивные нечёткие множества, представлены соответствующие операторы показательного агрегирования и их применение в задачах множества принятия решения по признакам с однозначной нейтрософской информацией и интервальной нейтрософской информацией. При этом показательные значения (веса) всех существующих показательных законов работы однозначных нейтрософских нечётких множеств и интервальных нейтрософских нечётких множеств соответствующих операторов агрегации являются положительными действительными числами в единичном интервале [0, 1] [76].

1.7.1. Совершенствование алгоритма диагностирования на основе нейтрософского нечёткого множества

Нейтрософское нечёткое множество, введённое с философской точки зрения, трудно применять в практических задачах, поскольку его функции истинности, неопределенности и ложности лежат в нестандартном единичном интервале $]^{-}0,1^{+}[$. В качестве упрощённой формы нейтрософского множества определили интервальные нейтрософское множество, когда ее три функции ограничены в реальном стандартном интервале [0, 1] [52].

Допустим X будет универсальным множеством. Интервальные нейтрософские множества N в X независимо характеризуется функцией принадлежности истинности $T_N(x)$, функцией принадлежности неопределенности $I_N(x)$, и функцией принадлежности ложности $F_N(x)$ для каждого $x \in X$,

$$T_N(x)=\left[T_N^L(x),\ T_N^U(x)\right]\subseteq[0,\ 1],\ I_N(x)=\left[I_N^L(x),I_N^U(x)\right]\subseteq[0,\ 1],$$

а также

$$F_N(x)=\left[F_N^L(x),F_N^U(x)\right]\subseteq[0,\ 1],$$

то они удовлетворяют условию [23]

$$0\le T_N^U(x)+I_N^U(x)+F_N^U(x)\le 3.$$

Таким образом, можно обозначить как

$$N=\left\{\left\langle x,\left[T_N^L(x),T_N^U(x)\right],\left[I_N^L(x),I_N^U(x)\right],\left[F_N^L(x),F_N^U(x)\right]\right\rangle \middle| x\in X\right\}.$$

Для удобства базовых элементов

$$\left\langle x,\left[T_N^L(x),T_N^U(x)\right],\left[I_N^L(x),I_N^U(x)\right],\left[F_N^L(x),F_N^U(x)\right]\right\rangle$$

в интервальное нейтрософское нечеткое множества N обозначается как

$$a=\left\langle\left[T_a^L,T_a^U\right],\left[I_a^L,I_a^U\right],\left[F_a^L,F_a^U\right]\right\rangle$$

краткости, что называется интервальное нейтрософское нечеткое число [53].

Допустим

$$a=\left\langle\left[T_a^L,T_a^U\right],\left[I_a^L,I_a^U\right],\left[F_a^L,F_a^U\right]\right\rangle \text{ и } b=\left\langle\left[T_b^L,T_b^U\right],\left[I_b^L,I_b^U\right],\left[F_b^L,F_b^U\right]\right\rangle$$

обозначить двух интервальные нейтрософские нечёткие числа, то существуют следующие отношения:

$$a^c=\left\langle\left[F_a^L,F_a^U\right],\left[1-I_a^U,1-I_a^L\right],\left[T_a^L,T_a^U\right]\right\rangle \text{(дополнение).}$$

$a\subseteq b$ если и только если

$$T_a^L\le T_b^L,T_a^U\le T_b^U I_a^L\ge I_b^L,I_a^U\ge I_b^U,F_a^L\ge F_b^L,$$

а также;

$a=b$ если и только если $a\subseteq b$ а также $b\subseteq a$;

$$a\oplus b=\left\langle\left[T_a^L+T_b^L-T_a^LT_b^L,T_a^U+T_b^U-T_a^UT_b^U\right],\left[I_a^LI_b^L,I_a^UI_b^U\right],\left[F_a^LF_b^L,F_a^UF_b^U\right]\right\rangle;$$

$$a\oplus b=\left\langle\begin{matrix}\left[T_a^LT_b^L,T_a^UT_b^U\right],\left[I_a^L+I_b^L-I_a^LI_b^L,I_a^U+I_b^U-I_a^UI_b^U\right],\\ \left[F_a^L+F_b^L-F_a^LF_b^L,F_a^U+F_b^U-F_a^UF_b^U\right]\end{matrix}\right\rangle;$$

$$\mu(a)=\left\langle\left[1-(1-T_a^L)^\mu,1-(1-T_a^U)^\mu\right],\left[\left(I_a^L\right)^\mu,\left(I_a^U\right)^\mu\right],\left[\left(F_a^L\right)^\mu,\left(F_a^U\right)^\mu\right]\right\rangle \text{ если}$$

$$\mu>\text{o};$$

$$a^\mu=\left\langle\left[(T_a^L)^\mu,(T_a^U)^\mu\right],\left[1-\left(1-I_a^L\right)^\mu,1-\left(1-I_a^U\right)^\mu\right],\left[1-\left(1-F_a^L\right)^\mu,1-\left(1-F_a^U\right)^\mu\right]\right\rangle$$

если $\mu>$ о[52, 57].

Пусть

$$a_j = \left\langle \left[T_{a_j}^L, T_{a_j}^U\right], \left[I_{a_j}^L, I_{a_j}^U\right], \left[F_{a_j}^L, F_{a_j}^U\right] \right\rangle (j = 1, 2, \ldots, n)$$

будет совокупностью множества интервальных нейтрософских нечетких чисел. Основываясь на операторах взвешенной агрегации множества нейтрософских чисел, можно ввести следующие интервальные нейтрософские взвешенные арифметические и средние геометрические операторы [67]:

$$INWAA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j a_j \left\langle \begin{matrix} \left[1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - T_{a_j}^L)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - T_{a_j}^U)^{w_j}\right] \\ \left[\prod_{j=1}^{n}(I_{a_j}^L)^{w_j}, \prod_{j=1}^{n}(I_{a_j}^U)^{w_j}\right], \left[\prod_{j=1}^{n}(F_{a_j}^L)^{w_j}, \prod_{j=1}^{n}(F_{a_j}^U)^{w_j}\right] \end{matrix} \right\rangle,$$

$$INWGA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} a_j^{w_j} \left\langle \begin{matrix} \left[\prod_{j=1}^{n}(T_{a_j}^L)^{w_j}, \prod_{j=1}^{n}(T_{a_j}^U)^{w_j}\right], \\ \left[1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - I_{a_j}^L)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - I_{a_j}^U)^{w_j}\right], \\ \left[1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - F_{a_j}^L)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - F_{a_j}^U)^{w_j}\right] \end{matrix} \right\rangle,$$

где $w_j (j = 1, 2, ..., n)$ это вес $a_j (j = 1, 2, ..., n)$ с $w_j \in [0, 1]$ а также $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Рассматриваем экспоненциальные законы работы интервальных нейтрософских нечетких множеств. Экспоненциальные операторы интервальных нейтрософских нечетких множеств с нечёткими параметрами.

Расширения существующих законов работы интервальных нейтрософских нечетких множеств, определяется новым показательным законом работы интервальных нейтрософских нечетких множеств, в котором основанием являются четкие значения показателя интервальных нейтрософских нечетких множеств.

Допустим, X универсальное множества

$$N = \left\{ \left\langle x, \left[T_N^L(x), T_N^U(x)\right], \left[I_N^L(x), I_N^U(x)\right]\left[F_N^L(x), F_N^U(x)\right] \right\rangle \middle| x \in X \right\}$$

интервальное нейтрософское нечеткое множества [63].

В этом случае показательный закон работы интервального нейтрософского нечеткого множества N четким параметром μ определяется следующим образом:

$$\mu^N = \begin{cases} \left\{ \left\langle x, \left[\mu^{1-T_N^L(x)}, \mu^{1-T_N^U(x)} \right], \left[1-\mu^{I_N^L(x)}, 1-\mu^{I_N^U(x)} \right], \left[1-\mu^{F_N^L(x)}, 1-\mu^{F_N^U(x)} \right] \right\rangle \middle| x \in X \right\}, \mu \in [0,1] \\ \left\{ \left\langle x, \left[(1/\mu)^{1-T_N^L(x)}, (1/\mu)^{1-T_N^U(x)} \right], \begin{matrix} \left[1-(1/\mu)^{I_N^L(x)}, 1-(1/\mu)^{I_N^U(x)} \right], \\ \left[1-(1/\mu)^{F_N^L(x)}, 1-(1/\mu)^{F_N^U(x)} \right] \end{matrix} \right\rangle \middle| x \in X \right\}, \mu > 1 \end{cases}$$

μ^N также является интервальное нейтрософское нечеткое множество и для него обсуждаются следующие два случая:

Если $\mu \in [0,1]$, функции истинности, неопределенности и ложности являются

$$\left[\mu^{1-T_N^L(x)}, \mu^{1-T_N^U(x)} \right] \subseteq [0,1],\ \left[\mu^{I_N^L(x)}, \mu^{I_N^U(x)} \right] \subseteq [0,1] \text{ и } \left[\mu^{F_N^L(x)}, \mu^{F_N^U(x)} \right] \subseteq [0,1]$$

для любой $x \in X$, соответственно [53].

Таким образом

$$\left\{ \left\langle x, \left[\mu^{1-T_N^L(x)}, \mu^{1-T_N^U(x)} \right], \left[1-\mu^{I_N^L(x)}, 1-\mu^{I_N^U(x)} \right], \left[1-\mu^{F_N^L(x)}, 1-\mu^{F_N^U(x)} \right] \right\rangle \middle| x \in X \right\}$$

является интервальное нейтрософское нечеткое множества [53].

Если $\mu > 1$, тогда есть $0 < 1/\mu < 1$.

тогда,

$$\left\{ \left\langle \begin{matrix} x, \left[(1/\mu)^{1-T_N^L(x)}, (1/\mu)^{1-T_N^U(x)} \right], \left[1-(1/\mu)^{I_N^L(x)}, 1-(1/\mu)^{I_N^U(x)} \right], \\ \left[1-(1/\mu)^{F_N^L(x)}, 1-(1/\mu)^{F_N^U(x)} \right] \end{matrix} \right\rangle \middle| x \in X \right\}$$

также интервальное нейтрософское нечеткое множества [63].

Точно так же можно предложить закон действия интервального нейтрософского нечеткого числа работа [63].

Пусть $a = \left\langle \left[T_a^L, T_a^U \right], \left[I_a^L, I_a^U \right], \left[F_a^L, F_a^U \right] \right\rangle$ будет интервальное нейтрософское нечеткое число, который является базовым элементом интервального нейтрософского нечеткого множества. Тогда показательный закон действия интервального нейтрософского нечеткого числа a с четким параметром

μ обозначается следующим образом:

$$\mu^a = \begin{cases} \left\langle x, \left[\mu^{1-T_a^L}, \mu^{1-T_a^U} \right], \left[1-\mu^{I_a^L}, 1-\mu^{I_a^U} \right], \left[1-\mu^{F_a^L}, 1-\mu^{F_a^U} \right] \right\rangle, \mu \in [0,1] \\ \left\langle \begin{matrix} x, \left[(1/\mu)^{1-T_a^L}, (1/\mu)^{1-T_a^U} \right], \left[1-(1/\mu)^{I_a^L}, 1-(1/\mu)^{I_a^U} \right], \\ \left[1-(1/\mu)^{F_a^L}, 1-(1/\mu)^{F_a^U} \right] \end{matrix} \right\rangle, \mu > 1 \end{cases} . \quad (1.77)$$

Очевидно, что μ^a интервальное нейтрософское нечеткое число [57].

Допустим

$$a = \left\langle \left[T_a^L, T_a^U\right], \left[I_a^L, I_a^U\right], \left[F_a^L, F_a^U\right] \right\rangle$$

любое интервальное нейтрософское нечеткое число,

$$a^* = \langle [1,1],[0,0],[0,0] \rangle.$$

Тогда функция меры косинуса, основанная на расстоянии Хэмминга между a и a *, может быть определена как [63; с. 6]

$$C(a) = \cos\left[\frac{\pi}{12}\left(1 - T_a^L + 1 - T_a^U + I_a^L + I_a^U + F_a^L + F_a^U\right)\right]$$

также

$$C(a) \in [0,1]. \tag{1.78}$$

Очевидно, смысл функции число косинуса $C(a)$ интервального нейтрософского числа a можно объяснить следующим образом: чем ближе: интервальное нейтрософское число a находится к максимальному интервальному нейтрософскому числу $a^* = \langle [1,1],[0,0],[0,0] \rangle$, тем больше значение a. Тогда можно дать сравнительный метод для интервального нейтрософского множества в соответствии с функцией измерения косинуса $C(a)$ [63].

Допустим

$$a = \left\langle \left[T_a^L, T_a^U\right], \left[I_a^L, I_a^U\right], \left[F_a^L, F_a^U\right] \right\rangle, b = \left\langle \left[T_b^L, T_b^U\right], \left[I_b^L, I_b^U\right], \left[F_b^L, F_b^U\right] \right\rangle$$

два двух интервальное нейтрософское число, тогда сравнительный метод, основанный, на функции число косинуса $C(a)$ может быть определен следующим образом:

Если $C(a) > C(b)$, то $a > b$, если $C(a) = C(b)$, то $a = b$ [63].

Рассматриваются экспоненциальные операции интервального нейтрософского числа с интервальными параметрами. Определяются двухинтервальное нейтрософское числа чтобы дать экспоненциальный закон работы интервального нейтрософского числа с интервальными параметрами

Допустим

$a = \left\langle \left[T_a^L, T_a^U\right], \left[I_a^L, I_a^U\right], \left[F_a^L, F_a^U\right] \right\rangle$ и $b = \left\langle \left[T_b^L, T_b^U\right], \left[I_b^L, I_b^U\right], \left[F_b^L, F_b^U\right] \right\rangle$,

два нейтрософские числа.

Если $\left[T_a^L, T_a^U\right] \le \left[T_b^L, T_b^U\right], \left[I_a^L, I_a^U\right] \ge \left[I_b^L, I_b^U\right]$, и $\left[F_a^L, F_a^U\right] \ge \left[F_b^L, F_b^U\right]$, есть $a \le b$. Тогда $d = \left[a,b\right]$ двух интервальное нейтрософское число [63].

Если экспоненциальные степени представлены в виде интервального нейтрософского числа и используется номером интервала тогда можно дать следующий экспоненциальный закон действия интервального нейтрософского числа.

Допустим

$$a = \left\langle \left[T_a^L, T_a^U\right], \left[I_a^L, I_a^U\right], \left[F_a^L, F_a^U\right] \right\rangle$$

интервальное нейтрософское число и $\mu = \left[\mu^L, \mu^U\right]$ интервал число, то экспоненциальный закон действия интервального нейтрософского числа a определяется как[63]

$$\mu^{a} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \left[\left(\mu^L\right)^{1-T_a^L}, \left(\mu^L\right)^{1-T_a^U}\right], \left[1-\left(\mu^L\right)^{I_a^L}, 1-\left(\mu^L\right)^{I_a^U}\right] \right. \\ \left. \left[1-\left(\mu^L\right)^{F_a^L}, 1-\left(\mu^L\right)^{F_a^U}\right] \right\rangle, \\ \left\langle \left[\left(\mu^U\right)^{1-T_a^L}, \left(\mu^U\right)^{1-T_a^U}\right], \left[1-\left(\mu^U\right)^{I_a^L}, 1-\left(\mu^U\right)^{I_a^U}\right] \right. \\ \left. \left[1-\left(\mu^U\right)^{F_a^L}, 1-\left(\mu^U\right)^{F_a^U}\right] \right\rangle, \end{array} \right\}, 0 \le \mu^L \le \mu^L \le 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \left[\left(1/\mu^U\right)^{1-T_a^L}, \left(1/\mu^U\right)^{1-T_a^U}\right], \left[1-\left(1/\mu^U\right)^{I_a^L}, 1-\left(1/\mu^U\right)^{I_a^U}\right] \right. \\ \left. \left[1-\left(1/\mu^U\right)^{F_a^L}, 1-\left(1/\mu^U\right)^{F_a^U}\right] \right\rangle, \\ \left\langle \left[\left(1/\mu^L\right)^{1-T_a^L}, \left(1/\mu^L\right)^{1-T_a^U}\right], \left[1-\left(1/\mu^L\right)^{I_a^L}, 1-\left(1/\mu^L\right)^{I_a^U}\right] \right. \\ \left. \left[1-\left(1/\mu^L\right)^{F_a^L}, 1-\left(1/\mu^L\right)^{F_a^U}\right] \right\rangle, \end{array} \right\}, 1 < \mu^L \le \mu^U \end{cases} . \qquad (1.79)$$

Очевидно, что значение μ^{a} a является двух интервальным нейтрософским числом поскольку это сходно экспоненциальным законам работы интервального нейтрософского числа работа.

Допустим $d_j = \left[a_j^L, a_j^U\right] (j = 1, 2)$ двух интервальное нейтрософское число и μ действительное число. Тогда определяются следующие операции [63]:

$$d_1 \oplus d_2 = \left[a_1^L, a_1^U\right] \oplus \left[a_2^L, a_2^U\right] = \left[a_1^L \oplus a_2^L, a_1^U \oplus a_2^U\right];$$

$$d_1 \otimes d_2 = \left[a_1^L, a_1^U\right] \otimes \left[a_2^L, a_2^U\right] = \left[a_1^L \otimes a_2^L, a_1^U \otimes a_2^U\right];$$
$$\mu d_1 = \mu\left[a_1^L, a_1^U\right] = \left[\mu a_1^L, \mu a_1^U\right];$$
$$\left(d_1\right)^{\mu} = \left[a_1^L, a_1^U\right]^{\mu} = \left[\left(a_1^L\right)^{\mu}, \left(a_1^U\right)^{\mu}\right].$$

В начале исследования используются интервальное операционные законы, в конце исследования вычисляются интервальные нейтрософские числа или действительные числа. Они не только обеспечивают рациональность интервальных операций, но и соответствуют законам работы интервальных нейтрософских чисел. Точно так же экспоненциальным законам действует интервальных нейтрософскых чисел с интервальными параметрами и они удовлетворяют некоторые свойства.

Функции измерения косинуса и соответствующего сравнительного метода для интервальных нейтрософских чисел также можно предложить следующую функцию измерения косинуса и соответствующий метод сравнения для двух интервальных нейтрософских чисел.

Допустим

$$d = \left\langle \left[T_{a^L}^L, T_{a^L}^U\right], \left[I_{a^L}^L, I_{a^L}^U\right], \left[F_{a^L}^L, F_{a^L}^U\right] \right\rangle, \left\langle \left[T_{a^U}^L, T_{a^U}^U\right], \left[I_{a^U}^L, I_{a^U}^U\right], \left[F_{a^U}^L, F_{a^U}^U\right] \right\rangle$$

должен быт DINN и

$$d^* = \left\{ \left\langle [1,1],[0,0],[0,0] \right\rangle, \left\langle [1,1],[0,0],[0,0] \right\rangle \right\}$$

максимальное двухинтервальное нейтрософское число. Функция меры косинуса, основанная на расстоянии Хэмминга между d и может быть определена как [55]

$$C\left(d\right) = \cos\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{24}\left(1 - T_{a^L}^L + 1 - T_{a^L}^U + I_{a^L}^L + I_{a^L}^U + F_{a^L}^L + F_{a^L}^U \right. \\ \left. + 1 - T_{a^U}^L + 1 - T_{a^U}^U + I_{a^U}^L + I_{a^U}^U + F_{a^U}^L + F_{a^U}^U \right) \end{array} \right\}$$

для

$$C\left(d\right) \in [0,1]. \tag{1.80}$$

Точно так же смысл функции числа косинуса $C\left(d\right)$ принадлежащий двух интервальному нейтрософскому числу d можно объяснить следующим образом: чем ближе к двух интервальным нейтрософским числам d к максимальному двух интервальному нейтрософскому числу

$$d^{*} = \left\{ \left\langle [1,1],[0,0],[0,0] \right\rangle, \left\langle [1,1],[0,0],[0,0] \right\rangle \right\},$$

тем больше значение d. Следовательно, мы можем дать сравнительный метод для двух интервального нейтрософского числа [63].

Пусть

$$d_1 = \left\{ \left\langle \left[T^L_{a^L_1}, T^U_{a^L_1} \right], \left[I^L_{a^L_1}, I^U_{a^L_1} \right], \left[F^L_{a^L_1}, F^U_{a^L_1} \right] \right\rangle, \left\langle \left[T^L_{a^U_1}, T^U_{a^U_1} \right], \left[I^L_{a^U_1}, I^U_{a^U_1} \right], \left[F^L_{a^U_1}, F^U_{a^U_1} \right] \right\rangle \right\};$$

и

$$d_2 = \left\{ \left\langle \left[T^L_{a^L_2}, T^U_{a^L_2} \right], \left[I^L_{a^L_2}, I^U_{a^L_2} \right], \left[F^L_{a^L_2}, F^U_{a^L_2} \right] \right\rangle, \left\langle \left[T^L_{a^U_2}, T^U_{a^U_2} \right], \left[I^L_{a^U_2}, I^U_{a^U_2} \right], \left[F^L_{a^U_2}, F^U_{a^U_2} \right] \right\rangle \right\},$$

будет двух интервальными нейтрософскими числами. Тогда сравнительный метод, основанный на функциях измерения косинуса для d_1 и d_2 может быть определен следующим образом [63]:

если

$$C(d_1) > C(d_2), \text{ то } d_1 > d_2;$$

если

$$C(d_1) = C(d_2), \text{ то } d_1 = d_2.$$

Операторы экспоненциального агрегирования интервальных нейтрософских чисел.

Согласно экспоненциальным законам работы формул (1.77) и (1.79) предлагаются операторы интервальной нейтрософической экспоненциальной агрегации (INWEA) и двух интервальной нейтрософической экспоненциальной агрегации (DINWEA), где основания представляют собой совокупность действительных чисел или числа интервалов, а показатели степени представляют собой совокупность множества интервальных нейтрософких чисел.

Допустим

$$a_j = \left\langle \left[T^L_{a_j}, T^U_{a_j} \right], \left[I^L_{a_j}, I^U_{a_j} \right], \left[F^L_{a_j}, F^U_{a_j} \right] \right\rangle$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ совокупность множества интервальных нейтрософских чисел и μ_j для $j = 1, 2, \ldots, n$ множество действительных чисел, и пусть отображение INWEA: $\Omega^n \to \Omega$. Тогда оператор INWEA определяется как

$$INWEA(a_1, a_2, \ldots a_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\mu_j\right)^{a_j}$$

тогда $a_j \left(j = 1, 2, \ldots, n \right)$ определенный вес $\mu_j \left(j = 1, 2, \ldots, n \right)$[53].

Пусть

$$a_j = \left\langle \left[T_{a_j}^L, T_{a_j}^U \right], \left[I_{a_j}^L, I_{a_j}^U \right], \left[F_{a_j}^L, F_{a_j}^U \right] \right\rangle$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ совокупность множества интервальных нейтрософских чисел и μ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ множество действительных чисел, тогда агрегированное значение оператора INWEA также является интервальным нейтрософским числом, где

$$INWEA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{cases} \left\langle \begin{array}{l} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(\mu_j\right)^{1-T_{a_j}^L}, \prod_{j=1}^{n} \left(\mu_j\right)^{1-T_{a_j}^U} \right], \\ \left[1 - \prod_{j=1}^{n} \left(\mu_j\right)^{I_{a_j}^L}, \prod_{j=1}^{n} \left(\mu_j\right)^{I_{a_j}^U} \right], \\ \left[1 - \prod_{j=1}^{n} \left(\mu_j\right)^{F_{a_j}^L}, \prod_{j=1}^{n} \left(\mu_j\right)^{F_{a_j}^U} \right] \end{array} \right\rangle, \text{ если } \mu \in [0,1] \\ \left\langle \begin{array}{l} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(1/\mu_j\right)^{1-T_{a_j}^L}, \prod_{j=1}^{n} \left(1/\mu_j\right)^{1-T_{a_j}^U} \right], \\ \left[1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1/\mu_j\right)^{I_{a_j}^L}, \prod_{j=1}^{n} \left(1/\mu_j\right)^{I_{a_j}^U} \right], \\ \left[1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1/\mu_j\right)^{F_{a_j}^L}, \prod_{j=1}^{n} \left(1/\mu_j\right)^{F_{a_j}^U} \right] \end{array} \right\rangle, \text{ если } \mu > 1 \end{cases}, \tag{1.81}$$

и $a_j \left(j = 1, 2, \ldots, n \right)$ экспоненциальный вес $\mu_j \left(j = 1, 2, \ldots, n \right)$ [63].

Допустим

$$a_j = \left\langle \left[T_{a_j}^L, T_{a_j}^U \right], \left[I_{a_j}^L, I_{a_j}^U \right], \left[F_{a_j}^L, F_{a_j}^U \right] \right\rangle$$

для $j = 1, 2, \ldots, n$ будет совокупность множества интервальных нейтрософских чисел и $\mu_j = \left[\mu_j^L, \mu_j^U \right] (j = 1, 2, \ldots, n)$ множество интервальных чисел, и пусть отображение DINWEA: $\Omega^n \to \Omega$. Тогда оператор DINWEA определяется как:

$$DINWEA(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\prod_{j=1}^{n}(\mu_j)^{a_j},$$

тогда $a_j\,(j=1,2,\ldots,n)$ экспоненциальный вес $\mu_j\,(j=1,2,\ldots,n)$ [70].

Пусть

$$a_j=\left\langle\left[T_{a_j}^L,T_{a_j}^U\right],\left[I_{a_j}^L,I_{a_j}^U\right],\left[F_{a_j}^L,F_{a_j}^U\right]\right\rangle$$

для $j=1,2,\ldots,n$ совокупность множества интервальных нейтрософских чисел и $\mu_j=\left[\mu_j^L,\mu_j^U\right]\,(j=1,2,\ldots,n)$ $a_j\,(j=1,2,\ldots,n)$ множество номерованных интервалов, тогда агрегированное значение оператора DINWEA задается следующим образом [63]:

$$DINWEA(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{cases}\left\{\begin{array}{c}\left\langle\begin{array}{c}\left[\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^L)^{1-T_{a_j}^L},\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^L)^{1-T_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^L)^{I_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^L)^{I_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^L)^{F_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^L)^{F_{a_j}^U}\right]\end{array}\right\rangle,\left\langle\begin{array}{c}\left[\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^L)^{1-T_{a_j}^L},\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^L)^{1-T_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^L)^{I_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^L)^{I_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^L)^{F_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^L)^{F_{a_j}^U}\right]\end{array}\right\rangle,\\ \left\langle\begin{array}{c}\left[\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^U)^{1-T_{a_j}^L},\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^U)^{1-T_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^U)^{I_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^U)^{I_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^U)^{F_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(\mu_j^U)^{F_{a_j}^U}\right]\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{c}\left[\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^U)^{1-T_{a_j}^L},\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^U)^{1-T_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^U)^{I_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^U)^{I_{a_j}^U}\right],\\ \left[1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^U)^{F_{a_j}^L},1-\prod_{j=1}^{n}(1/\mu_j^U)^{F_{a_j}^U}\right]\end{array}\right\rangle\end{array}\right\}.\end{cases} \quad (1.82)$$

$$если\,\mu_j^U\geq\mu_j^L\geq 1\ .$$

Методы принятия решений на основе операторов INWEA и DINWEA.

На основе операторов INWEA и DINWEA можно решать некоторые проблемы принятия решений, когда весы принадлежности выражаются множеством интервальных нейтрософских чисел, а значения принадлежности представлены четкими значениями или числами интервалов. Таким образом, можно установить методы принятия решений [63].

В множество принятие решения по признакам предположено, что $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ это множество выборов $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ это множество принадлежности. Тогда оценка пригодности выборов

$Y_i\left(i=1,2,\ldots,m\right)$ для принадлежности $X_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ выражается четким значением $\mu_{i,j}\in[0,1]$. Таким образом, можо указать номер интервала. $\mu_{i,j}=\left[\mu_{i,j}^L,\mu_{i,j}^U\right]\subseteq[0,1](i=1,2,\ldots,m;\, j=1,2,\ldots,n)$. Принимая во внимание, что матрица решений $D=\left(\mu_{i,j}\right)_{m\times n}$ или $D=\left(\mu_{i,j}\right)_{m\times n}$ вес принадлежности $x_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ предоставляется интервальных нейтрософских множеств

$$a_j=\left[T_{a_j},I_{a_j},F_{a_j}\right]\left\langle\left[T_{a_j}^L,T_{a_j}^U\right],\left[I_{a_j}^L,I_{a_j}^U\right],\left[F_{a_j}^L,F_{a_j}^U\right]\right\rangle,$$

тогда $T_{a_j}\subseteq[0,1]$ показывает неопределённую степень, в которой лицо, принимающее решение, предпочитает принадлежность $I_{a_j}\subseteq[0,1]$ указывает степень, в которой лицо, принимающее решение, предпочитает / не предпочитает принадлежность x_j, и $F_{a_j}\subseteq[0,1]$ оказывает степень что лицо, принимающее решение, не предпочитает принадлежность x_j. Предоставляем алгоритм проблемы принятие решения на основе операторов INWEA и DINWEA [63].

Изложен алгоритм решения задач классификации на основе теории нейтрософских нечетких множеств.

Шаг 1. На основе экспериментальных данных строится интервальные нейтрософские числа и функции принадлежности.

Шаг 2. Используя оператор агрегации уравнения (1.81) или уравнение (1.82), получаем общее агрегированное значение для каждой принадлежности $d_i=INWEA\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ или $d_i=DINWEA\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)\left(i=1,2,\ldots,m\right)$, $y_i\left(i=1,2,\ldots,m\right)$ болезней крупного рогатого скота

Шаг 3. Согласно функции, весы уравнения (1.78) или уравнения (1.80), вычисляются значение $C\left(d_i\right)\left(i=1,2,\ldots,m\right)$.

Шаг 4. Выбор максимального значения из $C(d_1),C(d_2).....,C(d_m)$.

Шаг 5. Конец.

Глава 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Задача линейного программирования в общей постановке

Для оптимизации производства традиционно используются методы линейного программирования. Критериями эффективности могут быть, как-то: оптимальное использование производственного оборудования, рентабельность изделий, совокупный маржинальный доход, оптимальное распределение выделенных средств в инвестиционные проекты, минимальный объем ресурсов и т. д.

Методы линейного программирования находят свое применение даже при решении задач, относящихся к задачам нелинейного программирования. В качестве примера можно указать задачи дробно-линейного программирования, интерпретируемые в экономике как задачи определения рентабельности затрат на производство изделий, рентабельности продаж, нахождения себестоимости изделий и т. п. Путем введения новых переменных их можно свести к задачам линейного программирования [81-90].

2.1.1. Примеры задач линейного программирования

Прежде чем приступать к формулировке задачи линейного программирования (сокращенно ЗЛП), рассмотрим три часто встречающиеся экономические ситуации.

Ситуация 2.1. Фирма имеет одно предприятие, которое выпускает n видов продукции, затрачивая m видов ресурсов. Каждый вид продукции j характеризуется технологией $A_j = (a_{1j},\dots, a_{mj}, c_j)$ в виде набора $\{a_{ij}\}$, где a_{ij} — количество единиц ресурса i, затрачиваемого на единицу продукта j, и c_j — прибыль, получаемая фирмой с каждой единицы продукта j. Известны также объемы ресурсов $B = (b_1,\dots, b_m)$, которыми располагает предприятие. Руководство фирмы заинтересовано в получении оптимального варианта своего бизнеса по прибыли. Для этого предприятию нужно, грамотно распорядившись имеющимися ресурсами, выпустить такую комбинацию всех видов продукции, при которой прибыль оказалась бы наибольшей.

Составим математическую модель данной экономической ситуации. Обозначим через $X = (x_1,\dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ вектор производства, где x_j — объем выпуска продукции j. Вектор X часто называют еще планом производства. При этом координаты вектора X должны быть неотрицательны:

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

(иногда выпуск продукции j может быть ограничен d_j, в этом случае имеет место двойное неравенство $0 \leq x_j \leq d_j$). Ограниченность ресурсов и линейная зависимость между расходами ресурсов и производством продукции приводит к системе линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Прибыль от реализации произведенного продукта равна

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n.$$

План производства $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ называется оптимальным по прибыли, если $L(X)$ достигает наибольшего возможного значения при вышеописанных ограничениях. Поэтому, руководствуясь интересами фирмы, предприятие в качестве критерия экономической эффективности должно принять максимум прибыли:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max.$$

При этом следует найти не только само значение $\max L(X)$, но точки, в которых оно достигается, то есть получить оптимальный вектор производства $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

Замечание 2.1. Возможно, что фирма решит использовать другую технологическую характеристику каждого вида продукции. Например, в описанной выше технологии A_j, не меняя экономической интерпретации $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$, изменит экономическую интерпретацию последней константы: под c_j будет понимать себестоимость каждой единицы продукта j. Это означает, что руководство фирмы заинтересовано в получении оптимального варианта своего бизнеса по себестоимости. Поэтому в качестве критерия экономической эффективности предприятие должно будет принять минимум себестоимости:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

Рассмотренная задача оптимизации является одним из примеров задач линейного программирования. Она носит название задачи об использовании ресурсов. В зависимости от конкретной экономической ситуации в качестве ресурсов могут выступать: оборудование, рабочая сила, сырье, деньги, производственные площади и т. п.

Ситуация 2.2. Научно-производственное объединение занимается разработкой и производством комплексных удобрений. На данный момент в своем распоряжении оно имеет n видов удобрений, каждое из которых содержит m элементов непосредственного питания растений. Такими элементами могут быть азот, фосфор, калий, магний, медь, марганец и др. Известно, что одна единица j-го вида удобрений ($j = 1, 2,\ldots, n$) содержит a_{ij} единиц i-го ($i = 1, 2,\ldots, m$) элемента непосредственного питания растений и имеет стоимость c_j. Необходимо изготовить смешанное комплексное удобрение (тукосмесь), получаемое механическим смешением имеющихся удобрений. При этом тукосмесь должна иметь следующую «химико-экономическую» характеристику:

- содержание каждого i-го элемента питания не менее b_i($i = 1, 2,\ldots, m$);
- наименьшую стоимость.

Рассмотрим математическую модель данной экономической ситуации. Обозначим через x_j количество j-го удобрения, используемого при изготовлении тукосмеси. Конечно, $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2,\ldots,n$). Для каждого i-го ($i = 1, 2,\ldots, m$) элемента питания, согласно «химико-экономической» характеристике тукосмеси, имеет место следующее неравенство-ограничение:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

Стоимость комплексного удобрения составляет

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Эту величину необходимо минимизировать.

Таким образом, математическая модель предложенной экономической ситуации имеет следующий вид:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,\ i = 1, 2,\ldots, m;$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2,\ldots, n.$$

Рассмотренная задача носит название задачи о смесях. К ним относят задачи определения состава сплавов, кормовых смесей, смесей горючего и т. п., а также определения урожайности кормовых культур, составления рациона питания.

Ситуация 2.3. На пунктах отправления $A_1,\ldots, A_m$ находится соответственно $a_1,\ldots, a_m$ единиц однородного груза. Его следует доставить получателям в пункты назначения $B_1,\ldots, B_n$, причем в каждый из которых — соответственно $b_1,\ldots, b_n$ единиц этого груза.

Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}. Требуется составить такой план перевозок, который требовал бы минимальных затрат. При этом предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству груза (то есть перевозка k единиц груза требует расходов в размере kc_{ij}), а общий объем груза, готового к отправлению, совпадает с объемом груза, который готовы принять в пунктах назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Замечание 2.2. Часто в качестве $A_1,\ldots,\ A_m$ и $B_1,\ldots,\ B_n$ выступают соответственно пункты производства и пункты потребления однородного продукта, а $\sum_{i=1}^{m} a_i$ и $\sum_{j=1}^{n} b_j$ интерпретируются тогда как суммарное количество произведенного и потребленного продукта.

Построим модель рассматриваемой экономической ситуации. План перевозок задается матрицей $X = (x_{ij})$, где x_{ij} — число единиц груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. При этом, конечно,

$$x_{ij} \geq 0 \ (i=1, 2,\ldots, m;\ j = 1, 2,\ldots, n).$$

Тогда $x_{i1} + x_{i2} +\ldots+ x_{in}$ — это общее количество груза, которое можно отправить из пункта A_i в пункты $B_1,\ldots, B_n$, а $x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{mj}$ — общее количество груза, которое можно принять в пункте B_j из пунктов $A_1,\ldots,\ A_m$. Предположение о совпадении суммарных запасов груза и суммарных потребностей в нем приводит к системе линейных равенств

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2,\ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2,\ldots, n.$$

Линейная зависимость между транспортными расходами и перевозимым количеством груза позволяет определить стоимость перевозки груза из пункта A_i в пункт B_j как величину, равную $c_{ij}x_{ij}$. Тогда общая стоимость всех перевозок составит $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. В описываемой ситуации лица, принимающие решения (для краткости обозначим их ЛПР), в качестве критерия экономической эффективности должны принять минимум этой величины.

Таким образом, математическая модель данной экономической ситуации имеет следующий вид:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2,\ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2,\ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ для } i = 1, 2,\ldots, m \text{ и } j = 1, 2,\ldots, n.$$

Как и в предыдущих случах, следует найти не только само значение $\min L(X)$, но и точки, в которых оно достигается, то есть получить оптимальную матрицу $X = (x_{ij})$ — оптимальный план перевозок. Рассмотренная задача носит название транспортной задачи.

Замечание 2.3. Сделаем несколько уточнений. Рассмотренная задача называется закрытой (= сбалансированной) транспортной задачей. Так называют транспортные задачи, в которых общий объем груза, готового к отправлению, совпадает с объемом груза, который готовы принять в пунктах назначения: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Если же указанные объемы не совпадают, то транспортная задача называется открытой. При этом, если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то количество груза, равное $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, остается в пунктах отправления невостребованным. Тогда вводят гипотетического (виртуального) $(n+1)$-го получателя с готовностью принять груз указанного объема и считают транспортные расходы $c_{i,\, n+1}$ равными 0 для всех i. Таким образом, при введении виртуального получателя транспортная задача становится сбалансированной: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$, где $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Математическая модель такой экономической ситуации имеет вид:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n, n + 1,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m \text{ и } j = 1, 2, \ldots, n, n + 1.$$

Если же $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят гипотетический (виртуальный) пункт отправления A_{m+1}, содержащий $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ единиц готового к отправке груза, и транспортные расходы $c_{m+1,j}$ считают равными 0 для всех j. Такое изменение начальных условий также приводит к тому, что транспортная задача становится сбалансированной: $\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Математическую модель описанной ситуации предлагается составить самостоятельно.

Замечание 2.4. ЛПР могут руководствоваться, вырабатывая свою стратегию, принципом максимизации суммарного дохода от перевозок. Тогда транспортная ЗЛП задается следующими элементами:

- двумя конечными множествами $\{A_1, \ldots, A_m\}$ и $\{B_1, \ldots, B_n\}$, экономическая интерпретация элементов которых совпадает с интерпретацией соответствующих элементов в рассмотренной выше минимизационной транспортной задаче;
- неотрицательными векторами $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$, координаты которых a_i и b_j определяют количество единиц груза, готового к отправлению и получению в пунктах A_i и B_j соответственно;
- матрицей $C = (c_{ij})$, где c_{ij} — *доход* от перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j.

В этом случае оптимальный план $\overline{X}_{\text{опт}}$ должен максимизировать суммарный доход от перевозок:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max.$$

2.1.2. Некоторые особенности транспортной задачи

Приведенная выше формулировка транспортной задачи не единственная с точки зрения применения транспортной задачи для решения экономических задач. Поясним это на двух примерах.

Пример 2.1. Привести варианты конкретных экономических ситуаций, каждая из которых может быть описана с помощью одной из следующих математических моделей

$$L(X) = 4x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 7x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} \to \min\ (\max)$$

при ограничениях:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 110,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100,$$
$$x_{11} + x_{21} = 60,$$
$$x_{12} + x_{22} = 80,$$
$$x_{13} + x_{23} = 70,$$
$$x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0,\ x_{13} \geq 0,\ x_{21} \geq 0,\ x_{22} \geq 0,\ x_{23} \geq 0.$$

Решение. 1) Сначала рассмотрим случай, когда в качестве критерия экономической эффективности выступает минимум указанной величины:

$$L(X) = 4x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 7x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} \to \min.$$

Приведем один из возможных вариантов экономических ситуаций, которые могут быть описаны с помощью предлагаемой математической модели. Заметим, что данная модель представляет собою модель транспортной задачи.

Вариант 2.1 примера 2.1. Фирма имеет два склада и трех оптовых покупателей. Конкретные данные о загруженности каждого из складов (в тоннах), потребности каждого покупателя (в тоннах) и стоимости перевозки (усл. ед. за 1 т) приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

		Стоимость перевозок к покупателям			Наличие груза
		B_1	B_2	B_3	
Склады	1	4	8	9	110
	2	7	3	5	100
Потребности		60	80	70	

Составить оптимальный план перевозок, имеющий минимальные транспортные расходы.

Неформальные пояснения к решению варианта 1. Экономической интерпретацией переменной x_{ij} является количество товара, поставляемого со склада A_i покупателю B_j, а величина

$$L(X)=4x_{11}+8x_{12}+9x_{13}+7x_{21}+3x_{22}++\ 5x_{23}$$

трактуется как общая стоимость всех перевозок. Общий объем запасов на складах совпадает с общим объемом запросов покупателей:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 110 + 100 = 210 \text{ (т)}, \ \sum_{j=1}^{3} b_j = 60 + 80 + 70 = 210 \text{ (т)}.$$

Следовательно, данная задача является закрытой транспортной задачей, экономическая интерпретация которой подробно рассмотрена выше. Поэтому ограничимся лишь

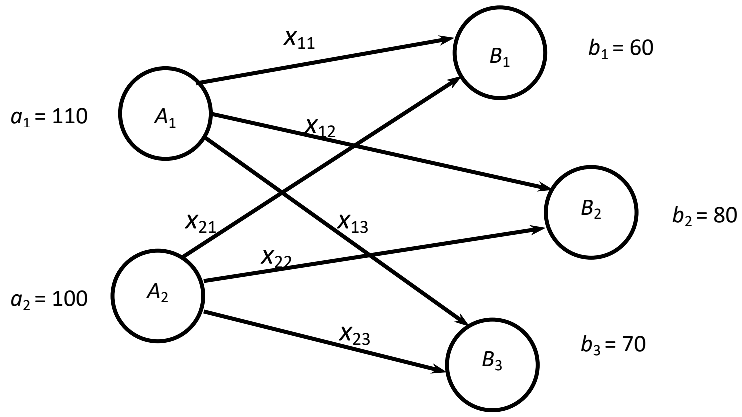


Рис. 2.1. Схематическое изображение транспортной задачи

схематическим изображением сформулированной задачи (рис.2.1), которое облегчает понимание и будет полезно при решении аналогичных ЗЛП.

Решение задачи, соответствующее для варианта 1 оптимальному плану перевозок, удобно будет записать в виде матрицы $\overline{X}_{\text{опт.}} = (x_{ij})$, экономическая интерпретация которой, благодаря изображенной схеме, весьма прозрачна.

2) Теперь рассмотрим случай, когда в качестве критерия экономической эффективности выступает максимум указанной величины:

$$L(X) = 4x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 7x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} \to \max.$$

Вариант 2 примера 2.1. Мастерская имеет два станка, каждый из которых может выполнять три операции по обработке деталей (порядок выполнения операций не важен). Продолжительность выполнения первой операции составляет 60 часов, второй — 80, третьей — 70. Время работы первого и второго станков равно соответственно 110 и 100 часам. Производительность за час (в количестве деталей) первого станка при выполнении первой операции равна 4, при выполнении второй — 8, третьей — 9. Аналогичная производительность второго станка равна соответственно 7, 3 и 5. Составить план временно́й загрузки станков по выполнению каждой операции, при котором можно было бы обработать наибольшее количество деталей.

Сформулированная задача носит название задачи об использовании производственного оборудования (мощностей).

Неформальные пояснения к решению варианта 2. Обозначив через A_1 и A_2 первый и второй станки, а через B_1, B_2 и B_3 первую, вторую и третью операции соответственно, условия данной задачи удобно записать в виде таблицы 2.2 (сравните с соответствующей таблицей варианта 1).

Таблица 2.2

		Производительность станков при выполнении операций			Время работы станков
		B_1	B_2	B_3	
Станки	A_1	4	8	9	110
	A_2	7	3	5	100
Продолжительность выполнения операции		60	80	70	

Покажем, что математическая модель рассматриваемой экономической ситуации совпадает с описываемой моделью при условии максимизации целевой функции и, конечно, при условии соответствующей экономической интерпретации переменных и констант, входящих в указанную модель.

Обозначим через x_{ij} количество часов, которое требуется при выполнении на i-м станке j-й операции. При этом, конечно, $x_{ij} \geq 0$ (i = 1, 2, j = 1, 2, 3). Тогда $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}$ — общее количество часов, которое требуется при выполнении на i-том станке каждой из трех операций, а $x_{1j} + x_{2j}$ — суммарная продолжительность выполнения j-й операции на каждом из двух станков. Это приводит к системе линейных равенств

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 110,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100,$$
$$x_{11} + x_{21} = 60,$$
$$x_{12} + x_{22} = 80,$$

$$x_{13} + x_{23} = 70.$$

Заметим, что суммарная продолжительность выполнения операций совпадает с суммарным временем работы станков:

$$60 + 80 + 70 = 110 + 100 \text{ (ч)}.$$

Обозначим через c_{ij} производительность i-го станка при выполнении j-й операции. Тогда количество деталей, обработанных на i-м станке при выполнении j-й операции, будет равно $c_{ij}x_{ij}$. Общее же количество деталей, обработанных на двух станках при выполнении трех указанных операций, составит

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 4x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 7x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23}.$$

В условиях решаемой задачи в качестве критерия экономической эффективности нужно принять максимум этой величины.

Таким образом, математическая модель данной экономической ситуации действительно совпадает с описываемой моделью при условии максимизации целевой функции.

Анализ экономической ситуации варианта 2 подтверждает, что алгоритм решения транспортной задачи может быть использован при решении задач, далеких от транспортировки груза. Доказательством этого может служить и рассматриваемый ниже пример 2.2. Конечно, при решении таких задач необходимо учитывать их специфику, что должно отражаться в различных экономических интерпретациях переменных и констант, входящих в математические модели указанных задач. Так, например, если в «чисто» транспортной задаче коэффициенты целевой функции интерпретируются как транспортные расходы, а переменные — как количество перевозимого груза, то в задаче об использовании производственного оборудования коэффициенты целевой функции интерпретируются как производительность, а переменные — как затраты времени.

Пример 2.2. Привести варианты экономических ситуаций, каждая из которых может быть описана с помощью одной из следующих математических моделей

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min(\max),$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$x_{ij \in \{0,1\}} \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n \text{ и } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Решение. 1) Сначала рассмотрим случай, когда в качестве критерия экономической эффективности выступает минимум указанной величины.

Вариант 1 примера 2.2. Автомобильный завод планирует построить станции $A_1, \ldots, A_n$ для технического обслуживания производимых им машин. Для строительства он выбрал города $B_1, \ldots, B_n$. Вырабатывая стратегию строительства, ЛПР решили руководствоваться принципом минимизации суммарных затрат на строительство указанных станций. Затраты на строительство станции A_i в городе B_j составляют c_{ij}. Необходимо определить оптимальную стратегию ЛПР.

Неформальные пояснения к решению варианта 1. Обозначим

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я станция строится в } j\text{-м городе,} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (i = \overline{1; n}, \ \ j = \overline{1; n}).$$

Конечно, при такой интерпретации переменных

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n,$$

а $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ — суммарные затраты на строительство станций, в минимизации которых заинтересованы ЛПР.

2) Рассмотрим случай, когда в качестве критерия экономической эффективности выступает максимум указанной величины:

Вариант 2 примера 2.2. В целях повышения привлекательности франшизы[1] франчайзер[2] решил организовать торговую точку. Для этого ему потребовалось ввести n новых штатных единиц для выполнения n видов работ. В результате

[1] *Франшиза* — контрольная лицензия, выданная одним лицом (франчайзером) другому (франчайзи), которая:

- дает разрешение и обязывает франчайзи заниматься в течение франшизы определенным бизнесом, используя специфическое наименование, принадлежащее франчайзеру;
- позволяет франчайзеру осуществлять контроль в течение всего периода франшизы за качеством бизнеса, являющегося предметом франчайзингового договора;
- обязывает франчайзера предоставлять франчайзи помощь в бизнесе, который служит предметом франшизы (в отношении организации предприятия франчайзи, обучения персонала, управления продажами и т. д.);
- требует от франчайзи регулярно в течение всего периода франшизы выплачивать франчайзеру определенные денежные суммы в оплату франшизы или товаров, услуг, предоставляемых франчайзером франчайзи;
- не является обычной сделкой между холдинговой и ее дочерними компаниями или между дочерними компаниями одной холдинговой компании, либо между физическим лицом и контролируемой им компанией.

Часто франшизой называют и саму сеть предприятий, связанных с головной компанией сходными франчайзинговыми договорами, использующих одинаковые торговую марку, стиль, условия, методы и формы продаж товаров или оказание услуг [Рудашевский В. Д., Фурщик М. А. Оптимальная стратегия развития франчайзинговой системы // Экономика и мат. методы. 1998. Т. 34. Вып. 2].

[2] *Франчайзер* — организатор дела, владелец генеральной лицензии, ноу-хау, главный консультант и оптовый поставщик (см. там же).

объявленного конкурса было принято n сотрудников. Производительность i-го сотрудника при выполнении j-го вида работ равна c_{ij}. Необходимо распределить людей по видам работ таким образом, чтобы их суммарная производительность была бы максимальной.

Неформальные пояснения к решению варианта 2. Обозначим

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если сотрудник } i \text{ назначается на вид работ } j, \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases} \quad (i = \overline{1;\, n},\ j = \overline{1;\, n}).$$

Тогда $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ — суммарная производительность сотрудников, в максимизации которой заинтересован франчайзер. При этом

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Задачи, математические модели которых описаны в примере 2.2, являются частными случаями транспортной задачи и носят название задач о сопоставлении (или назначениях).

2.1.3. Формулировка общей задачи линейного программирования

В общем виде математическая формулировка основной задачи линейного программирования выглядит следующим образом [84,85].

Требуется найти значения действительных переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$, при которых целевая функция (показатель эффективности)

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n + c$$

принимает экстремальное значение при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,$$

где a_{ij}, b_i, c_j, c — заданные постоянные величины, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Заметим, что знак «$\le$» в ограничительных условиях выбран условно (для определенности), так как, например, неравенство $a_{i1}x_1+\ldots+\ a_{in}x_n\ \ge\ b_i$ всегда можно заменить на эквивалентное ему неравенство $-(a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n)\le -b_i$, а уравнение $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n = b_i$ — на систему неравенств $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \ge b_i$ и $a_{i1}x_1+\ldots+\ a_{in}x_n \le b_i$. Стоит, однако, отметить, что на практике сведение уравнений к неравенствам, как правило, осуществляют другим способом (см., например, решение транспортной задачи). Если все ограничительные условия, накладываемые на элементы решения, кроме требования $x_j \ge 0$, являются уравнениями, то в этом случае задачу линейного программирования называют канонической задачей линейного программирования (сокращенно КЗЛП). Ее примером может служить опять же транспортная задача. Заметим, что любая задача линейного программирования может быть приведена к канонической [84].

Точку или точки (если их несколько), удовлетворяющие системе ограничений, называют допустимым решением (планом) задачи линейного программирования и обозначают $\overline{X}$. Множество всех допустимых решений называют областью допустимых решений (сокращенно ОДР). Допустимое решение, в котором достигается экстремальное значение целевой функции, называют оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования и обозначают $\overline{X}_{\text{опт}}$.

Формулировку общей задачи линейного программирования (сокращенно ОЗЛП) можно записать более компактно [85]:

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c \to \max\ (\min)$$

при ограничениях: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i\ =\ 1, 2,\ldots, m$, $x_k \ge 0$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2.1.4. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизаций на вершинно расположенных множеств

Актуальность и важность задач комбинаторной оптимизации в современной теории оптимизации не требует обоснования ввиду своей очевидности [1, 10].

Интересным и важным является класс задач оптимизации линейной функции с дополнительными линейными ограничениями на вершинно расположенном комбинаторном множестве. Примерами таких вершинно расположенных множества являются множества перестановок, полиперестановок, некоторые множеств размещений и многие евклидовы комбинаторные множества. Для таких задач разработан метод комбинаторного отсечения [81-88]. Вместе с тем возникают некоторых сложности в его реализации, когда во вспомогательных задачах линейного программирования (ЗЛП) решения являются вырожденными.

В настоящей работе предлагается модификация метода комбинаторного отсечения для задач оптимизации на вершинно расположенных комбинаторных множествах которая позволяет использовать вырожденные решения вспомогательных (ЗЛР).

Рассмотрим задачу максимизации линейной функции при дополнительных линейных ограничениях на вершинно расположенном множестве. Найти

$$C(y^*) = \max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j, \tag{2.1}$$

$$y^* = (y_1^*, ..., y_n^*) = \arg\max_{y \in R^n} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{2.2}$$

при дополнительных линейных условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i \quad \forall i \in J_r; \tag{2.3}$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j \in J_n \tag{2.4}$$

с учетом комбинаторного ограничения

$$x = (x_1, ..., x_k) = (y_1, .., y_k) \in E \subset R^k, \tag{2.5}$$

в котором комбинаторное множество E является вершинно расположенным т.е. при образовании его выпуклой оболочки convE совпадает с множестном ее першин

$$E = \mathrm{vert}(\mathrm{conv}E). \tag{2.6}$$

В задаче (2.1)-(2.6) — заданные натуральные константы *(k* $\leq n$) R^n — n-мерное евклидово арифметическое пространство; J_r — множество первых r натуральных чисел {J_r ={1,2,...,r}); c_j, a_{ij} , b_i - заданные действительные числа $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_n$.

Отметим, что при $\kappa < n$ задачу называют частично комбинаторной, а при κ=- n — полностью комбинаторной.

2.1.5. Модификация метода комбинаторного отсечения и ее обоснование

Метод отсечения для комбинаторной задачи состоит в следующем (схема метода отсечения изложена в [85]).

1. Решаем вспомогательную ЗЛП, которая получена из задачи (2.1)-(2.5) при условии (2.6) заменой (2.5) на принадлежность точки *x* выпуклой оболочке множества *E:*

$$x \in \text{convE}. \qquad (2.7)$$

Заметим, что выпуклые оболочки многих вершинно расположенных множеств известны (например, [84]). Будем считать, что система линейных ограничений, описывающая условие (2.7), представлена в виде равенств (как и при сведении ЗЛП к каноническому виду)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i \qquad \forall i \in J_s \setminus J_r \ , \qquad (2.8)$$

где s — натуральная константа, $s>r;$ a_{ij}, b_i,- определенные в (2.7) действительные числа $\forall i \in J_s \setminus J_r$, $\forall j \in J_n$.

Объединяя (2.3) и (2.8), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i \qquad \forall i \in J_s \,, \qquad (2.9)$$

Таким образом, вспомогательная ЗЛП (ВЗЛП) имеет вид: найти (2.1), (2.2) при ограничениях (2.4), (2.9). На этом этапе задача решается методом линейного программирования (симплекс-методом, методом искусственного базиса, двойственным симплекс-методом—в зависимости от вида ЗЛП), в результате получена вершина допустимой области.

2. Обозначим y^* решение ВЗЛП (2.1), (2.2), (2.4), (2.9). На основании y^* образуем $x^* = (x_1^*, ..., x_k^*) = (y_1^*, ..., y_k^*)$, для которого проверяем условие (2.5):

$$x^* \in E. \qquad (2.10)$$

Если (2.10) выполняется, то задача (2.1)- (2.5) решена. Иначе переходим к п. 3.

3. Находим смежные с точкой y^* вершины многогранника (2.9). Определяем полупространство, граница которого проходит через смежные с точкой y^* вершины многогранника (2.9), которому точка y^* не принадлежит:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{r+1,j} y_j = b_{r+1} \qquad (2.11)$$

Это неравенство в виде равенства (добавив в его левую часть новую неотрицательную переменную) добавляем в систему (2.9) (соответственно увеличив значение *s).*

После этого переходим к п. 2.1.

Отличительным в предлагаемой модификации метода является способ построения неравенства (2.11). Как известно из [85], отсечение (2.11) предлагается строить в виде неравенства

$$\sum_{j_i \in J} \frac{y_{j_1}}{\theta_{j_i}} \ge 1,$$

где J — множество небазисных переменных в точке y — решении ВЗЛП,

$$\theta_j = \min_{i:\, a_{ij}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \qquad (2.13)$$

Здесь a_{ij}; β_i, — элементы последней симплекс-таблицы ВЗЛП (i — номер ее строки, j — номер столбца небазисной переменной), которая дает решение y^*.

Формулы (2.12), (2.13) приемлемы, когда $\theta_j > 0 \ \forall j_i \in J$ / Иначе (при $\theta_j = 0$) предлагается [85] использовать методы возмущения (Чарнса и другие).

Изложим модифицированный метод комбинаторного отсечения для задачи оптимизации (2.1)-(2.5) на вершинно расположенном комбинаторном множестве.

Шаг 0. Задаем целочисленную переменную $q = 0$.

Шаг 1. Решаем ВЗЛП (2.1), (2.2), (2.4), (2.9) прямым либо двойственным симплекс-методом или методом искусственного базиса. Если эта задача не имеет решения, то и исходная задача (2.1)-(2.5) не имеет решения. На этом алгоритм оканчивает работу. Иначе - переход на шаг 3.

Шаг 2. Проверяем условие $x^* = (y_1^*, ..., y_k^*) \in E$ (т.е. выполнение условия (2.5)). Если (2.5) для x^* выполняется, то задача (2.1)-(2.5) решена. Алгоритм оканчивает работу. Иначе - переход на шаг 3.

Шаг 3. Увеличиваем значение q на единицу.

Шаг 4. Добавляем к системе (2.9) (увеличивая s на единицу) отсечение точки y в виде равенства

$$-\sum_{\substack{j_t \in J \\ \theta_{j_t} \neq 0}} \frac{y_{j_t}}{\theta_{j_t}} + y_{n+q} = -1, \tag{2.14}$$

введя дополнительную переменную $y_{n+q} \geq 0$. В формуле (2.14) $j_1,...,j_\gamma$ - номера небазисных переменных в последней точке y^* (полученной как решение ВЗЛП на шаге 1), γ - их количество, $J = \{j_1,... ,j_\gamma\}$, θ_{j_t} $\forall t \in J_\gamma$ находится по формуле (2.13), т.е.

$$\theta_j = \min_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha_{ij} > 0}} \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\beta_t}{\alpha_{ij}},$$

где a_{ij}, β_i - элементы последней симплекс-таблицы ВЗЛП, которая соответствует решению y^* этой вспомогательной задачи, i - номер строки таблицы, j - номер столбца небазисной переменной. Далее переходим на шаг 1 метода.

Замечание 2.5. Процесс построения отсечений и решение завершается либо получением точки, которая удовлетворяет условию (2.5), либо переходом на грань меньшей размерности многогранника допустимой области текущей ВЗЛП. Разрешить последнюю ситуацию позволяет следующее достаточно очевидное утверждение: если после отсечения с помощью равенства (2.14) или (что то же самое) с помощью неравенства

$$-\sum_{\substack{j_t \in J \\ \theta_{j_t} \neq 0}} \frac{y_{j_t}}{\theta_{j_t}} \geq 1 \tag{2.15}$$

и дальнейшего нахождения точки y^* в найденных с ней смежных вершинах неравенство (2.15) выполняется как равенство, то решение в дальнейшем находится на грани области (т.е. неравенство (2.15) обращают в равенство), присоединяется к текущем системе ограничении и процесс решения продолжается. Таким образом, количество возможных соседних вершин уменьшается на единицу. В итоге может остаться одна вершина. Если для нее выполняется условие (2.5), то эта вершина даст решение задачи (2.1)-(2.5), в противном случае исходная задача (2.1)-(2.5) не имеет решения.

Обосновывает отсечение следующая теорема, аналогичная теореме 4.1 из [85] для неравенства (2.12).

Теорема 2.1. Пусть в неравенстве (2.15), где j_t ($j_t \in J$ $\forall t \in J_\gamma$, $\gamma = |J|$) - номера небазисных переменных в решении

$y^* = (y_1^*,..., y_{n+q}^*)$ ВЗЛП, величина θ_{j_t} вычисляется по формуле (2.13). Тогда неравенству (2.15) все смежные с y^* вершины допустимой области ВЗЛП удовлетворяют как равенству, а точка y^* неравенство (2.15) не удовлетворяет.

Доказательство. Поскольку $y_{j_1},..., y_{j_\gamma}$ - небазисные переменные в точке y^*, то в ней они равны нулю. Таким образом, очевидно, что точка y^* не удовлетворяет неравенство (2.15). По алгоритму построения смежной вершины допустимого многогранника в симплекс-методе (например, [85]) у вершины $\tilde{y}$, которая смежна с вершиной y^* координата $y_{j_t} = \theta_{j_t}$ $\forall t \in J_\gamma$, а другие координаты из набора $y_{j_1},..., y_{j_\gamma}$ равны нулю, т.е. в любой точке $\tilde{y}$ неравенство (2.15) выполняется как равенство. Теорема доказана.

Конечность предлагаемого модифицированного метода комбинаторного отсечения основывается на следующем. Условие (2.5) означает ограниченность области допустимых решений задачи (2.1)-(2.5). Для доказательства конечности метода можно предположить, что каждый базис, рассматриваемый при решении ВЗЛП, является невырожденным. Иначе если в столбце свободных членов симплекс-таблицы в строке *i* появляется нуль, то уравнение

$$y_i + \sum_{j \in J} a_{ij} y_j = 0,$$

соответствующее этой строке симплекс-таблицы, исключается из нее с подстановкой в целевую функцию

$$y_i = -\sum_{j \in J} a_{ij} y_j .$$

На основании сделанных замечаний очевидна конечность метода. Действительно, переменная y_{n+q} (из (2.14)) после применения двойственного симплекс-метода выводится из базиса (становится равной нулю), т.е. гиперплоскость (2.14) в пересечении с ребрами допустимой области ВЗЛП новых вершин не образует. Поскольку при y_{n+q} =0 гиперплоскость (2.14) проходит через смежные вершины к точке y^*, которая отсекается, а вершину y^* можно считать невырожденной, то построенная гиперплоскость пересекается с ребрами допустимой области только по вершинам области, т.е. новых вершин не образуется.

При решении одной ВЗЛП отсекается (по смежным вершинам) одна вершина или происходит переход в пространство на единицу меньшей размерности (см замечание 2.1). Конечность допустимой области задачи (2.1)-(2.5) и конечность размерности обеспечивают конечность метода.

Замечание 2.6. Отметим, что в дополнительном исследовании эффективности модифицированною метода комбинаторного отсечения нет необходимости, поскольку он имеет общее свойство с хорошо известным симплекс-методом для ЗЛП — перебор смежных вершин (в симплекс-методе - после анализа вершины на оптимальность и неограниченность и, целевой функции для перехода к вершине с большим (в невырожденной задаче на максимум) значением целевой функции, а в модифицированном методе комбинаторного отсечения — после анализа вершины на удовлетворение условия (2.5) и ее отсечения для перехода к смежной вершине с меньшим значением целевой функции).

Эффективность модифицированного метода комбинаторного отсечения сравнима с эффективностью симплекс-метода, поскольку определяется в основном этим перебором вершин, т.е. аналогично симплекс-методу можно построить «патологические» примеры, в которых перебираются все вершины допустимой области. Исходя из этого можно сделать вывод, что при практическом применении метод отсечения будет таким же эффективным, как и симплекс-метод.

Иллюстративный пример

Рассмотрим пример применения модифицированного метода комбинаторного отсечения, который в [85] решен с использованием метода возмущения Чарнса. Найти

$$-x_4 \to \max \tag{2.16}$$

при дополнительных ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 \le 0; \\ x_3 - x_4 \le 0; \\ x_1 - x_2 \le 0; \end{cases} \tag{2.17}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4, \tag{2.18}$$

и при комбинаторном ограничении

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in E(G), \tag{2.19}$$

где E(G) — множество перестановок с повторениями из мультимножества $G = \{1,1,3\}$.

Как известно [84], множества перестановок с повторениями являются вершинно расположенными. Для формирования первой

ВЗЛП условие (2.19) $(x \in E)$ заменим условием $x \in \text{conv}E$, т.е. запишем систему, которая дает выпуклую оболочку заданного в (2.19) множества перестановок $E(G)$ (например, [84]), при этом сведем систему к форме, необходимой для канонического вида ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 3; \\ x_2 + x_6 = 3; \\ x_3 + x_7 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_8 = 4; \\ x_1 + x_3 + x_9 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_{10} = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \end{cases} \tag{2.20}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,10.$$

В связи с этим систему (2.17) запишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_{11} = 0; \\ x_3 - x_4 + x_{12} = 0; \\ x_1 - x_2 + x_{13} = 0; \end{cases} \tag{2.21}$$

$$x_j \geq 0 \ \forall j.$$

Отметим, что для ЗЛП используется терминология, обозначения и формы симплекс-таблиц из [85], причем базисные столбцы и нули, как правило, опускаются и в таблице не пишутся (соответствующие клеточки остаются незаполненными).

Таким образом, первая ВЗЛП имеет вид (2.16), (2.20), (2.21) при всех неотрицательных переменных. В силу отсутствия базиса введем искусственную неотрицательную переменную x_{14} в седьмое уравнение системы (2.20) и применим M-метод [85]. Целевая функция расширенной ЗЛП для первой ВЗЛП будет иметь вид

$$-x_4 - Mx_{14} \to \max,$$

где $M > 0$ — достаточно большое число.

В табл. 2.3 приведены результирующая симплекс-таблица первой ВЗЛП и столбцы для построения отсечения. Здесь P — столбец названий базисных векторов, в 11-й строке — значение целевой функции; $C_б$ — коэффициенты целевой функции при базисных переменных; P_o — столбец правых частей ограничений; P_{10}, P_{11}, P_{12} — небазисные столбцы; θ_{10}, θ_{11}, θ_{12} — определяющие как минимум элементов этих столбцов.

Таблица 2.3

Номер строки, i	Базисный столбец, P	$C_б$	P_0	P_{10}	P_{11}	P_{12}	β_i/α_{ij}		
							j=10	j=11	$j=12$
1	P_5	0	2	1			2	-	-
2	P_6	0	3/2	-1	-1/2	1/2	-	-	3
3	P_7	0	1/2		1/2	-1/2	-	1	-
4	P_8	0	3/2		-1/2	1/2	-	-	3
5	P_9	0	1/2	1	1/2	-1/2	1/2	1	-
б	P_4	-1	5/2		-1/2	-1/2	-	_	_
7	P_1	0	1	-1			-	-	-
8	P_2	0	3/2	1	1/2	-1/2	3/2	3	-
9	P_3	0	5/2		-1/2	1/2	-	-	5
10	P_{13}	0	1/2	2	1/2	-1/2	1/4	1	-
11			-5/2		1/2	1/2	θ_{10}=1/	θ_{11}=1	θ_{12}=3

Из табл. 2.3 видно, что $x_1 = 1$ (строка 7); x_2 =3/2 (строка 8), x_3 =5/2 (строка 9), т.е. (1, 3/2, 5/2) не является перестановкой чисел (1, 1, 3); таким образом, комбинаторное условие (2.19) не выполнилось. Строим отсечение полученной точки. В табл. 2.3 (в трех последних столбцах) по формуле (2.13) найдены θ_i для небазисных переменных y = 10, 11, 12.

Записываем отсечение (2.15), которое в этом случае (отсутствуют нулевые θ_j совпадает с (2.12):

$$\frac{x_{10}}{0,25} + \frac{x_{11}}{1} + \frac{x_{12}}{3} \geq 1. \qquad (2.23)$$

Последнее неравенство записываем в виде (2.14)

$$-4x_{10} - x_{11} - \frac{1}{3}x_{12} - x_{15} = -1, \qquad (2.24)$$

удобном при использовании двойственного симплекс-метода.

Добавив (2.24) к ограничениям первой ВЗЛП, получим вторую ВЗЛП. Практически это означает введение в симплекс-таблицу (табл. 2.3) строки, соответствующей (2.24), и столбца P_{15}. Получаем первую симплекс-таблицу второй ВЗЛП, при пересчете которой по правилам двойственного симплекс-метода получаем решение второй ВЗЛП (табл. 2.4).

Оптимальная точка второй ВЗЛП из табл. 2.4 определяет x_1 =5/4; x_2 =5/4, x_3 =5/2. Это не соответствует перестановке чисел 1, 1, 3, т.е. условие (2.19) не выполняется, строим отсечение. Поскольку $\theta_{15} = 0$, то в соответствии с (2.14) получим

$$-\frac{x_{11}}{1}-\frac{x_{12}}{3}+x_{16}=-1. \qquad (2.25)$$

Таблица 2.4

Номер строки, *i*	Базисный столбец, *P*	$C_б$	P_0	P_{11}	P_{12}	P_{15}	β_i/α_{ij}		
							j=11	j=12	j=15
1	P_5	0	7/4	-1/4	-1/2	1/4	-	-	7
2	P_6	0	7/4	-1/4	7/2	-1/4	-	3	-
3	P_7	0	1/2	1/2	-1/2		1	-	-
4	P_8	0	3/2	-1/2	1/2		-	3	-
5	P_9	0	1/4	1/4	-7/2	¼	1	-	1
б	P_4	-1	5/2	-1/2	-1/2		-	-	_
7	P_1	0	5/4	1/4	1/2	-1/4	5	15	-
8	P_2	0	5/4	1/4	-7/2	1/4	5	-	5
9	P_3	0	5/2	-1/2	1/2		-	5	-
10	P_{13}	0	0	0	-3/2	1/2	-	-	0
11	P_{10}	0	1/4	1/4	1/12	-1/4	1	3	-
12				-5/2	1/2	1/2	θ_{11}=1	θ_{12}=3	θ_{12}=0

Присоединение этого условия к симплекс-таблице из табл. 2.4 дает первую симплекс-таблицу третьей ВЗЛП. Пересчет последней двойственным симплекс медом дает точку $x = (x_1, x_2, x_i)^c$ координатами $x_1 = 1$; $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Значение целевой функции x_4 равно-3. Таким образом, условие (2.19) вида $(1,1,3)\in E(G)$ выполнено. Исходная задача комбинаторной оптимизации на вершинно расположенном множестве перестановок с повторениями решена.

В табл. 2.4 приведены результирующая симплекс-таблица второй ВЗЛП и стол бцы для построения отсечения.

Таким образом, предложена и обоснована модификация метода отсечения и условных линейных задачах оптимизации на вершинно расположенных комбинаторных множествах при наличии вырожденных базисов во вспомогательных ЗЛИ.

2.2.Нечеткая линейная оптимизация

2.2.1 Задачи нечеткой линейной оптимизации

Обратимся теперь к теории оптимизации и рассмотрим следующую оптимизационную задачу [99-116]*:*

найти максимум (минимум) $f(x)$

при ограничении $x \in X,$ (2.26)

где *f*- вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^n$, называемая *целевой функцией, X*- непустое подмножество $\mathbb{R}^n$ в , заданное с помощью вещественно – значных функций $g_1, g_2, \ldots, g_m$ на $\mathbb{R}^n$ (называемых ограничениями) как множество всех решений системы уравнений и неравенств [115]

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1,2, ...,m_1.$$
$$g_i(x) \leq b_i, \quad i = m_1+1, m_1+2,\ldots,m,$$
$$x_j \geq 0, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Элементы множества *X* называются допустимыми решениями задачи (2.26), а допустимое решение *x**, на котором целевая функция *f* достигает своего глобального максимума (минимума) на *X,* называется оптимальным решением.

Наиболее распространенными являются задачи линейной оптимизации, и в этом параграфе задачи нечеткой линейной оптимизации, тесно связанные с задачами линейной оптимизации следующего вида.

Пусть $M=\{1, 2,..., m\}$ и $N = \{1,2,..., n\}$, где m и n - положительные целые числа. Предположим также, что для $c = (c_1, c_2,\ldots,c_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ функции $f(\cdot, c)$ и $g(\cdot, c)$ определены на $\mathbb{R}^n$ выражениями

$$f(x, c_1, c_2, \ldots ,c_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{2.27}$$

$$g_i(x, a_{i1}, a_{i2}, \ldots ,a_{in}) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n, \; i \in M, \tag{2.28}$$

т.е. линейны на $\mathbb{R}^n$. Для произвольных $c \in \mathbb{R}^n$ и $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in M$, рассмотрим задачу классического линейного программирования

максимизировать (минимизировать) $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$

при ограничениях $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i , i \in M,$ (2.29)

$$x_j \geq 0, \; j \in N. \tag{2.30}$$

Множество всех допустимых решений задачи (2.29) обозначим через *X,* так что

1. Пусть f, g_i – линейные функции, определенные в (2.27) и (2.28), соответственно. Всюду далее в этой главе параметры c_j, a_{ij} и b_i, являются нечеткими величинами, т. е. нормальными и компактными нечеткими множествами в $\mathbb{R}^n$ с полустрого

квазивогнутой функцией принадлежности (см. Определение 1.10). Это допущение делает возможным включение задачи классического линейного программирования в класс задач нечеткого линейного программирования. Нечеткие величины обозначаются знаком «тильда» над соответствующим символом. Мы имеем также $\mu_{\tilde{c}_j} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\mu_{\tilde{a}_j} : \mathbb{R} \to [0,1]$ и $\mu_{\tilde{b}_j} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $i \in M$, $j \in N$, - функции принадлежности нечетких параметров $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$, соответственно. Отметим, что четкие параметры дальше тильдой не отмечаются.

2. Пусть $\tilde{R}_i, i \in M$, - нечеткие отношения на $\mathbb{R}^n$. Они используются для «сравнения левых и правых частей» ограничений. Сначала мы изучим случай $\tilde{R}_i = \tilde{R}$ для всех $i \in M$, т. е. когда все нечеткие отношения в ограничениях одинаковы.

3. «Оптимизация», т.е. «максимизация» или «минимизация» целевой функции требует специального рассмотрения, так как множество нечетких значений целевой функции не является линейно упорядоченным. Чтобы «максимизировать» целевую функцию, нужно определить подходящее понятие «оптимального решения». Это может быть сделано двумя различными способами. При использовании первого подхода вводятся извне заданная нечеткая цель $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ и нечеткое отношение $\tilde{R}_0$ на $\mathbb{R}$. Во втором подходе мы определяем α - удовлетворяющее (или α - недоминируемое) решение задачи нечеткого линейного программирования. В литературе можно найти и некоторые другие подходы, см. [116].

Задача нечеткого линейного программирования, связанная с задачей линейного программирования (2.29), определяется следующим образом:

«максимизировать» («минимизировать») $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ при ограничениях

$$
\begin{gathered}
(\tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{a}_{in} x_n) \tilde{R}_i \tilde{b}_i, \quad i \in M \\
x_j \geq 0, \quad j \in N.
\end{gathered}
\tag{2.31}
$$

Здесь $\tilde{R}_i, i \in M$, - нечеткие отношения на $\mathbb{R}$. Значения целевой функции и значения левых частей ограничений (2.31) получаются согласно так называемому принципу расширения:

Для заданных $\tilde{c}_1,..., \tilde{c}_n \in F_0(\mathbb{R})$ функция $\tilde{f}(x,\tilde{c}_1,..., \tilde{c}_n)$ является нечетким расширением функции $f(x,c_1,..., c_n)$ с функцией принадлежности, определенной для каждого $t \in \mathbb{R}$ выражением

$$\mu_{\tilde{f}}(t) = \begin{cases} \sup\left\{ T(\mu_{\tilde{c}_1}(c_1),....,\mu_{\tilde{c}_n}(c_n)) \middle| \begin{array}{l} c_1,...,c_n \in R, \\ c_1x_1 + ... + c_nx_n = t \end{array} \right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{если } f^{-1}(x,t) \neq \varnothing, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{иначе}, \end{cases} \tag{2.32}$$

где $f^{-1}(x,t) = \{(c_1,...,c_n)^T \in R | f(x,c_1,...,c_n) = t\}$.

В частности, для $f(x,c_1,..., c_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ нечеткое множество $\tilde{f}(x,\tilde{c}_1,..., \tilde{c}_n)$ определяется как $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$, т.е.

$$\tilde{f}(x,\tilde{c}_1,..., \tilde{c}_n) = \tilde{c}_1x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}_nx_n \tag{2.33}$$

Подобным же образом функция принадлежности для функции ограничений $\tilde{g}_i(x,\tilde{a}_{i1},...,\tilde{a}_{in})$ определяется для каждого $t \in \mathbb{R}$ выражением

$$\mu_{\tilde{g}_i}(t) = \begin{cases} \sup\left\{ T(\mu_{\tilde{a}_{i1}}(a_1),....,\mu_{\tilde{a}_{in}}(a_n) \middle| \begin{array}{l} a_1,...,a_n \in R, \\ a_1x_1 + ... + a_nx_n = t \end{array} \right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{если } g_i^{-1}(x,t) \neq \varnothing, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{иначе}, \end{cases} \tag{2.34}$$

где

$$\tilde{g}_i^{-1}(x,t) = \{(a_1,...,a_n)^T \in R^n | a_1x_1 + ... + a_nx_n = t\}.$$

Здесь нечеткое множество $\tilde{g}_i(x,\tilde{a}_{i1},...,\tilde{a}_{in})$ обозначается как $\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n$, т.е.

$$\tilde{g}_i(x,\tilde{a}_{i1},...,\tilde{a}_{in}) = \tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n$$

для каждого $i \in M$ и для любого $a \in \mathbb{R}^n$. Из данного определения легко может быть выведено следующее предложение.

Пусть $\tilde{a}_j \in F_0(\mathbb{R})$, $x_j \geq 0$, $j \in N$. Тогда выражение $\tilde{a}_1x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_nx_n$ определяемое принципом расширения, также является нечеткой величиной.

В (2.31) значение $\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n \in F_0(\mathbb{R})$ сравнивается с нечеткой величиной $\tilde{b}_i \in F_0(\mathbb{R})$ с помощью нечеткого отношения

$\widetilde{R}_i, i \in M$. Обычно нечеткие отношения $\widetilde{R}_i$ на $\mathbb{R}$, сравнивающие левые и правые части ограничений (2.31), являются расширениями отношений на $\mathbb{R}$, в частности, бинарных отношений неравенства «≤» или «≥». Если $\widetilde{R}_i$ является Т - нечетким расширением $R_i, i \in M$, то функция принадлежности *i*–го ограничения записывается следующим образом:

$$\mu_{\widetilde{R}_i}(\widetilde{a}_{i1}x_1 \widetilde{+} ... \widetilde{+} \widetilde{a}_{in}x_n, \widetilde{b}) = \sup\{T(\mu_{\widetilde{a}_{i1}x_1 \widetilde{+} ... \widetilde{+} \widetilde{a}_{in}x_n}(u), \mu_{\widetilde{b}_i}(\upsilon)) \mid u R_i \upsilon\}.$$

Для присоединения нечетких ограничений к задаче нечеткого линейного программирования (2.31) необходимы некоторые операторы с подходящими свойствами. Такие операторы – мы будем называть их агрегирующими – должны присваивать каждому набору элементов единственное вещественное число, и для этой цели могут использоваться t-нормы или t-конормы. Но известны и некоторые другие полезные операторы, обобщающие обычные t-нормы или t-конормы. Ясно, что между произвольным интервалом [*a,b*] в $\mathbb{R}$ и единичным интервалом [0,1] можно установить взаимно–однозначное соответствие, и потому результат действия операторов на интервале [*a, b*] может быть преобразован в результат действия операторов на единичном интервале [0, 1], и наоборот. Кроме того, агрегирующие операторы на [0, 1] должны обладать достаточной общностью, по крайней мере, с теоретической точки зрения. Во многих случаях общие агрегирующие операторы могут быть выведены из n–арных операций на [0,1].

Определение 2.1. Оператором агрегирования G называется последовательность $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ отображений (называемых агрегирующими отображениями) $G_n:[0,1]^п \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям [114]:

(i) $G_i(x) = x$ для каждого $x \in [0,1]$;

(ii) $G_n\{x_1, x_2, ..., x_n) \le G_n(y_1, y_2, ..., y_n)$ при условии, что $x_i \le y_i$ для каждого i= 1, 2, ..., п и всех п = 2, 3, ...;

(iii) $G_n(0, 0,..., 0) = 0$ и $G_n(1, 1,..., 1) = 1$ для всех п = 2, 3, ...

Условие (i) говорит, что G_1 – унарная тождественная операция, (ii) означает, что каждое агрегирующее отображение G_n монотонно, в частности, является неубывающим по всем своим аргументам x_i а условие (iii) задает граничные условия. Имеется несколько примеров операторов агрегирования:

1) t-нормы и t-конормы;

2) обычные средние: арифметическое среднее, геометрическое среднее, гармоническое среднее и среднее степенное;

3) статистические агрегирующие операторы *k*-го порядка;

4) операторы порядкового взвешенного усреднения;

5) интегралы Сугено и Шоке.

2.2.2. Допустимое решение

Начнем изложение этого параграфа с определения допустимого решения задачи нечеткого линейного программирования (2.31) [115,116].

Определение 2.2. Пусть $g_i \in M$,- линейные функции, определенные в (2.28). Пусть $\mu_{\tilde{a}_{ij}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{b}_i} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $i \in M$, $j \in N$-функции принадлежности нечетких величин $\tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$, соответственно. Пусть $\mu_{\tilde{R}}, i \in M$, - нечеткие отношения на $\mathbb{R}$. Пусть G_A - оператор агрегирования и T- t-норма.

Нечеткое множество $\tilde{X}$, функция принадлежности $\mu_{\tilde{X}}$ которого определена для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Как

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = G_A(\mu_{\tilde{R}_1}(\tilde{a}_{11}x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{a}_{1n}x_n, \tilde{b}_1), \dots, \mu_{\tilde{R}_m}(\tilde{a}_{m1}x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{a}_{mn}x_n, \tilde{b}_m)),$$

$$\textit{если } x_j \geq 0 \textit{ для всех } j \in N,$$

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = 0, \qquad \textit{в остальн с случаях}, \tag{5.35}$$

называется допустимым решением задачи нечеткого линейного программирования (2.31).

Для $\alpha \in (0,1]$ вектор $x \in [\tilde{X}]_\alpha$ называется α - допустимым решением задачи нечеткого линейного программирования (2.31).

Вектор $x \in \mathbb{R}^n$, такой что $\mu_{\tilde{X}}(x) = Hgt(\tilde{X})$, называется max-допустимым решением.

По определению, допустимое решение $\tilde{X}$ задачи нечеткого линейного программирования является нечетким множеством. С другой стороны, α-допустимое решение является вектором, принадлежащим α-сечению допустимого решения $\tilde{X}$, и то же самое верно для max-допустимого решения, которое является специальным -допустимым решением при $\alpha = Hgt(\tilde{X})$. Для заданных допустимого решения $\tilde{X}$ и $\alpha \in (0, 1]$ (это может быть степень вероятности, допустимости, удовлетворенности и т.п.) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий неравенству $\mu_{\tilde{X}}(x) \geq \alpha$, является α-допустимым решением соответствующей задачи нечеткого линейного программирования.

Для $i \in M$ мы будем обозначать символом X_i нечеткое подмножество из $\mathbb{R}^n$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x)$ определенной для всех $x \in \mathbb{R}^n$ как

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) = \mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n, \tilde{b}_i). \tag{2.36}$$

Нечеткое множество (2.36) интерпретируется как г-ое нечеткое ограничение. Все нечеткие ограничения $\tilde{X}_i$ объединяются в допустимое решение (2.35) оператором агрегирования G_A. Обычно для объединения ограничений используется оператор G_A = min; подобным же образом t-норма T = min используется для расширения арифметических операций «$\tilde{+}$».

Ясно, что если a_{ij} и b_i - четкие параметры (т.е. обычные числа), то допустимое решение также является четким множеством. Кроме того, если для всех $i \in M$ отношения $\tilde{R}_i$ являются T – нечеткими расширениями взвешенных отношений R_i и для двух таборов нечетких параметров выполняются вложения $\tilde{a}'_{ij} \subseteq \tilde{a}''_{ij}$ и $\tilde{b}'_i \subseteq \tilde{b}''_i$, то это верно и для множеств допустимых решений, т. е. $\tilde{X}' \subseteq \tilde{X}''$.

Теперь выведем специальные формулы, которые позволяют вычислять «-допустимые решения $x \in [\tilde{X}_\alpha]$ задачи нечеткого линейного программирования (2.31). Для этого оказываются полезными следующие обозначения. Пусть заданы $\alpha \in (0, 1]$, $i \in M$, $j \in N$, и пусть $\tilde{a} \in F_0(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\tilde{a}^L(\alpha) = \inf\{ t \in \mathrm{R} \,|\, t \in |\tilde{a}|_\alpha \} = \inf |\tilde{a}|_\alpha$$

$$\tilde{a}^R(\alpha) = \sup\{ t \in \mathrm{R} \,|\, t \in |\tilde{a}|_\alpha \} = \sup |\tilde{a}|_\alpha, \tag{2.37}$$

Теорема 2.2. Пусть $\tilde{a}_{ij}$ *и* $\tilde{b}_i$ - нечеткие величины и $x_j \geq 0$ для всех , $i \in M$, $j \in N$, $\alpha \in (0, 1]$. Пусть $\tilde{\leq}^{\min}$ *и* $\tilde{\leq}^{\max}$ нчеткие расширения бинарного отношения. «≤» Тогда для $i \in M$ справедливы следующие утверждения [115]:

(i) $\mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n, \tilde{b}_i) \geq \alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \in N} \tilde{a}^L_{ij}(\alpha)x_j \leq \tilde{b}^R_i(\alpha), \tag{2.38}$$

(ii) $\mu_{\lesssim_{\max}}(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n, \tilde{b}_i) \geq \alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \in N} \tilde{a}_{ij}^R (1-\alpha)x_j \leq \tilde{b}_i^L (1-\alpha). \qquad (2.39)$$

Доказательство.

(i) Требуемое соотношение вытекает из определения (2.2).

(ii) Для доказательства (i) использовались только нормальность и компактность нечетких величин $\tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$, а предположение о выпуклости не было необходимо. Теперь же, остается показать, что $\inf\left[\tilde{a}_{ij}\right]_\alpha = \inf(\tilde{a}_{ij})_\alpha$, $\sup\left[\tilde{a}_{ij}\right]_\alpha = \sup(\tilde{a}_{ij})_\alpha$, $\inf\left[\tilde{b}_i\right]_\alpha = \inf(\tilde{b}_i)_\alpha$ и $\sup\left[\tilde{b}_i\right]_\alpha = \sup(\tilde{b}_i)_\alpha$. Напомним, что в силу (2.37) $\tilde{a}_{ij}^L(\alpha) = \inf(\tilde{a}_{ij})_\alpha$ и т.д. Очевидно, достаточно доказать равенства

$$\inf\left[\tilde{a}\right]_\alpha = \inf(\tilde{a})_\alpha, \qquad (2.40)$$

$$\sup\left[\tilde{a}\right]_\alpha = \sup(\tilde{a})_\alpha \qquad (2.41)$$

для любой нечеткой величины $\tilde{a} \in F_0(\mathbb{R})$, т.е. нормального компактного нечеткого подмножества $\mathbb{R}$ с полустрого квазивогнутой функцией принадлежности. Ниже мы приводим подробное доказательство только для (2.40), так как тождество (2.41) обосновывается аналогично. Пусть $\alpha \in (0,1)$, тогда

1) по определению a-сечения и строгого α-сечения имеем $(\tilde{a})_\alpha \subseteq [\tilde{a}]_\alpha$ тогда $\inf\left[\tilde{a}\right]_\alpha \leq \inf(\tilde{a})_\alpha$;

2) предположим, что $\inf\left[\tilde{a}\right]_\alpha < \inf(\tilde{a})_\alpha$; тогда существуют векторы x, x_o, такие что $\inf\left[\tilde{a}_{ij}\right]_\alpha < x < x_0 < \inf(\tilde{a}_{ij})_\alpha$, удовлетворяющее

$$\mu_{\tilde{a}}(x_0) = \alpha = \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{a}}(y)\}. \qquad (2.42)$$

С другой стороны, существует некоторый вектор y, такой что $\inf(\tilde{a})_\alpha < y$ и $\mu_{\tilde{a}}(x) > \alpha$ отсюда следует, что $x < x_o < y$. Тогда найдется некоторое $\lambda \in$ (0б 1), такое что $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$, и согласно (2.42) получаем

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \alpha = \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{a}}(y)\}. \qquad (2.43)$$

Однако, поскольку $\mu_{\tilde{a}}(x) < \mu_{\tilde{a}}(y)$ и $\mu_{\tilde{a}}(x) = \mu_{\tilde{a}}(\lambda x + (1-\lambda)y) > 0$, то по свойству полустрогой квазивыпуклости функции $\mu_{\tilde{a}}$ должно быть

$$\mu_{\tilde{a}}(x_0) > \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{a}}(y)\}.$$

Это противоречит (2.43). Как следствие, $\inf\left[\tilde{a}\right]_\alpha \geq \inf(\tilde{a})_\alpha$.

Заметим, что полустрогая квазивогнутость функций принадлежности является свойством, обеспечивающим эквивалентность в пункте (ii) Теоремы 2.2, которая играет ключевую роль в выводе рассматриваемого далее принципа двойственности в задачах нечеткого линейного программирования.

В следующем примере Теорема 2.2 применяется к широкому и практически интересному классу так называемых *(L,R)*-нечетких величин с функциями принадлежности, получаемых сдвигами и сжатиями специальных порождающих функций.

Пример 2.3. Пусть $l,\ r \in \mathbb{R}$ *и* $l \le r$. Пусть γ, δ [0, ∞), и пусть невозрастающие, полунепрерывные сверху, полустрого квазивогнутые функции, отображающие интервал [0, ∞) в интервал [0,1], т.е. *L, R*: [0, ∞) → [0,1]. Кроме того, предположим, что *L*(0)=*R*(*0*)=*1* и $\lim_{x\to+\infty} L(x) = \lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$, а функция принадлежности для любого $x \in \mathbb{R}$. описывается как

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{l-x}{\gamma}\right), & ессл \quad x \in (l-\gamma, l),\ \gamma > 0, \\ 1, & если \quad x \in [l,\ r], \\ R\left(\dfrac{x-r}{\delta}\right), & если \quad x \in (r, r+\delta), \delta > 0, \\ 0, & иначе. \end{cases} \tag{2.44}$$

Мы пишем $A = \{l,r,\gamma,\delta)_{LR}$, и нечеткую величину *A* называем *(L, R)* – нечетким интервалом. Множество всех (*L, R)* – нечетких интервалов обозначается как $F_{LR}(\mathbb{R})$. Ясно, что Core(*A*) = *[l, r]* и $[A]_a$ — компактный интервал для каждого $a \in (0,1]$.

Можно считать, что класс (*L*,*R*) – нечетких интервалов расширяет класс обычных замкнутых интервалов $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, включая случай *a* = *b*, т. е. четких чисел. Аналогично, если функции принадлежности для $\tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$

задаются аналитически выражениями

$$\mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{l_{ij}-x}{\gamma_{ij}}\right), & ессл \quad x \in (l_{ij}-\gamma_{ij}, l_{ij}),\ \gamma_{ij} > 0, \\ 1, & если \quad x \in [l_{ij},\ r_{ij}], \\ R\left(\dfrac{x-r_{ij}}{\delta_{ij}}\right), & если \quad x \in (r_{ij}, r_{ij}+\delta_{ij}), \delta_{ij} > 0, \\ 0, & иначе. \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\mu_{\tilde{a}_{ij}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{l_i-x}{\gamma_i}\right), & \text{еccл} \quad x\in(l_i-\gamma_i,l_i),\ \gamma_i>0,\\ 1, & \text{если} \quad x\in[l_i,\ r_i],\\ R\left(\dfrac{x-r_i}{\delta_i}\right), & \text{если} \quad x\in(r_i,r_i+\delta_i),\delta_i>0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{2.46}$$

Для всех $x \in \mathbb{R}$, $i \in$ M и $j \in N$, то величины (2.37) могут быть вычислены как

$$\tilde{a}_{ij}^{L}(\alpha)=l_{ij}-\gamma_{ij}L^{(-1)}(\alpha), \qquad \tilde{a}_{ij}^{R}(\alpha)=r_{ij}+\gamma_{ij}R^{(-1)}(\alpha),$$
$$\tilde{b}_{i}^{L}(\alpha)=l_{i}-\gamma_{i}L^{(-1)}(\alpha), \qquad \tilde{b}_{i}^{R}(\alpha)=r_{i}+\gamma_{i}R^{(-1)}(\alpha),$$

где $L^{(-1)}$ и $R^{(-1)}$ - псевдообратные функции для функций L и R, определяемые как $L^{(-1)}(\alpha)=\sup\{x|L(x)\geq\alpha\}$ и $R^{(-1)}(\alpha)=\sup\{x|R(x)\geq\alpha\}$, соответственно.

Пусть оператор агрегирования задается как G_A = min. По Теореме 2.2 α-сечение $\left[\tilde{X}\right]_\alpha$ множества допустимых решений (2.31) для отношении $\tilde{R}_i=\tilde{\leq}^{\min}$, $i\in M$, может быть получено решением системы неравенств

$$\sum_{j\in N}(l_{ij}-\gamma_{ij}L^{(-1)}(\alpha))x_j\leq r_i+\delta_i R^{(-1)}(\alpha),\ i\in M\ . \tag{2.47}$$

С другой стороны, α - сечение $\left[\tilde{X}\right]_\alpha$ множества допустимых решений (2.31) для отношении $\tilde{R}_i=\tilde{\leq}^{\min}$, $i\in M$, может быть получено решением системы неравенств

$$\sum_{j\in N}(r_{ij}-\delta_{ij}R^{(-1)}(\alpha))x_j\leq l_i+\gamma_i L^{(-1)}(\alpha),\ i\in M\ . \tag{2.48}$$

Кроме того, ввиду (2.47) и (2.48) множество $\left[\tilde{X}\right]_\alpha$ является пересечением конечного числа полупространств, так что это выпуклое многогранное множество.

2.2.3. «Оптимальное» решение

«Оптимизация», т.е. «максимизация» или «минимизация» целевой функции требует специального внимания, так как принимаемые ею нечеткие значения не образуют линейно упорядоченного множества. Чтобы «максимизировать» целевую функцию мы вводим подходящее понятие «оптимального решения», и это делается с помощью двух различных подходов, имеющих в своей основе 1) так называемое *удовлетворяющее* решение и 2) α-эффективное решение.

2.2.3.1. Удовлетворяющее решение

Предположим, что нам извне задана некоторая *нечеткая цель* $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$. Нечеткое значение $\tilde{d}$ сравнивается с нечеткими значениями $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ целевой функции с помощью заданного нечеткого отношения $\tilde{R}_0$-Тем самым нечеткая целевая функция рассматривается как еще одно ограничение

$$(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n)\, \tilde{R}_0 \tilde{d}$$

Понятие удовлетворяющего решения получается как модификация определения допустимого решения.

Определение 2.3. Пусть f и g_i - линейные функции, определенные выражениями (2.27) и (2.28). Пусть $\mu_{\tilde{c}_j}$: $\mathbb{R} \to [0,1]$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}}$: $\mathbb{R} \to [0,1]$, и $\mu_{\tilde{b}_i}$: $\mathbb{R} \to [0,1]$, i $\in$ M, j $\in$ N, -функции принадлежности нечетких величин $\tilde{c}'_j, \tilde{a}_{ij}$ *и* $\tilde{b}_i$, соответственно. Кроме того, пусть $\tilde{d} \in$ F($\mathbb{R}$) – некоторый нечеткий интервал, называемый нечеткой целью. Пусть $\tilde{R}_i,\ i \in \{0\} \cup M$,- нечеткие отношения на M и T – некоторая t-норма, а G и G_A – агрегирующие операторы [115].

Нечеткое множество $\tilde{X}^*$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{X}}$ определенной для всех x $\in \mathbb{R}^п$ выражением

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x) = G_A\left(\mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}), \mu_{\tilde{X}}(x)\right), \qquad (2.49)$$

где $\mu_{\tilde{X}}(x)$ - функция принадлежности допустимого решения, называется удовлетворяющим решением задачи нечеткого линейного программирования (2.31).

Для a$\in$(0,1] вектор $x \in \left[\tilde{X}^*\right]_\alpha$ называется α-удовлетворяющим решением задачи нечеткого линейного программирования (2.31). Вектор $x^* \in \mathbb{R}^п$, обладающий свойством

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x^*) = Hgt(\tilde{X}^*) \qquad (2.50)$$

называется max – удовлетворяющим решением.

Согласно определению (2.28) любое удовлетворяющее решение задачи нечеткого линейного программирования является нечетким множеством. С другой стороны, α-удовлетворяющее решение принадлежит α-сечению [-$\left[\tilde{X}^*\right]_\alpha$. Подобным же образом, max-удовлетворяющее решение является α-удовлетворяющим решением для $\alpha = Hgt(\widetilde{X}^*)$.

Мы используем здесь t-норму T для расширения арифметических операций, оператор агрегирования G - для связывания отдельных ограничений в допустимое решение, а оператор агрегирования G_A применяется для соединения нечеткого множества допустимого решения с нечетким целевым множеством $\widetilde{X}_0$, определяемым функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{X}_0}(x) = \mu_{\widetilde{R}_0}(\widetilde{c}_1 x_1 \widetilde{+} \ldots . \widetilde{+} \widetilde{c}_n x_n, \widetilde{d}) \tag{2.51}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Функция принадлежности оптимального решения $\widetilde{X}^*$ определяется для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выражением

$$\mu_{\widetilde{X}^*}(x) = G_A\left(\mu_{\widetilde{X}_0}(x), \mu_{\widetilde{X}}(x)\right).$$

Если (2.31) является задачей максимизации «большая величина является предпочтительней», то функция принадлежности $\mu_{\widetilde{d}}$ заданной нечеткой цели $\widetilde{d}$ предполагается возрастающей или неубывающей. Если (2.31) является задачей минимизации «меньшая величина является предпочтительней», то функция принадлежности $\mu_{\widetilde{d}}$ заданной нечеткой цели $\widetilde{d}$ предполагается убывающей или невозрастающей. Нечеткое отношение $\widetilde{R}_0$ для сравнения $\widetilde{c}_1 x_1 \widetilde{+} \ldots . \widetilde{+} \widetilde{c}_n x_n$ и $\widetilde{d}$ предполагается нечетким расширением операций сравнения «≥» или «≤».

Понятие допустимого решения подобно понятию оптимального решения. Поэтому далее мы можем воспользоваться свойствами допустимого решения, изученными в предыдущем параграфе.

Видно, что в случае четких параметров $\widetilde{c}'_j, \widetilde{a}_{ij}$ и $\widetilde{b}_i$, множество всех max-оптимальных решений, задаваемых (2.50), совпадает с множеством всех оптимальных решений задачи классического линейного программирования. Имеет место следующий результат:

Предложение 2.1. Пусть $\widetilde{c}_j, \widetilde{a}_{ij}$ и $\widetilde{b}_i$ - четкие числа для всех i∈M, j∈N. Пусть $\widetilde{d} \in$F($\mathbb{R}$) – нечеткая цель со строго возрастающей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{d}}$. Пусть для i ∈ M. нечеткое отношение $\widetilde{R}_i$ является нечетким расширением отношения «≤» на $\mathbb{R}$, а $\widetilde{R}_0$- T– нечеткое расширение отношения «≥». Пусть T, G и G_A - X-нормы.

Тогда множество всех max-удовлетворяющих решений задачи (2.31) совпадает с множеством X* всех оптимальных решений задачи линейного программирования (2.29) [116].

Доказательство. Ясно, что допустимое решение $\tilde{X}$ задачи (2.31) является четким, т. е. $\mu_{\tilde{X}}(x) = X_x(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, где X - множество всех допустимых решений (2.30) задачи четкого линейного программирования (2.29). Кроме того, согласно (2.51) для четкого $c \in \mathbb{R}^n$ с получаем

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \mu_{\tilde{R}_0}(f(x,c)), \tilde{d}) = \mu_{\tilde{d}}(c_1x_1 + ... + c_nx_n),$$

где f определена в (2.27). Подставляя это выражение в (2.52), получаем

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = G_A(\mu_{\tilde{d}}(f(x,c)),\ X_x(x)) =$$

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{d}}(c_1x_1 + ... + c_nx_n), & если \quad x \in X, \\ 0, & в\ противном\ случае \end{cases}$$

Так как функция $\mu_{\tilde{d}}$-строго возрастающая, то из сказанного следует, что

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x^*) = Hgt(\tilde{X}^*)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \sup\{\mu_{\tilde{d}}(c_1x_1 + ... + c_nx_n), |x \in X\},$$

что и требовалось доказать.

Предложение 2.2. Пусть $\tilde{c}'_j, \tilde{a}'_{ij}$ и $\tilde{b}'_i$ и $\tilde{c}'_j, \tilde{a}''_{ij}$ и $\tilde{b}''_i$ - два набора нечетких величин, являющихся параметрами задачи нечеткого линейного программирования (2.31), i∈M, j∈N. Пусть T, G и G_A - X-нормы. Пусть $\tilde{R}_i, i \in \{0\} \cup M$, являются T- нечеткими расширениями взвешенных отношений R_i на $\mathbb{R}$, а $\tilde{d} \in F_i(\mathbb{R})$ - нечеткая цель.

Если $\tilde{X}^{*'}$ является удовлетворяющим решением задачи нечеткого линейного программирования (2.31) с параметрами $\tilde{c}'_j, \tilde{a}'_{ij}$ и $\tilde{b}'_i$,, а $\tilde{X}^{*''}$ является удовлетворяющим решением задачи нечеткого линейного программирования с параметрами $\tilde{c}''_j, \tilde{a}''_{ij}$ и $\tilde{b}''_i$, такими что для всех i∈M, j∈N,

$$\tilde{c}'_j \subseteq \tilde{c}''_j\ \tilde{a}'_{ij} \subseteq \tilde{a}''_{ij}\, \tilde{b}'_i \subseteq \tilde{b}''_i$$

то справедливо включение [115]

$$\tilde{X}^{*'} \subseteq \tilde{X}^{*''}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\tilde{X}' \subseteq \tilde{X}''$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in M$. Нам нужно убедиться, что

$$\tilde{a}'_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}'_{in}x_n \subseteq \tilde{a}''_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}''_{in}x_n.$$

Для всякого $u \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mu_{\tilde{a}'_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}'_{in}x_n}(u) =$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{a}'_{i1}x_1}(a_1),....,\mu_{\tilde{a}'_{in}x_n}(a_n)) \mid \tilde{a}_{i1}x_1 + ... + \tilde{a}_{in}x_n = u\} \le$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{a}''_{i1}x_1}(a_1),....,\mu_{\tilde{a}''_{in}x_n}(a_n)) \mid \tilde{a}_{i1}x_1 + ... + \tilde{a}_{in}x_n = u\} =$$

$$\mu_{\tilde{a}''_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}''_{in}x_n}(u)$$

Теперь, так как $\tilde{b}'_i \subseteq \tilde{b}''_i$, то, используя монотонность T - нечетких расширений $\tilde{R}_i$ отношений R_i, приходим к неравенству

$$\mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{a}'_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}'_{in}x_n, \tilde{b}'_i) \le \mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{a}''_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}''_{in}x_n, \tilde{b}''_i).$$

Снова применяя монотонность G в (2.35), получаем $\tilde{X}' \subseteq \tilde{X}''$. Осталось показать, что $\tilde{X}'_0 \subseteq \tilde{X}''_0$, где

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \mu_{\tilde{R}_0}(f(x,\tilde{c}')), \tilde{d}), \mu_{\tilde{X}''_0}(x) = \mu_{\tilde{R}_0}(f(x,\tilde{c}'')), \tilde{d}),$$

а f определена в (2.27).

Докажем, что $\tilde{f}(x,\tilde{c}') \subseteq \tilde{f}(x,\tilde{c}'')$. Поскольку для любого $j \in N$ имеем $\mu_{\tilde{c}'_j}(c) \le \mu_{\tilde{c}''_j}$ Для всех $c \in \mathbb{R}$, то в силу (2.32) получаем для всех $u \in \mathbb{R}$

$$\mu_{\tilde{c}'_1x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}'_nx_n}(u) =$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{c}'_1x_1}(c_1),....,\mu_{\tilde{c}'_nx_n}(c_n)) \mid c_1x_1 + ... + c_nx_n = u\} \le$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{c}''_1x_1}(a_1),....,\mu_{\tilde{c}''_nx_n}(a_n)) \mid c_1x_1 + ... + c_nx_n = u\} =$$

$$\mu_{\tilde{c}''_ix_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}''_nx_n}(u)$$

Используя монотонность $\tilde{R}_0$, приходим к неравенству

$$\mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}'_1x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}'_nx_n, \tilde{d}) \le \mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}''_1x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}''_nx_n, \tilde{d}).$$

Наконец, применяя монотонность G_A в (2.52), получаем $\tilde{X}^{*''} \subseteq \tilde{X}^{*''}$.

Расширим теперь Теорему на случай удовлетворяющего решения задачи нечеткого линейного программирования. Для этой цели введем следующие обозначения. Для заданного $a \in (0,1]$, $j \in N$, пусть

$$\tilde{c}^L_j(\alpha) = \inf\{\, c \mid [\tilde{c}_j]_\alpha \},$$

$$\tilde{c}_j^R(\alpha) = \sup\{c \,|\, [\tilde{c}_j]_\alpha\},$$
$$\tilde{d}_j^R(\alpha) = \inf\{d \,|\, [\tilde{d}_j]_\alpha\},$$

Теорема 2.3. Пусть $\tilde{c}_j'', \tilde{a}_{ij}''$ и $\tilde{b}_i''$ - нечеткие величины, i$\in$ M, j$\in$N. Пусть $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ - нечеткая цель с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{d}}$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned}&\mu_{\tilde{d}} \textit{ полунепрерывна сверну,}\\ &\mu_{\tilde{d}} \textit{ строго возрастающая,}\\ &\lim{}_{t\to\infty\ \mu_{\tilde{d}}(t)} = 0\end{aligned} \tag{2.53}$$

Для $i \in M$ пусть $\tilde{R}_i$ - T - нечеткое расширение бинарного отношения «≤» на $\mathbb{R}$, а $\tilde{R}_0$- T - нечеткое расширение бинарного отношения «≥» на $\mathbb{R}$. Пусть $T = G = G_A = min$. Пусть, наконец, $\tilde{X}^*$- удовлетворяющее решение задачи нечеткого линейного программирования (2.31) и пусть a$\in$(0,1). Вектор x = $\{x_1, ..., x_п)^T \geq 0$ принадлежит $[\tilde{X}^*]_\alpha$ тогда и только тогда, когда [115,116]

$$\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^R(\alpha)x_j \geq \tilde{d}^l(\alpha),$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_j^L(\alpha)x_j \geq b_i^R(\alpha), \qquad i \in M.$$

Доказательство опускаем, так как оно аналогично доказательству пункта (i) Теоремы с одним небольшим изменением: вместо компактности множества $\tilde{d}$ предполагается (2.53).

Если функции принадлежности нечетких параметров $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ можно выразить в явной форме, например, в виде (L, R) – нечетких величин (см. (2.46)), то max – удовлетворяющее решение может быть найдено как оптимальное решение некоторой задачи классической оптимизации.

Предложение 2.3. Пусть

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) \leq \mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}).$$

- функция принадлежности нечеткой цели, и пусть

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) \leq \mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}).$$

-функции принадлежности нечетких ограничений, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$. Пусть $T = G = G_A = min$, и предположим, что

(2.53) имеет место для нечеткой цели $\tilde{d}$. Тогда вектор $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ является оптимальным решением оптимизационной задачи.

максимизировать t

при ограничениях $\begin{array}{l} \mu_{\tilde{X}_i}(x) \ge t, \quad i \in \{0\} \cup M, \\ x_j \ge 0, \; j \in N, \end{array}$

тогда и только тогда, когда вектор $x^* \in R^n$ является *max* - удовлетворяющим решением задачи нечеткого линейного программирования (2.31).

Доказательство. Пусть вектор $(t^*, \; x^*) \in K^{n+1}$ является оптимальным решением задачи (2.56). Согласно (2.49) и (2.50) получаем

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x^*) = \sup\{\min\{\; \mu_{\tilde{X}_0}(x), \mu_{\tilde{X}_i}(x)\} \big| x \in R^n\} = Hgt(\tilde{X}^*)$$

Следовательно, x^* является max-удовлетворяющим решением.

Доказательство обратного утверждения следует из Определения 2.3.

2.2.3.2. α-эффективное решение

Пусть теперь a и b - нечеткие величины, $\tilde{R}$ - нечеткое отношение на $\mathbb{R}$ и $\alpha \in (0,1]$. Мы будем писать.

$$\tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b}, \quad если \quad \mu_{\tilde{R}}(\tilde{a}, \tilde{b}) \ge \alpha \qquad (2.57)$$

Будем также писать

$$\tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b}, \quad если \;\; \tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b} \;\; и \;\; \mu_{\tilde{R}}(\tilde{a}, \tilde{b}) < \alpha \qquad (2.58)$$

Отметим, что символ $\underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}}$ обозначает бинарное отношение на множестве всех нечетких величин $F(\mathbb{R})$. Если a и b - четкие числа, соответствующие вещественным числам a и b, и R - нечеткое расширение отношения «≤», то отношение $\tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b}$ верно тогда и только тогда, когда $a \le b$.

Модифицируя теперь хорошо известную идею эффективного (недоминируемого) решения задачи линейного программирования, дадим определение «максимизации» (или «минимизации») целевой функции задачи нечеткого линейного программирования (2.31) [114].

Определение 2.4. Пусть $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ *и* $\tilde{b}_i$, $i \in M$, $j \in N$ нечеткие величины на $\mathbb{R}$. Пусть $\tilde{R}$,i $\in$ 0, 1, …, m, - нечеткие отношения на $\mathbb{R}$ *и* $\alpha \in (0,1]$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_п)^T$ – некоторое α - допустимое решение задачи (2.31) и обозначим

$\tilde{c}^T x = \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является α-эффективным решением задачи (2.31) с максимизацией целевой функции, если не существует вектора $x' \in [\tilde{X}]_\alpha$, такого что $\tilde{c}^T x \prec_\alpha^{\tilde{R}} \tilde{c}^T x'$. Подобным же образом, вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является α-эффективным решением задачи (2.31) с минимизацией целевой функции, если не существует вектора $x' \in [\tilde{X}]_\alpha$, такого что $\tilde{c}^T x' \prec_\alpha^{\tilde{R}} \tilde{c}^T x$.

Заметим, что любое α-эффективное решение задачи нечеткого линейного программирования является α--допустимым решением той же задачи с некоторым дополнительным свойством. Если все коэффициенты задачи (2.31) являются четкими, то α-эффективное решение задачи нечеткого линейного программирования эквивалентно классическому оптимальному решению соответствующей задачи линейного программирования.

В следующей Теореме для случая специальных нечетких расширений бинарного отношения «≤» приводятся необходимые и достаточные условия того, что решение задачи (2.31) является α-эффективным решением.

Теорема 2.4. Пусть $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$, $i \in M, j \in N$, - нечеткие величины на $\mathbb{R}$ и $\alpha \in (0,1)$.

(i) Пусть $\tilde{R}_i = \tilde{\leq}^{\min}$, т.е. $\tilde{R}_i$ - нечеткие расширения бинарного отношения «≤» на $\mathbb{R}$, определенные согласно (2.19) и (2.20) для всех $i \in 0,1,...m$. Пусть $x^* = \{x_1^*, ..., x_n^*\},\ x_j^* \geq 0,\ j \in N$, - α - допустимое решение задачи (2.31). Вектор $x^* \in \mathbb{R}$ является α-эффективным решением задачи (2.31) с максимизацией целевой функции тогда и только тогда, когда x^* является оптимальным решением следующей задачи линейного программирования

Максимизировать $\quad \tilde{c}_1^R(\alpha)x_1 + ... + \tilde{c}_n^R(\alpha)x_n$

при ограничениях $\quad \begin{aligned} &\tilde{a}_{i1}^R(\alpha)x_1 + ... + \tilde{a}_{in}^R(\alpha)x_n \leq \tilde{b}_i^L(\alpha),\ i \in M, \\ &x_j \geq 0,\ j \in N. \end{aligned} \qquad (2.59)$

(ii) Пусть $\tilde{R}_0 = \tilde{\leq}^{\min}$, $\tilde{R}_0 = \tilde{\leq}^{\max}$ $i \in 1,2, ... ,m$. Пусть $x^* = \{x_1^*, ..., x_n^*\}$, $x_j^* \geq 0,\ j \in N$ - α - допустимое решение задачи (2.31). Вектор $x^* \in \mathbb{R}^n$ является α-эффективным решением задачи (2.31) с максимизацией целевой функции тогда и только тогда, когда x* является оптимальным решением следующей задачи линейного программирования

$$\text{максимизировать} \quad \tilde{c}_1^R(\alpha)x_1 + \ldots + \tilde{c}_n^R(\alpha)x_n$$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{array}{l} \tilde{a}_{i1}^R(\alpha)x_1 + \ldots + \tilde{a}_{in}^R(\alpha)x_n \le \tilde{b}_i^L(\alpha),\ i \in M, \\ x_j \ge 0,\ j \in N. \end{array} \qquad (2.60)$$

(iii) Пусть $\tilde{R}_0 = \tilde{\leqq}^{\max}$ и $\tilde{R}_0 = \tilde{\leqq}^{\min}$ $i \in 1,2,\ldots,m$. Пусть $x^* = \{x_1^*,\ldots,x_n^*\}$,

- α - допустимое решение задачи (2.31). Вектор x* ∈ $\mathbb{R}^n$ является α - эффективным решением задачи (2.31) с максимизацией целевой функции тогда и только тогда, когда x* является оптимальным решением следующей задачи линейного программирования

$$\text{максимизировать} \quad \tilde{c}_1^L(\alpha)x_1 + \ldots + \tilde{c}_n^L(\alpha)x_n$$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{array}{l} \tilde{a}_{i1}^L(\alpha)x_1 + \ldots + \tilde{a}_{in}^L(\alpha)x_n \le \tilde{b}_i^R(\alpha),\ i \in M, \\ x_j \ge 0,\ j \in N. \end{array} \qquad (2.61)$$

(iv) Пусть $\tilde{R}_0 = \tilde{\leqq}^{\max}$, $i \in 1,2,\ldots,m$. Пусть $x^* = \{x_1^*,\ldots,x_n^*\}$, $x_j^* \ge 0,\ j \in N$

- α-допустимое решение задачи (2.31). Вектор x* ∈ $\mathbb{R}$ является α-эффективным решением задачи (2.31) с максимизацией целевой функции тогда и только тогда, когда x* является оптимальным решением следующей задачи линейного программирования

$$\text{максимизировать} \quad \tilde{c}_1^L(\alpha)x_1 + \ldots + \tilde{c}_n^L(\alpha)x_n$$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{array}{l} \tilde{a}_{i1}^R(\alpha)x_1 + \ldots + \tilde{a}_{in}^R(\alpha)x_n \le \tilde{b}_i^L(\alpha),\ i \in M, \\ x_j \ge 0,\ j \in N. \end{array} \qquad (2.62)$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение (i). Пусть $x^* = \{x_1^*,\ldots,x_n^*\}$, $x_j^* \ge 0,\ j \in N$, - α - эффективное решение задачи (2.31) с максимизацией целевой функции. Принимая во внимание пункт формулы (2.57), (2.58) и Определение 2.3, можем заключить, что x^* является оптимальным решением задачи линейного программирования (2.59). С другой стороны, если x^* - оптимальное решение задачи линейного программирования (2.59), то по Теореме 2.26 x^* является α-допустимым решением задачи нечеткого линейного программирования (2.31). Очевидно, что тогда (2.57) и (2.58) удовлетворяются. Следовательно, вектор x^* является α-эффективным решением задачи (2.31) с максимизацией целевой функции.

Доказательство утверждений (ii) - (iv) аналогично.

В следующем параграфе исследуется двойственность - фундаментальное понятие линейной оптимизации. Мы снова выделяем два упомянутых выше подхода к вопросу «оптимальности» задачи нечеткого линейного программирования.

2.2.4. Двойственность

В этом параграфе широко известная концепция двойственности линейного программирования обобщается на задачи нечеткого линейного программирования. Некоторые результаты этого параграфа можно найти в [135]. Мы выводим теоремы о слабой и сильной двойственности, которые расширяют известные результаты на задачи нечеткого линейного программирования.

Рассмотрим следующую задачу нечеткого линейного программирования

$$\begin{array}{ll} \text{«максимизировать»} & \tilde{c}_1^L(\alpha)x_1 + \ldots + \tilde{c}_n^L(\alpha)x_n \\ \text{при ограничениях} & \begin{array}{l} (\tilde{a}_{i1}x_1 + \ldots + \tilde{a}_{in}x_n)\,\tilde{R}\,\tilde{b}_i,\ i \in M, \\ x_j \geq 0,\ j \in N. \end{array} \end{array} \tag{2.63}$$

где $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ - нормальные нечеткие величины с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{c}_j} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ и $\mu_{\tilde{b}_i} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $i \in M, j \in N$.

Пусть $\Phi : F(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to F(F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}))$ - некоторое отображение, а $\psi : F\ F(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to F(F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}))$ - отображение, двойственное к отображению Φ. Пусть R - некоторое взвешенное отношение на $\mathbb{R}$, и пусть $\tilde{R} = \Phi(R)$ и $\tilde{R}^D = \Psi(R)$ (см. Определение 2.5). Тогда $\tilde{R}$ и $\tilde{R}^D$ - двойственные нечеткие отношения.

Задача нечеткого линейного программирования (2.63) называется прямой задачей нечеткого линейного программирования (P).

Двойственная задача нечеткого линейного программирования (D) определяется как

$$\begin{array}{ll} \text{«минимизировать»} & \tilde{b}_1 y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{b}_m y_m \\ \text{при ограничениях} & \begin{array}{l} (\tilde{c}_j \tilde{R}^D (\tilde{a}_{1j} y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} a_{mj} y_m)),\quad j \in N, \\ y_i \geq 0,\ i \in M. \end{array} \end{array} \tag{2.64}$$

Пара задач (P) (2.63) и (D) (2.64) называется прямо-двойственной парой задач нечеткого линейного программирования.

Пусть R - бинарное отношение «≤», пусть $T = min$ и $S = max$. Пусть «< » и «$\tilde{\leq}^{\min}$» - нечеткие расширения для «$\tilde{\leq}^{\max}$», определенные посредством (2.19) и (2.20), соответственно. Поскольку T является двойственной t-нормой к S, то по Определению «$\tilde{\leq}^{\max}$» является нечетким отношением, двойственным к «$\tilde{\leq}^{\min}$». Получаем прямо-двойственную пару задач нечеткого линейного программирования в следующем виде:

(P)

$$\text{«максимизировать»} \quad \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{array}{l} \tilde{a}_{i1}x_1 + \ldots + \tilde{a}_{in}x_n \tilde{\leq}^{\min} \tilde{b}_i,\ i \in M, \\ x_j \geq 0,\ j \in N. \end{array} \tag{2.65}$$

(D)

$$\text{«минимизировать»} \quad \tilde{b}_1 y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{b}_m y_m$$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{array}{l} \tilde{c}_j \tilde{\leq}^{\max} \tilde{a}_{1j} y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} a_{mj} y_m, \quad j \in N, \\ y_i \geq 0,\ i \in M. \end{array} \tag{2.66}$$

Мы будем обозначать через X допустимое решение прямой задачи (P) нечеткого линейного программирования, а допустимое решение двойственной задачи (D) - через $\tilde{Y}$. Ясно, что $\tilde{X}$ является нечетким подмножеством $\mathbb{R}^n$, а $\tilde{Y}$ - нечетким подмножеством $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что в случае четких данных, т. е. когда параметры $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ являются обычными числами, в силу Теоремы 2.26 отношения «$\tilde{\leq}^{\min}$» и «$\tilde{\leq}^{\max}$» совпадают с неравенством «≤». Следовательно, в этом случае задачи (P) и (D) являются прямо-двойственной парой задач линейного программирования в классическом смысле [116].

Предложение 2.4. Пусть $\tilde{c}_j$ и $\tilde{a}_{ij}$ - нечеткие величины, $y_t \geq 0$ для всех i ∈ M, j ∈ N, и пусть α ∈ (0,1). Пусть > — нечеткое расширение бинарного отношения «>», данное в Определении 2.20. Тогда для j ∈ N имеет место следующая эквивалентность:

$$\mu_{\tilde{\leq}^{\max}} = (\tilde{a}_{1j} y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} a_{mj} y_m, \tilde{c}_j) \geq 1 - \alpha$$

$$\text{тогда и только тогда, когда} \quad \sum_{i \in M} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha) y_i \geq \tilde{c}_R^j(\alpha). \tag{2.67}$$

Теорема 2.5 (Первая теорема о слабой двойственности). Пусть $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ - нечеткие величины для всех $i \in M$, $j \in N$. Пусть $A = T_M = \min$, $S = S_M = \max$ и α ∈ (0,1). Пусть $\tilde{X}$ - допустимое решение задачи нечеткого линейного программирования (2.63), а $\tilde{Y}$-допустимое решение задачи нечеткого линейного программирования (2.64) [116].

Если вектор $x = (x_1, \ldots, x_п)^T \geq 0$ принадлежит $[\tilde{X}]_\alpha$, а вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)^T \geq 0$ принадлежит $[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$, то

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j^R(\alpha)x_j \le \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^R(\alpha)y_i \ . \qquad (2.68)$$

Доказательство . Пусть $x \in[\tilde{X}]_\alpha$ и $y \in[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$, $x_j \ge 0$, $y_i \ge 0$ для всех $i \in M$, $j \in N$. Тогда согласно Предложению 2.35, умножая обе части на x_j и выполнив суммирование, приходим к оценке

$$\sum_{j\in N}\sum_{i\in M}\tilde{a}_{ij}^L(\alpha)y_i x_j \ge \sum_{j\in N}\tilde{c}_j^R(\alpha)x_j \ . \qquad (2.69)$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{i\in M}\tilde{a}_{ij}^L(\alpha)x_j y_i \le \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^R(\alpha)y_i \,. \qquad (2.70)$$

Комбинируя неравенства (2.69) и (2.70), получаем

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x_j \le \sum_{j\in N}\sum_{i\in M}\tilde{a}_{ij}^L(\alpha)x_j y_i \le \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^R(\alpha)y_i \,.$$

что и требовалось.

Теорема 2.6 (Вторая теорема о слабой двойственности).

Пусть $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ - нечеткие величины для всех $i \in M$, $j \in N$. Пусть $A = T_M = min$, $S = S_M = max$ и $\alpha \in (0,1)$. Пусть $\tilde{X}$ - допустимое решение задачи нечеткого линейного программирования (2.63), а $\tilde{Y}$ - допустимое решение задачи нечеткого линейного программирования (2.64).

Если для некоторого вектора $x=(x_1,\dots , x_n)^T \ge 0$, принадлежащего $[\tilde{X}]_\alpha$, и некоторого вектора $y=(y_1, \dots, y_m)^T \ge 0$, принадлежащего $[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$, имеет место

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x_j \le \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^R(\alpha)y_i \,, \qquad (2.71)$$

то x является α-эффективным решением прямой задачи нечеткого линейного программирования (P), а y - $(1 - \alpha)$ - эффективным решением двойственной задачи нечеткого линейного программирования (D) [116].

Доказательство. Пусть $x \in [\tilde{X}]_\alpha$ и $y \in[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$, $x_j \ge 0$, $y_i \ge 0$. Тогда по Предложению 2.4 удовлетворяется неравенство (2.68), и имеет место равенство (2.71). Предположим, что $x\in[\tilde{X}]_\alpha$ не является α-эффективным решением задачи нечеткого линейного программирования (P). Тогда существует некоторый вектор $x' \in [\tilde{X}]_\alpha$, такой что $\tilde{c}^T x \prec_\alpha \tilde{c}^T x'$. Но в силу Определения 2.33 и соотношений (2.57) и (2.58) получаем

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x_j < \sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x'_j \,,$$

что входит в противоречие с (2.68). Следовательно, x является α-эффективным решением прямой задачи нечеткого линейного программирования (P). Вторая часть этого предложения, говорящая о том, что y есть (1-α)-эффективное решение двойственной задачи нечеткого линейного программирования (D), может быть доказана аналогично.

Замечания

1. В случае четких данных Теоремы 2.5 и 2.6 являются стандартными теоремами линейного программирования о слабой двойственности.

2. Результат первой теоремы о слабой двойственности не зависит о типа задачи - «максимизации» или «минимизации».

3. По аналогии можно легко сформулировать прямо-двойственную пару задач нечеткого линейного программирования заменой нечетких отношении «$\tilde{\leq}^{\min}$» и «$\tilde{\leq}^{\max}$» в целевых функциях и/или ограничениях (2.63) и (2.64). Тогда теоремы о слабой двойственности необходимо переформулировать соответствующим образом.

4. Пусть α ≥ 0.5. Ясно, что $[\tilde{Y}]_{\alpha} \subseteq [\tilde{Y}]_{1-\alpha}$. В теоремах о слабой двойственности можно заменить допущения следующим образом: $x \in [\tilde{X}]_{\alpha}$ и $y \in [\tilde{Y}]_{\alpha}$. Очевидно, что утверждения теорем при этом не изменятся.

Обратимся теперь к сильной двойственности. Начнем с «удовлетворяющего» подхода к «максимизации» или «минимизации».

Для этого предположим существование заданных извне дополнительных целей $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ и $\tilde{h} \in F(\mathbb{R})$. Нечеткая цель $\tilde{d}$ сравнивается с нечеткими значениями $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ целевой функции прямой задачи нечеткого линейного программирования (P) с помощью нечеткого отношения «$\tilde{\geq}^{\min}$». С другой стороны, нечеткая цель $\tilde{h}$ сравнивается с нечеткими значениями $\tilde{b}_1 y_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{b}_m y_m$ целевой функции двойственной задачи нечеткого линейного программирования (D) с помощью нечеткого отношения «$\tilde{\leq}^{\max}$». На этом пути с нечеткими целями мы работаем как с ограничениями

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n \tilde{\geq}^{\min} \tilde{d}, \qquad \tilde{b}_1 y_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{b}_m y_m \tilde{\leq}^{\max} \tilde{h}$$

Обозначим посредством $\tilde{X}^*$ удовлетворяющее решение прямой задачи нечеткого линейного программирования (P), введенное в Определении 2.28, а удовлетворяющее решение двойственной задачи нечеткого линейного программирования (D) обозначим $\tilde{Y}^*$. Ясно, что $\tilde{X}^*$ - нечеткое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а $\tilde{Y}^*$ - нечеткое подмножество в $\mathbb{R}^m$, и, кроме того, $\tilde{X}^* \subseteq \tilde{X}$ и $\tilde{Y}^* \subseteq \tilde{Y}$.

Теорема 2.7 (Первая теорема о сильной двойственности). Пусть $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ - нечеткие величины для всех $i \in M$, $j \in N$. Пусть $\tilde{d}, \tilde{h} \in F(\mathbb{R})$ - нечеткие цели с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{d}}$ и $\mu_{\tilde{h}}$ обладающими следующими свойствами:

как $\mu_{\tilde{d}}$, так и $\mu_{\tilde{h}}$ полунепрерывны сверху,

$\mu_{\tilde{d}}$ строго возрастающая, $\mu_{\tilde{h}}$ строго убывающая, (5.72)

$$\lim_{t\to-\infty} \mu_{\tilde{d}}(t) = \lim_{t\to\infty} \mu_{\tilde{h}}(t) = 0$$

Пусть *G=T=min* *S=max.* Пусть «$\tilde{\le}^{\min}$» - T - нечеткое расширение «≤» бинарного отношения на $\mathbb{R}$ и «$\tilde{\le}^{\max}$» - S-нечеткое расширение бинарного отношения «≤» на $\mathbb{R}$. Пусть $\tilde{X}^*$ - множество удовлетворяющих решений задачи нечеткого линейного программирования (2.65), $\tilde{Y}^*$ - множество удовлетворяющих решений задачи нечеткого линейного программирования (2.66) и $\alpha \in (0,1)$.

Если вектор $x = (x_1, ..., x_n)^T \ge 0$ принадлежит $[\tilde{X}]_\alpha$, то существует некоторый вектор $y = (y_1,...,y_m)^T \ge 0$, принадлежащий $[\tilde{Y}]_{\alpha-1}$, такой что [115]

$$\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j^* \le \sum_{i\in M} \tilde{b}_i^R(\alpha) y_i^* \tag{2.73}$$

Доказательство. Пусть $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)^T \ge 0,\ x^* \in [\tilde{X}^*]_\alpha$

$$\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j^* \ge \tilde{d}^L(\alpha), \tag{2.74}$$

$$\sum_{j\in N} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha) x_j^* \le \tilde{b}_i^R(\alpha),\ i \in M, \tag{2.75}$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования (P1)

максимизировать $\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j$, при ограничениях $\quad \sum_{j\in N} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha)x_j^* \le \tilde{b}_i^R(\alpha),\ i \in M,$

$x_j \ge 0,\ j \in N,$

В силу предположений (2.72) о нечеткой цели $\tilde{d}$ система неравенств (2.74) и (2.75) удовлетворяется тогда и только тогда, когда x^* является оптимальным решением задачи (P1). Тогда по стандартной теореме о сильной двойственности для обычной задачи линейного программирования существует вектор $y^* \in \mathbb{R}^m$, являющийся оптимальным решением двойственной задачи

(D1)

минимизировать $\quad \sum_{i\in M} \tilde{b}_i^R(\alpha)y_i$,

при ограничениях $\quad \tilde{c}_j^R(\alpha) \le \sum_{i\in M} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha)y_i \ \ j \in N,$

$y_i \ge 0,\ i \in M,$

так что в самом деле (2.73) имеет место.

Остается только доказать, что $y^* \in [\tilde{Y}^*{}_{1-\alpha}]$. Этот факт прямо следует из предположений (2.72) относительно нечеткой цели $\tilde{h}$.

Заметим, что в случае четких данных равенство (2.73) является стандартной теоремой о двойственности для задачи линейного программирования.

Теперь обратимся к α-эффективному подходу к оптимизации в задаче нечеткого линейного программирования. Символом X^*_α обозначим α-эффективное решение прямой задачи (P) нечеткого линейного программирования, данное в Определении 2.3; аналогично, символом *YJ* обозначим а-эффективное решение двойственной задачи (D) нечеткого линейного программирования.

Теорема 2.8 (Вторая теорема о сильной двойственности). Пусть $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$ - нечеткие величины для всех $i \in M,\ j \in N$. Пусть «$\tilde{\le}^{\min}$» и «$\tilde{\le}^{\max}$» - нечеткие расширения бинарного отношения «≤» на $\mathbb{R}$ и $\alpha \in (0,1)$. Если $[\tilde{X}]_\alpha$ и $[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$ непусты, то существуют вектор x^*, являющийся α-эффективным решением прямой задачи (P) нечеткого линейного программирования, и вектор y^*, являющийся (1-α) - эффективным решением двойственной задачи (D) нечеткого линейного программирования, такие что [116]

$$\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha)x_j^* = \sum_{i\in M} \tilde{b}_i^R(\alpha)y_i^* \ . \qquad (2.76)$$

Доказательство. Рассмотрим следующую пару задач классического линейного программирования

$$\text{Максимизировать} \quad \sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j ,$$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{aligned} &\sum_{j\in N} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha) x_j \le \tilde{b}_i^R(\alpha), \ i \in M, \\ &x_j \in 0, \ j \in N, \end{aligned} \tag{2.77}$$

и

$$\text{минимизировать} \quad \sum_{i\in M} \tilde{b}_i^R(\alpha) y_i ,$$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{aligned} &\tilde{c}_j^R(\alpha) \le \sum_{i\in M} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha) y_i \ \ j \in N, \\ &y_i \ge 0, i \in M, \end{aligned} \tag{2.78}$$

Очевидно, что задачи линейного программирования (2.77) и (2.78) двойственны друг к другу в обычном смысле. Тогда в соответствии с предположениями обе задачи (2.77) и (2.78) являются допустимыми, и по стандартной теореме двойственности для пары двойственных задач линейного программирования существуют вектор x^*, являющийся допустимым решением задачи (2.77), и вектор y^*, являющийся допустимым решением задачи (2.78), такие что имеет место (2.73). Согласно $x^* \in [\tilde{X}]_\alpha$ и $y^* \in [\tilde{Y}]_{1-\alpha}$ а тогда по Теореме 2.7 вектор x^* является α-эффективным решением прямой задачи (P) нечеткого линейного программирования, а вектор y^* является (1-α)-эффективным решением двойственной задачи (D) нечеткого линейного программирования.

В частности, в случае четких данных Теорема 2.8 является теоремой о сильной двойственности стандартной задачи линейного программирования. Возникает вопрос о возможности модификации доказанных выше теорем на случаи более общих t-норм и t-конорм [116].

2.2.5. Расширенное сложение

До сих пор в (2.33), (2.35) и многих других формулах использовалось сложение нечетких значений с помощью t-нормы *Tм* = min. В данном параграфе исследуется сложение нечетких величин, использующее более общую t-норму *T*. Обозначим для $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{f} = \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n , \tag{2.79}$$

и

$$\tilde{g}_i = \tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{a}_{in}x_n, \tag{2.80}$$

где $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij} \in F(\mathbb{R})$ для всякого $i \in M$, $j \in N$. Расширенное сложение $\tilde{+}_T$ в (2.79) и (2.80) определяется согласно (2.32) и (2.34), соответственно, т.е. на основе принципа расширения. Функции принадлежности для (2.79) и (2.80) могут быть представлены следующим образом:

$$\mu_{\tilde{f}}(t) = \sup\{T(\mu_{\tilde{c}_1}(c_1),\ldots,\mu_{\tilde{c}_n}(c_n)) \mid t = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n\}, \tag{2.81}$$

$$\mu_{\tilde{g}_i}(t) = \sup\{T(\mu_{\tilde{a}_{i1}}(a_{i1}),\ldots,\mu_{\tilde{a}_{in}}(a_{in})) \mid t = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n\}. \tag{2.82}$$

Выписывание явного вида для формул (2.79) и (2.80) или (2.81) и (2.82) может оказаться весьма трудным, однако в некоторых специальных случаях удается вывести для них аналитические выражения.

Для краткости рассмотрим только (2.79), явная формула для (2.80) может быть получена аналогичным образом. Ниже мы выведем специальные формулы для широкого класса коэффициентов задачи нечеткого линейного программирования, порожденных такими функциями.

Пусть Φ, ψ : $(0, +\infty) \to [0,1]$ - невозрастающие, полустрого квазивогнутые и полунепрерывные сверху функции. При заданных γ, $\delta \in (0, +\infty)$ определим функции Φ_γ, $\psi_\delta : (0, +\infty) \to [0,1]$ для $x \in (0, +\infty)$ выражениями

$$\Phi_\gamma(x) = \Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right), \qquad \psi_\delta(x) = \psi\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Пусть $l_j, r_j \in \mathbb{R}$ - таковы, что $l_j \le r_j$, пусть $\gamma, \delta \in (0, +\infty)$, и пусть

$$\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_{\gamma j}, \Phi_{\delta i}), \qquad j \in N$$

обозначают нечеткие интервалы с функциями принадлежности, задаваемыми выражениями

$$\mu_{\tilde{c}_j}(x) = \begin{cases} \Phi_{\gamma j}(l_j - x), & \textit{если} \quad x \in (-\infty, l_j), \\ 1, & \textit{если} \quad x \in [l_j, r_j], \\ \psi_{\delta_i}(x - r_j), & \textit{если} \quad x \in (r_j, +\infty). \end{cases}$$

Следующее предложение показывает, что $\tilde{c}_1x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{c}_nx_n$ является замкнутой нечеткой величиной такого же типа для некоторого частного случая t-норм T. Доказательство получается непосредственной проверкой и потому опускается.

Предложение 2.5. Пусть $\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_\gamma, \Phi_\delta), \qquad j \in N$ - нечеткие величины с функциями принадлежности, задаваемыми посредством (2.83). Для $x = (x_1,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $x_j \geq 0$ для всех $j \in N$ определим множество
индексов

$$I_x = \{ j | x_j > 0,\ j \in N\}.$$

Тогда

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_M} \dots \tilde{+}_{T_M} \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_M}, \psi_{r_M}), \tag{2.84}$$

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_D} \dots \tilde{+}_{T_D} \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_D}, \psi_{r_D}), \tag{2.85}$$

где T_M - минимальная t-норма, T_D - сильное произведение и

$$l = \sum_{j \in I_x} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j \in I_x} r_j x_j,$$

$$l_M = \sum_{j \in I_x} \frac{\gamma_j}{x_j}, \qquad r_M = \sum_{j \in I_x} \frac{\delta_j}{x_j},$$

$$l_D = \max\left\{ \frac{\gamma_j}{x_j} \middle| \ j \in I_x \right\}, \qquad r_D = \max\left\{ \frac{\delta_j}{x_j} \middle| \ j \in I_x \right\}.$$

Если все $\tilde{c}_j$ являются (L,R) - нечеткими интервалами, то можно получить аналогичный и более конкретный результат. Пусть l_j, $r_j \in \mathbb{R}$ таковы, что l_i $r_i \in \mathbb{R}$ пусть $[0,+\infty)$, и пусть L и R - невозрастающие, полустрого квазивогнутые, полунепрерывные сверху функции, отображающие $(0,1]$ в $[0,+\infty)$. Кроме того, предположим, что $L(1) = R(1) = 0$, и определим $L(0) = \lim_{x \to 0} L(x)$ и $R(0) = \lim_{x \to 0} R(x)$. Пусть

$$\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_\gamma, \Phi_\delta), \qquad j \in N$$

являются (L,R) - нечеткими интервалами, задаваемыми функциями принадлежности, определенными для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $j \in N$ выражениями

$$\mu_{\tilde{c}_j}(x) = \begin{cases} L^{(-1)}\left(\dfrac{l_j - x}{\gamma_j}\right), & \textit{если } x \in (l_j - \gamma_j, l_j), \ \gamma_j > 0, \\ 1, & \textit{если } x \in [l_j - r_j], \\ R^{(-1)}\left(\dfrac{x - r_j}{\delta_j}\right), & \textit{если } x \in (r_j, r_j + \delta_j), \ \delta_j > 0, \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

где $L^{(-1)}$, $R^{(-1)}$ - псевдообратные функции *к L и R*, соответственно. Получаем следующий результат [115].

Предложение 2.6. Пусть $\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \gamma_j, \delta_j)_{LR}$, $j \in N$, являются (L,R) - нечеткими интервалами с функциями принадлежности, задаваемыми посредством (2.86), и пусть $x = (x_1,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ для всех $j \in N$ Тогда

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_M} \dots \tilde{+}_{T_M} \tilde{c}_n x_n = (l, r, A_M, B_M)_{LR}, \tag{2.87}$$

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_D} \dots \tilde{+}_{T_D} \tilde{c}_n x_n = (l, r, A_D, B_D)_{LR}, \tag{2.88}$$

где T_M - минимальная *t* - норма, T_D - сильное произведение и

$$l = \sum_{j \in N} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j \in N} r_j x_j,$$

$$A_M = \sum_{j \in N} \gamma_j x_j, \qquad B_M = \sum_{j \in N} \delta_j x_j,$$

$$A_D = \max\{\gamma_j \mid j \in N\}, \qquad B_D = \max\{\delta_j \mid j \in N\}.$$

Результаты (2.85) и (2.88) в Предложениях 2.5 и 2.6, соответственно, могут быть расширены следующим образом [116].

Предложение 2.7. Пусть T- непрерывная архимедова t-норма с аддитивным генератором f. Пусть $\Phi : (0, +\infty) \to [0,1]$ определена для всякого $x \in (0, +\infty)$ как $\Phi(x) = f^{(-1)}(x)$.

Пусть $\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_{\gamma_j}, \Phi_{\delta_j})$, $j \in N$ - замкнутые нечеткие интервалы с функциями принадлежности, задаваемые посредством (2.83), и пусть $x = (x_1,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ для всех $j \in N$, и $I_x = \{ j \mid x_j > 0, \ j \in N \}$.

Тогда

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T \dots \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_D}, \Phi_{r_D}),$$

где

$$l = \sum_{j \in I_x} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j \in I_x} r_j x_j,$$

$$l_D = \max\left\{\frac{\gamma_j}{x_j} \mid j \in I_x\right\}, \qquad r_D = \max\left\{\frac{\delta_j}{x_j} \mid j \in I_x\right\}.$$

Для непрерывной архимедовой t-нормы Г и замкнутого нечеткого интервала $\tilde{c}_j$, удовлетворяющего допущениям Предложения 2.7, легко выводится равенство

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T \dots \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n = \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_D} \dots \tilde{+}_{T_D} \tilde{c}_n x_n.$$

Оно означает, что мы получили ту же самую нечеткую линейную функцию, опираясь на произвольную t-норму T', такую что $T' \leq T$.

Следующее предложение обобщает результат о сложении замкнутых нечетких интервалов, основанном на непрерывных архимедовых t-нормах [115,116].

Предложение 2.8. Пусть T - непрерывная архимедова X-норма с аддитивным генератором. Пусть $K\ [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ - непрерывная выпуклая функция и $K(0) = 0$. Пусть $\alpha \in (0, +\infty)$ и

$$\Phi_\alpha(x) = f^{(-1)}(\alpha K(\frac{x}{\alpha}))$$

для всех $x\in[0,+\infty)$. Пусть $\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \gamma_j, \delta_j, \Phi_{\gamma j}, \Phi_{\delta j}),\quad j \in N$, - нечеткие интервалы с функциями принадлежности, задаваемыми посредством (2.83), и пусть $x = (x_1,\ldots,x_п)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ для всех $j \in N$. Тогда

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_K}, \Phi_{r_K}),$$

где

$$l = \sum_{j\in I_x} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j\in I_x} r_j x_j,$$

$$l_K = \sum_{j\in I_x} \frac{\gamma_j}{x_j}, \qquad r_K = \sum_{j\in I_x} \frac{\delta_j}{x_j}, \tag{2.89}$$

Из Предложения 2.8 можно вывести простое следствие.

Основанная на мулытшикативной t-норме T_p сумма нечетких гауссовских чисел снова является нечетким гауссовским числом. В самом деле, пусть аддитивный генератор f мультипликативной t-нормы T_p задается как $f(x) = \log(x)$, и пусть $K(x) = x^2$. Тогда

$$\Phi_\alpha(x) = f^{(-1)}\left(\alpha K\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

- эта формула получается применением Предложения 2.8.

2.2.6. Специальные модели нечеткого линейного программирования

В этом параграфе исследуются известные из литературы три типа задач нечеткого линейного программирования. Начнем с самой старой версии задач нечеткого линейного программирования, первоначально называвшейся как нечеткая задача программирования (линейного); см. [99-116]]. Позднее (например, [115]), эта задача была названа задачей гибкого линейного программирования.

2.2.6.1. Гибкое линейное программирование

Гибкое линейное программирование - это подход к задачам линейного программирования, который допускает некоторую гибкость (свободу) в целевой функции и ограничениях стандартной задачи линейного программирования (2.29). Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\ \text{при ограничениях} & \begin{array}{l} a_{i1}x_n + \ldots. + a_{in}x_n \le b_i, \;\; i \in M, \\ x_j \ge 0, \;\; j \in N. \end{array} \end{array} \qquad (2.90)$$

Предполагается, что значения параметров c_j, a_{ij} *и* b_i содержат некоторую неопределенность. Допустимые отклонения от цели и ограничений характеризуются неотрицательными числами p_i, $i \in \{0\} \cup M$, субъективно выбранными и введенными в модель (2.90).

Также субъективно задается некоторый допустимый уровень $d_0 \in \mathbb{R}$, полностью удовлетворяющий лицо, принимающее решение, при условии, что значение целевой функции больше или равно заданной величины d_0. С другой стороны, если целевая функция становится меньше, чем $(d_0 – P_0)$, то принимающий решение субъект таким ответом совсем не удовлетворен. В пределах промежутка $(d_0 – P_0, d_0)$ степень удовлетворения лица, принимающего решение, повышается (например, линейно) от 0 до 1. При таких допущениях функция принадлежности $\mu_{\tilde{d}}$ нечеткой цели $\tilde{d}$ определяется следующим образом [115]:

$$\mu_{\tilde{d}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; t \ge d_0, \\ 1 + \dfrac{t - d_0}{p_0}, & \text{если} \; d_0 - p_0 \le t \le d_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad (2.91)$$

Пусть теперь для i-ой функции ограничений в (2.90), $i \in M$, известна такая правая часть $b_i \in \mathbb{R}$, что принимающий решение субъект полностью удовлетворен ситуацией, когда левая часть меньше или равна этому значению. С другой стороны, если целевая функция больше, чем $(b_i + p_i)$, то принимающий решение субъект совсем не удовлетворен. В рамках промежутка (b_i, b_i+p_i) степень удовлетворения убывает (например, линейно) от 1 до 0. При таких допущениях функция принадлежности $\mu_{\tilde{b}_i}$ нечеткой правой части b_i определяется следующим образом:

$$\mu_{\tilde{b}_i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \le b_i, \\ 1 + \dfrac{t - b_i}{p_i}, & \text{если} \quad b_i \le t \le b_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{2.92}$$

Связь между целевой функцией и ограничениями в задаче гибкого линейного программирования симметрична, т. е. между ними нет различия. «Максимизация» понимается как поиск вектора $x \in \mathbb{R}$, такого что степень принадлежности пересечения нечетких множеств (2.91) и (2.91) максимизируется. Эта задача эквивалентна следующей задаче оптимизации [116]:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать} \quad \lambda \\ &\text{при ограничениях} \quad \mu_{\tilde{d}}\left(\sum_{j \in N} c_j x_j\right) \ge \lambda, \\ &\qquad \mu_{\tilde{b}_i}\left(\sum_{j \in N} a_{ij} x_j\right) \ge \lambda, \; i \in M, \\ &\qquad 0 \le \lambda \le 1 \\ &\qquad x_j \ge 0, j \in N. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Задачу (2.93) легко преобразовать к эквивалентной задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать} \quad \lambda \\ &\text{при ограничениях} \quad \sum_{j \in N} c_j x_j \ge d_0 + \lambda p_0, \\ &\qquad \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \le b_i + (1 - \lambda) p_i, \; i \in M, \\ &\qquad 0 \le \lambda \le 1 \\ &\qquad x_j \ge 0, j \in N. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Рассмотрим теперь более специфичную задачу нечеткого линейного программирования :

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать} \quad c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ &\text{при ограничениях} \quad a_{i1} x_n + \ldots . + a_{in} x_n \,\tilde{\le}^T\, \tilde{b}_i, \quad i \in M, \\ &\qquad x_j \ge 0, \;\; j \in N. \end{aligned} \tag{2.95}$$

где c_j, a_{ij} *и* b_i- обычные (четкие) числа, а $\tilde{d}$ и $\tilde{b}_i$ - нечеткие величины, определенные согласно (2.91) и (2.92). Кроме того, «$\tilde{\le}^T$» - некоторое Т- нечеткое расширение обычного отношения неравенства «≤» с нормой *T-min*. Оказывается, что вектор $x \in \mathbb{R}^n$

является оптимальным решением задачи гибкого линейного программирования (2.94) тогда и только тогда, когда он является max-удовлетворяющим решением задачи нечеткого линейного программирования (2.95). Этот результат следует прямо из Предложения 5.32.

2.2.6.2. Интервальное линейное программирование

В этом параграфе мы применим результаты данной главы к специальному случаю задачи нечеткого линейного программирования - задаче интервального линейного программирования. Под задачей интервального линейного программирования мы понимаем следующую задачу нечеткого линейного программирования [115]:

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & \tilde{c}_1 x_1 + \ldots + \tilde{c}_n x_n \\ \text{при ограничениях} & \begin{array}{l} \tilde{a}_{i1} x_n + \ldots. + \tilde{a}_{in} x_n \tilde{R} \tilde{b}_i, \quad i \in M, \\ x_j \geq 0, \ j \in N. \end{array} \end{array} \qquad (2.96)$$

где $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$ *и* $\tilde{b}_i$ полагаются компактными интервалами в $\mathbb{R}$. Иными словами, $\tilde{c}_j = [\underline{c}_j, \overline{c}_j]$, $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ и $\tilde{b}_i = [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, где $\underline{c}_j, \overline{c}_j, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}$ и $\underline{b}_i, \overline{b}_i$ - верхние и нижние границы соответствующих интервалов. Функции принадлежности интервалов $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$ *и* $\tilde{b}_i$ являются характеристическим функциями этих интервалов, т.е. $X_{[\underline{c}_j, \overline{c}_j]}: \mathbb{R} \to [0,1]$, $X_{[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]}: \mathbb{R} \to [0,1]$ и $X_{[\underline{b}_i, \overline{b}_i]}: \mathbb{R} \to [0,1]$, $i \in M$, $j \in N$.

Предположим также, что R - обычное бинарное отношение «≤» а A - $T = min$ и $S = max$. Нечеткое отношение $\tilde{R}$ является нечетким расширением взвешенного отношения «≤». Мы рассмотрим шесть нечетких отношений $\tilde{R}$, являющихся расширениями бинарного отношения «≤» и определенных выражениями (2.19), (2.20) и (2.22)-(2.25), т. е.

$$\tilde{R} \in \{\tilde{\leq}^{\min}, \tilde{\leq}^{\max}, \tilde{\leq}^{T,S}, \tilde{\leq}_{T,S}, \tilde{\leq}^{S,T}, \tilde{\leq}_{S,T}\}.$$

Им соответствуют шесть типов допустимых решений задачи нечеткого линейного программирования (2.96):

(i)

$$X_{\tilde{\leq}^{\min}} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j \leq \overline{b}_i, x_j \geq 0, j \in N \right\}. \qquad (2.97)$$

(ii)

$$X_{\tilde{\geqq}^{\max}} = \left\{ x \in R^n \middle| \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \le \underline{b}_i, x_j \ge 0, j \in N \right\}. \tag{2.98}$$

(iii)

$$X_{\tilde{\geqq}^{T,S}} = X_{\tilde{\leqq}_{T,S}} = \left\{ x \in R^n \middle| \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \le \overline{b}_i,\ x_j \ge 0, j \in N \right\}. \tag{2.99}$$

(iv)

$$X_{\tilde{\geqq}^{T,S}} = X_{\tilde{\leqq}_{T,S}} = \left\{ x \in R^n \middle| \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j \le \underline{b}_i,\ x_j \ge 0, j \in N \right\}. \tag{2.100}$$

Ясно, что допустимые решения (2.97)-(2.100) являются четкими подмножествами $\mathbb{R}^n$. Кроме того, все они суть многогранные множества [116].

Чтобы найти, например, некоторое удовлетворяющее решение задачи интервального линейного программирования (2.96), рассмотрим нечеткую цель $d \in F(\mathbb{R})$ и $\tilde{R}_0$ - нечеткое расширение обычного бинарного отношения «≥», необходимое для сравнения получаемого результата с нечеткой целью.

В следующем предложении мы покажем, что если допустимое решение задачи интервального линейного программирования является четким множеством, то ее max-удовлетворяющее решение совпадает с множеством всех классических оптимальных решений задачи линейного программирования, в которой четкая целевая функция специального вида максимизируется по множеству допустимых решений [115].

Предложение 2.9. Пусть *X* - четкое допустимое решение задачи интервального линейного программирования (2.96). Пусть $d \in F(\mathbb{R})$ - нечеткая цель с функцией принадлежности $\mu_{\bar{d}}$, удовлетворяющей условиям (2.53). Пусть G_A - $G = T = min$ и S = max. Тогда

(i) Если Ho есть отношение $\tilde{\geq}^{\max}$, то множество всех *max* - удовлетворяющих решений задачи интервального линейного программирования (2.96) совпадает с множеством всех оптимальных решений задачи

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j \\ \text{при ограничении} & x \in X; \end{array} \tag{2.101}$$

(ii) Если $\tilde{R}_0$ есть отношение «^», то множество всех *max* - удовлетворяющих решений задачи интервального линейного программирования (2.96) совпадает с множеством всех оптимальных решений задачи

максимизировать $\sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j$,

при ограничении x ∈ X.

Доказательство. Утверждение (i). Пусть $x \in X$ - *max*-удовлетворяющее решение задачи интервального линейного программирования (2.96), и $\underline{c} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j$, $\bar{c} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j$. Наши допущения дают

$$\mu_{\tilde{\geqq}^T}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}) = \sup\left\{\min\left\{\mu_{\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n}(u),\ \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\} u \geq \upsilon\right\} =$$
$$\sup\left\{\min\left\{X_{[\underline{c},\, \bar{c}]}(u),\ \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\} u \geq \upsilon\right\} = \mu_{\tilde{d}}(\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j).$$

Следовательно, *x* есть оптимальное решение для (2.101). Наоборот, если $x \in X$ - оптимальное решение для (2.101), то по Определению 2.6 и в силу (2.53) *x* есть *max*-удовлетворяющее решение задачи (2.96).

(ii) Аналогично доказательству пункта (i) имеем

$$\mu_{\tilde{\geqq}^T}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}) = \inf\left\{\max\left\{1 - \mu_{\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n}(u), 1 - \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\} u \geq \upsilon\right\} =$$
$$\inf\left\{\max\left\{X_{[\underline{c},\, \bar{c}]}(u),\ \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\} u \leq \upsilon\right\} = \mu_{\tilde{d}}(\sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j).$$

Доказательство данного пункта завершается с помощью тех же доводов, что и при доказательстве (i).

Несколькие замечания относительно двойственности задач интервального линейного программирования.

Пусть прямая задача интервального линейного программирования (P) является задачей (2.96) при нечетком отношении $\tilde{R}$ вида «$\tilde{\leqq}^{\min}$», т. е. имеет место (2.65). Тогда двойственная задача интервального линейного программирования (D) является задачей (2.66). Ясно, что допустимое решение $X_{\tilde{\geqq}^{\min}}$ задачи (P) определяется посредством (2.97), а допустимое решение $Y_{\tilde{\geqq}^{\max}}$ двойственной задачи (D) может быть получено из (2.98) как

$$Y_{\tilde{\geqq}^{\max}} = \left\{ y \in R^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \underline{a}_{ij} y_i \geq \bar{c}_j,\ y_i \geq 0, i \in M \right\}.$$

Заметим, что задачи

максимизировать $\sum_{i=1}^{n} \overline{c}_j x_j$,

при ограничении $x \in X_{\tilde{\geqq}\min}$,

минимизировать $\sum_{i=1}^{m} \overline{b}_i y_i$,

при ограничении $y \in Y_{\tilde{\geqq}\max}$

являются двойственными друг к другу в обычном смысле тогда и только тогда, когда $\underline{c}_j = \overline{c}_j$, и $\underline{b}_i = \overline{b}_i$ для всех $i \in M$, и $j \in N$.

2.2.6.3. Задачи нечеткого линейного программирования с центрированными параметрами

Интересный класс задач нечеткого линейного программирования получается в случае, когда параметры задачи являются так называемыми *B* - нечеткими интервалами [115,116].

Определение 2.5. Нечеткое множество *A*, заданное функцией принадлежности μ_A: $\mathbb{R} \to [0, 1]$, называется генератором в $\mathbb{R}$, если

(i) $0 \in$ Core (A)

(ii) μ_A является квазивогнутой на $\mathbb{R}$.

Заметим, что каждое порождающее нечеткое множество является специальным нечетким интервалом *A,* который удовлетворяет (i).

Определение 2.6. Множество *B* всех генераторов в $\mathbb{R}$ называется базисом генераторов в $\mathbb{R}$, если

(i) $X_{\{0\}} \in B$, $X_{\mathbb{R}} \in B$

(ii) если $f, g \in B$, *то* $\max\{f, g\} \in B$ *и* $\min\{f, g\} \in B$.

Определение 2.7. Пусть *B* является базисом генераторов в $\mathbb{R}$.. Нечеткое множество *A*, задаваемой функцией принадлежности μ_A: $\mathbb{R} \to [0,1]$, называется *B* - нечетким интервалом, если существуют $a_A \in \mathbb{R}$. *и* $g_A \in B$, такие что для каждого $x \in \mathbb{R}$.

Множество всех *B* - нечетких интервалов обозначается $F_B(\mathbb{R})$. Любой интервал $A \in$ F($\mathbb{R}$) (представляется парой (a_A, g_A), и мы записываем это как $A = (a_A, g_A)$. На $F_B(\mathbb{R})$ отношение порядка «$\leq_B$» определяется следующим образом: для $A,B \in F_B(\mathbb{R})$, $A = (a_A, g_A)$ и $B = (a_A, g_A)$ пишем $A \leq_B B$ тогда и только тогда, когда

$$(a_A < a_B) \text{ или } (a_A = a_B \text{ и } g_A \leq g_B). \qquad (2.102)$$

Заметим, что отношение *«^в»* есть лишь частичное упорядочение на $F_B(\mathbb{R})$. Следующее предложение является простым следствием Определения 5.6.

Предложение 2.10. Пара *{B,* $\le$), где *B* - базис генераторов и отношение « $\le$ » - поточечное упорядочение функций, является решеткой с максимальным элементом $x_{\mathbb{R}}$. и минимальным элементом $X\{0\}$.

Предложение 2.11. Следующие множества функций формируют базисы генераторов в R:

(i) $B_D = \{X_{\{o\}}, X_{\mathbb{R}}\}$ - дискретный базис;

(ii) (ii) $B_I = \{X_{[a,\ b]} \mid -\infty \le a \le b \le +\infty\}$ - интервальный базис;

(iii) $B_G = \{\mu_d \mid \mu_d(x) = g^{(-1)}(|x|/d), x \in \mathbb{R}, \mathrm{d} > 0\} \cup \{X_{\{0\}}, X_{\mathbb{R}}\}$,

где g : (0,1] $\to$ [0, + ∞) - невозрастающая функция, отличная от константы, $g(1) = 0$ и $g(0) = lim_{x\to 0}\, g(x)$. Очевидно, что поточечное отношение « $\le$ » между значениями функций является линейным упорядочением на B_G.

Предложение 2.12. Пусть $F_{B_G}(\mathbb{R})$ - множество всех B_G - нечетких интервалов, где *BQ* является базисом из предложения 2.11. Тогда отношение «^g$_G$» является отношением линейного порядка на $F_{B_G}(\mathbb{R})$.

Можно расширить этот результат следующим образом. Пусть *B* - базис генераторов множеств, а «$\le_{B_G}$» - частичное упорядочение на множестве $F_{B_G}(\mathbb{R})$, заданное согласно (2.102) в Определении 2.7. Если *B* линейно упорядочивается отношением «$\subseteq$», то $F_{B_G}(\mathbb{R})$ линейно упорядочивается отношением «$\le_{B_G}$». Отсюда вытекает, что каждый нечеткий вектор $\tilde{c} \in F_{B_G}(\mathbb{R})$ может быть единственным образом представлен парой (c, μ), где $c \in$ R и $\mu \in B$, так что

$$\mu_{\tilde{c}}(t) = \mu(c - t).$$

Следовательно, можно написать $\tilde{c} = \mu(c, \mu)$.

Пусть «о» является арифметической операцией сложения или умножения на $\mathbb{R}$, а «*» — операцией min или max на *B*. Введем на множестве .FB(R) следующие операции:

$$(a, f)\ o *(b, g) = (a\ o\ b, f * g) \tag{2.103}$$

для всех (a, f) и $(b,g) \in F_B(\mathbb{R})$. Очевидно, что пары операций $(+^{(\min)}, \cdot^{(\max)})$] $(+^{(\min)}, \cdot^{(\max)})$, $(+^{(\max)}, \cdot^{(\min)})$ и $(+^{(\max)}, \cdot^{(\max)})$ дистрибутивны. О других свойствах этих операций см. в [78].

Рассмотрим теперь B-нечеткие интервалы $\tilde{c}_j = (c_j, f_j)$, $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, g_{ij})$ $\tilde{b}_i = (b_i, h_i)$, где $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}, b_i \in F_B(\mathbb{R})$, $i \in M, j \in N$.

Пусть «◊» и «*» -операции *min* или *max* на *B*. Рассмотрим следующую задачу оптимизации

максимизировать $\tilde{c}_1 \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{c}_n \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n$

при ограничениях $\tilde{a}_{i1} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{a}_{in} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n \le_B \tilde{b}_i$, $i \in M$,

$$\tilde{x}_j \ge_B \tilde{0}, \ j \in N. \qquad (2.104)$$

В (2.104) максимизация выполняется относительно упорядочения «$\le_B$». Кроме того, $\tilde{x}_j = (x_j, \xi_j)$, где $x_j \in \mathbb{R}$, $\xi_j \in B$ и $\tilde{0} = (0, X_{\{0\}})$. Неравенства $x_j \ge_B \tilde{0}, j \in N$, эквивалентны неравенствам $x_j \ge 0$, j $\in N$ Определим допустимые и оптимальные решения этой задачи.

Допустимым решением задачи (2.104) является вектор

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)^T \in F_B(\mathbb{R}) \times F_B(\mathbb{R}) \times \ldots \times F_B(\mathbb{R}),$$

удовлетворяющий ограничениям

$$\tilde{a}_{i1} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{a}_{in} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n \le_B \tilde{b}_i, \ i \in M,$$

$$\tilde{x}_j \ge_B \tilde{0}, \ j \in N.$$

Множество всех допустимых решений задачи (2.104) обозначим как X_B. Оптимальным решением задачи (2.104) является вектор

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, ..., \tilde{x}_n^*)^T \in F_B(\mathbb{R}) \times F_B(\mathbb{R}) \times \ldots \times F_B(\mathbb{R}),$$

такой, что вектор

$$\tilde{z}^* = \tilde{c}_1 \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1^* +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{c}_n \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n^*$$

есть максимальный элемент множества

$$X_B^* = \{\tilde{z} \,|\, \tilde{z}\, \tilde{c}_1 \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{c}_n \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n, (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)^T \in X_B \}$$

по отношению к порядку «$\le_B$».

Для каждой из четырех комбинаций операторов *min* и *max* в операциях «$\cdot^{\Diamond}$» и «$+^{*}$» задача (2.104) является некоторой специальной задачей оптимизации. Можно легко вывести следующий результат.

Предложение 2.13. Пусть *B* - линейно упорядоченный базис генераторов. Пусть $(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, ..., \tilde{x}_n^*)^T \in F_B(\mathbb{R})$ - оптимальное решение задачи (2.104), где $\tilde{x}_j^* = (x_j^*, \tilde{\xi}_j^*)$, $j \in N$. Тогда вектор $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$ является оптимальным решением следующей задачи линейного программирования [115]:

максимизировать $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$,

при ограничениях $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i$, , $i \in M$, $x_j \ge 0$, $j \in N$. (2.105)

Обозначим символом A_x множество индексов всех активных ограничений в (2.105) в точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е.

$$A_x = \{i \in M \mid a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\}.$$

Следующее предложение дает необходимое условие существования допустимого решения задачи (2.104)..

Предложение 2.14. Пусть B - линейно упорядоченный базис генераторов. Пусть $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T \in X_B(\mathbb{R})$ - допустимое решение задачи (2.104), где $\tilde{x}_j = (x_j, \tilde{\xi}_j)$, $j \in N$. Тогда вектор $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ является допустимым решением задачи линейного программирования (2.105) и имеют место следующие соотношения:

(i) *если* $\lozenge = max$ *и* $* = min$, *то*

$min\{a_{ij} \mid j \in N\} \leq_B b_i$ *для всех* $i \in A_x$;

(iv) *если* $\lozenge = max$ *и* $* = max$, *то*

$\max\{a_{ij} \mid j \in N\} \leq_B b_i$ *для всех* $i \in A_x$.

Отметим, что в этом параграфе был представлен альтернативный подход к решению задач нечеткого линейного программирования. По сравнению с подходом, рассмотренным ранее, переменные x_j не предполагались неотрицательными. Они рассматривались как нечеткие интервалы того же типа, что и соответствующие коэффициенты задачи нечеткого линейного программирования. С вычислительной точки зрения характерной чертой этого подхода является простота, так как он требует решения только задачи классического линейного программирования.

2.3.Возможностная регуляризация задач линейного программирования

В математическом программировании исследуется особый класс задач, которые являются неустойчивыми. Для их решения разработаны различные методы регуляризации, достаточно полно представленные, например [3]. В данной работе предлагается новые метод регуляризации задач линейного программирования основанные на «погружении» исходной неустойчивой задачи в задачу возможностной оптимизации. Связь между устойчивостью задач линейного программирования и задач нечеткой оптимизации устанавливалась и ранее. Например, в работе [4] в контексте регуляризации рассматривалась идея сглаживания прямоугольных или острых нечетких чисел симметричными трапециевидными или триангулярными величинами. Более общие результаты, определяющие условия устойчивости задач возможностного программирования, получены в [5-8]. Рассматриваемый в работе метод регуляризации использует идею расширения множества решений и позволяет в рамках возможностного подхода учитывать значения меры допустимости решений, основываясь на априорных экспертных оценках.

2.3.1. Базовые понятия теории возможностей

Приводимый далее необходимый математический аппарат теории возможностей основан на результатах [114].

Пусть *Г* – обычное (четкое) множество элементов, обозначаемых далее через $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ - класс всех подмножеств Г.

Определение 2.8. Мерой возможности называется функция множеств

$$\pi : P(\Gamma) \to [0,1],$$

обладающая свойствами

$$1)\ \pi\{\varnothing\}=0,\ \pi\{\Gamma\}=1,$$

$$2)\ \pi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sup_{i\in I} \pi\{A_i\},$$

для любого индексного множество *I* и множеств $A_i \in P(\Gamma)$.

Определение 2.9. Мерой необходимости называется функция множеств

$$\nu : P(\Gamma) \to [0,1]$$

обладающая свойствами

$$1)\ \nu\{\varnothing\}=0,\ \nu\{\Gamma\}=1,$$

$$2)\ \nu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \inf_{i\in I} \nu\{A_i\},$$

для любого индексного множества *I* u множеств $A_i \in P(\Gamma)$.

Следующее важное свойство выражает отношение двойственности между мерами необходимости и возможности

$$\nu\{A\} = 1 - \pi\{\bar{A}\},$$

где $\bar{A}$ - дополнение *A* в *P(Г)*.

Определение 2.10. Возможностная величина – отображение $Z : \Gamma \to E^1$, априорные возможные значения которого ограничены функцией $\mu_Z : E^1 \to [0,1]$, называемой распределением возможностей величины *Z*

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma | Z(\gamma) = z\} \quad \forall z \in E^1;$$

$\mu_Z(z)$ – «возможность того, что величина Z может принять значение z». Здесь и далее E^1, E^n – евклидовы пространства соответствующей размерности [114].

Определение 2.11. Действительное число m называется модальным значением возможностной величины Z, если $\mu_Z(m)=1$.

Определение 2.12. Носитель возможностной величины Z-множество

$$\sup p(Z) = \{z \in E^1 | \mu_Z(z) > 0\}.$$

Определение 2.13. Множеством α - уровня возможностной величины Z называется множество

$$[Z]^\alpha = [\underline{Z}(\alpha), \overline{Z}(\alpha)] = \{z \in E^1 | \mu_Z(z) \geq \alpha\}.$$

$$\alpha \in (0,1]$$

В дальнейшем будем предполагать, что $[Z]^0 = cl(supp(Z))$ есть компакт [114].

Определение 2.14. Возможностная величина Z называется выкуплой, если ее функция распределения является квазивогнутой

$$\mu_Z(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \geq \min\{\mu_Z(z_1), \mu_Z(z_2)\}$$

$$\forall z_1, z_2 \in E^1, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Пусть $Z_1,\ldots,Z_n$ – возможностные величины. Функция распределения совокупности возможностных величин определятся следующим образом:

$$\mu_{Z_1,\ldots,Z_n}(z_1,\ldots,z_n) = \pi(\gamma \in \Gamma | Z_1(\gamma) = z_1,\ldots,Z_n(\gamma) = z_n),$$

$$(z_1,\ldots,z_n) \in E^n$$

Определение 2.15. Возможностные величины $Z_1,\ldots, Z_n$ называются минисвязанными, если для любого подмножество $\{i_1,\ldots,i_k\}$ множества $\{1,\ldots,n\}$

$$\mu_{Z_{i_1},\ldots,Z_{i_k}}(z_1,\ldots,z_k) = \min\{\mu_{Z_{i_1}}(z_1),\ldots,\mu_{Z_{i_k}}(z_k)\}, \quad \forall (z_1,\ldots,z_k) \in E^n.$$

Здесь $\mu_{Z_{i_s}}$ - одномерные функции распределения возможностей.

Пусть Z_1, Z_2 - возможностные величины R – отношение, заданное на $E^1 \times E^1$. Возможность того, что Z_1 находится в отношении R к Z_2 есть

$$\pi\{R(Z_1, Z_2)\} = \pi\{\gamma \in \Gamma | R(Z_1(\gamma), Z_2(\gamma))\}.$$

Множество всех возможностных величин, характеризующихся квазивогнутыми функциями распределения, имеющих компактные носители и замкнутые множества α-уровня, $\forall\alpha\in(0,1]$, обозначим через $\Im(E^1)$. Следуя [12], определим метрику в множестве $\Im(E^1)$

$$d(Z_1, Z_2) = \sup_{0\le\alpha\le 1} d_H([Z_1]^\alpha, [Z_2]^\alpha),$$

где $d_H(A,B)=max[\Delta(A,B),\Delta(B,A)]$ – метрика Хаусдорфа, $\Delta(A,B)=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\ \ \Delta(B,A)=\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|$ - полуметрики.

Пусть $\Im_c(E^1) \subseteq \Im(E^1)$ есть подмножество возможностных величин с непрерывными распределениями. Определим равномерную метрику в $\Im_c(E^1)$

$$c(Z_1, Z_2) = \sup_{t\in E^1}\left|\mu_{z_1}(t) - \mu_{z_2}(t)\right|.$$

Для любого $Z\in\Im_c(E^1)$ и $\theta\ge 0$ определим вспомогательную характеристику $\omega(Z;\theta)$, называемую модулем непрерывности Z

$$\omega(Z_1;\theta) = \sup_{|t'-t''|\in\theta}\left|\mu_z(t') - \mu_z(t'')\right|.$$

В дальнейшем нам также понадобится следующая характеристика

$$\Omega(Z_1;\theta) = \inf_{\substack{|t'-t''|\ge\theta \\ t',t''\in[Z]^0\setminus\{Z\}^1}}\left|\mu_z(t') - \mu_z(t'')\right|$$

Пусть $\Im_s(E^1) \subseteq \Im_c(E^1)$ есть подмножество возможностных переменных Z с распределениями, строго монотонными на интервалах $(\underline{Z}(0),\underline{Z}(1))$ и $(\overline{Z}(1),\overline{Z}(0))$ [1-5].

Лемма 2.1. [1]. Пусть $\{Z_n | n=1,2,....,\}$- последовательность возможностных переменных из $\Im_s(E^1)$, $Z\in\Im_s(E^1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} d(Z,Z_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} c(Z,Z_n) = 0.$$

Лемма 2.2. [2]. Пусть $\{Z_n | n=1,2,....,\}$- последовательность возможностных переменных из $\Im_c(E^1)$, $Z\in\Im_c(E^1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} d(Z,Z_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} c(Z,Z_n) = 0.$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. условие строгой монотонности является необходимым.

Лемма 2.3. [3]. Пусть Z_1, $Z_2\in\Im_c(E^1)$, $d(Z_1, Z_2) \le \varepsilon$. Тогда

$$c(Z_1, Z_2) \le \max\{\,\omega(Z_1;\varepsilon),\ \omega(Z_2,\varepsilon)\}.$$

Лемма 2.4. [3]. Пусть Z_1, $Z_2\in\Im_s(E^1)$. Тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого $\varepsilon\le\varepsilon_0$ условие $d(Z_1, Z_2) \le \varepsilon$ влечет.

$$c(Z_1, Z_2) \ge \min\{\,\Omega(Z_1;\varepsilon),\ \Omega(Z_2;\varepsilon)\}.$$

Рассмотрим специальные подмножества множества $\Im_s(E^1)$, представляющие семейства возможностных величин, в которых можно производить исчисление на параметрическом уровне. Эти семейства замкнуты относительно операций сложения и умножения на скаляр. С помощью этих семейств и соответствующих распределений можно моделировать практически все возможные множества значений параметров нечетких систем.

Определение 2.16. Возможностная величина $Z{:}\Gamma \to E^1$ называется нормальной, если ее распределение определяется следующим образом:

$$\mu_z(z) = \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{b^2}\right), \quad -\infty < z < +\infty .$$

Здесь a и b – соответственно модальное значение и коэффициент нечеткости. Так как эти значения однозначно характеризуют величину Z, будем далее использовать обозначение $Z=N(a,b)$, а все множество возможностных величин, определяющихся нормальными распределениями, обозначим через $\mathfrak{I}_N(E^1)$ [114].

Определение 2.17. Возможностная величина $Z{:}\Gamma \to E^1$ называется триангулярной, если ее функция распределения возможностей имеет следующий вид:

$$\mu_z(z) = \max\{0, \min\{1 - C_z(z-a), 1 + C_z(z-a)\}\}.$$

Здесь $a, b=2/C_z$ – соответственно модальное значение и коэффициент нечеткости; $Z=TR(a,b)$, $\mathfrak{I}_{TR}(E^1)$.

Нормальное и триангулярное распределения возможностей моделируют множества действительных чисел, «приблизительно равных a». Нечеткие величины, принадлежащие нормальному или триангулярному семействам, полностью определяются парой своих параметров (a,b). Для параметризованных величин данных семейств может быт доказана следующая теорема.

Теорема 2.9. [114] Пусть Z_1, Z_2 – нормальные (триангулярные) минисвязанные величины с параметрами (a_1,b_1), (a_2,b_2). Тогда $Z = Z_1 + Z_2$ – нормальная (триангулярная) величина с параметрами (a_1+a_2), $(b_1,+b_2)$.

Теорема 2.10. [115] Пусть $Z_1, \ldots, Z_n$ – нормальные (триангулярные) минисвязанные величины с параметрами $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)$ соответственно, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – скаляры, тогда

$$Z = \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i Z_i$$

-нормальная (триангулярные) возможностная величина с параметрами

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i , \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| b_i \ .$$

2.3.2. Модели задач возможностной оптизации и критерии их устойчивости

Выделим базовые постановки задач возможностного линейного программирования, построенные на основе моделей критериев и ограничений [114-116], определяющих степень достижения цели и степень выполнения ограничений через меры неопределенности.

Пусть $a_{ij}(\gamma),b_{ij}(\gamma)$ – минисвязанные возможностные величины, определенные на возможностом пространстве $(\Gamma, P(\Gamma),\pi)$, σ_0 – мера π или мера ν, R_0 – отношение на $E^1{\times}E^1$, $\alpha_i\in(0,1]$ - уровни возможности, $X=\{x\in E^n / x_1, \ldots, x_n\geq 0\}$ - множество альтернатив,

$$f_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma) \, .$$

Мобильная проблема

$$M[f_0(x,\gamma)] \to \max \ ,$$

$$\begin{cases} M[f_i(x,\gamma)] = 0, \ i = 1,..,m, \\ x \in X, \end{cases}$$

где M – оператор перехода к модальным значениям соответствующих возможностных функций.

Проблема максимизации уровня при построчных ограничениях по возможности

$$k \to \max \ ,$$

$$\begin{cases} \pi\{f_0(x,\gamma) = k\} \geq \alpha_0, \\ \pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} \geq \alpha_i, \quad i = 1,\ldots,m, \\ x \in X. \end{cases}$$

В рамках интервального анализа данную проблему можно интерпретировать как максимаксную модель принятия решения, соответствующую оптимальное решение нечеткой целевой функции с возможностью не ниже заданной.

В приведенных выше моделях

$$f_0(x,\gamma)=\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\gamma)x_j \ .$$

Проблема максимизации меры достижения цели при построчных ограничениях по возможности

$$\sigma_0\{f_0(x,\gamma)\,R_0\,0\}\to \max,$$

$$\begin{cases}\pi\{f_i(x,\gamma)=0\}\geq \alpha_i, \quad i=1,....,m,\\ x\in X.\end{cases}$$

Здесь

$$f_0(x,\gamma)=\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\gamma)x_j - b_0(\gamma)\,.$$

Данная модель позволяет определить максимальную возможность или необходимость достижения нечеткой цели.

Определим понятие устойчивости для рассматривоемого круга задач [6]. Пусть $\Re$ - оптимальное значение целевого функционала (результат решения) задачи, содержащей возможностные параметры $a_1(\gamma)$, …, $a_p(\gamma)$, $\Re$ - достигается на множестве $X_0 \subseteq X$, $\Re^{\varepsilon}$ - результат решения этой задачи с параметрами $a^{\varepsilon}(\gamma)$, ..., $a^{\varepsilon}(\gamma)$, $\Re^{\varepsilon}$ - результат решения этой задачи с параметрами $a_1^{\varepsilon}(\gamma),..,a_p^{\varepsilon}(\gamma)$ таким, что

$$\max_{i=1,..,p} d(a_i(\gamma),a_i^{\varepsilon}(\gamma))\leq\varepsilon\,, \tag{2.106}$$

где $\varepsilon\in E^1$, $\varepsilon>0$, $\Re^{\varepsilon}$ достигается на множестве $X^{\varepsilon}_0 \subseteq X$.

Определение 2.18. [116] Задаче возможностной оптимизации является устойчивой по результату, если

$$(\forall\delta>0)(\exists\varepsilon_0>0)(\forall\varepsilon>0)\max_{i=1,...,p} d(a_i(\gamma),a_i^{\varepsilon}(\gamma))\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0\Rightarrow\Delta\left|\Re-\Re^{\varepsilon}\right|\leq\delta\,.$$

Определение 2.19. [``6] Задаче возможностной оптимизации является устойчивой по решению, если

$$(\forall\delta>0)(\exists\varepsilon_0>0)(\forall\varepsilon>0)\max_{i=1,...,p} d(a_i(\gamma),a_i^{\varepsilon}(\gamma))\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0\Rightarrow\Delta(X_0^{\varepsilon},X_0)\leq\delta\,.$$

2.3.3. Основные результаты

Прежде чем сформулировать основные результаты работы, рассмотрим на примерах ряд основополагающих идей и методов, связанных с устойчивостью и регуляризацией.

Пусть $X=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1,x_2\in E^1; 0\leq x_1,x_2\leq 1\}$.

Пример 2.4. Рассмотрим задачу

$$f(x)=x_1+x_2\to\max \tag{2.107}$$

на множестве D $\subseteq$ X, определяемом системой ограничений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \qquad (2.108)$$

Нетрудно проверить, что результат $\Re = \max\limits_{x \in D} f(x) = 2$ достигается в точке x=(1,1). Предположим, что имеет место возмущение исходных параметров данной задачи, вследствие которого оптимальное значение целевой функции (3.1) вычисляется на множестве $D^\varepsilon \subseteq X$, $D^\varepsilon \neq D$. Рассмотрим несколько случаев.

I) Пусть D^ε задается системой вида

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -\varepsilon, \\ x_1 - x_2 = \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $\Re = \max\limits_{x \in D^\varepsilon} f(x) = 2 - \varepsilon$ в точке $\bar{x}^\varepsilon = (1, 1-\varepsilon)$. Очевидно $\Re^\varepsilon \to \Re$, $\bar{x}^\varepsilon \to \bar{x}$ при $\varepsilon \to 0+$, что свидетельствует об устойчивости задачи при возмущениях рассматриваемого характера как по результату, так и по решению.

II) Пусть D^ε определяется системой

$$\begin{cases} -x_1 + (1+\varepsilon)x_2 = 0, \\ (1+\varepsilon)x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

В этом случае при любом $\varepsilon > 0$ значение $\Re^\varepsilon = 0$ достигается в точке $\bar{x}^\varepsilon = (0,0)$ и соответственно $\Re^\varepsilon \not\to \Re$, $\bar{x}^\varepsilon \not\to x$ при $\varepsilon \to 0+$.

III) Если D^ε задается системой вида

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -\varepsilon, \\ x_1 - x_2 = \varepsilon. \end{cases}$$

то при любом $\varepsilon > 0$ D^ε - пустое множество и оптимальное значение $\Re^\varepsilon$ не определено.

Таким образом, можно говорить о том, что в общем случае задаче (2.107), (2.108) является неустойчивой и по решению, и по результату.

Пример 2.5. Посмотрим аналог задачи (2.107), (2.108) для оптимизации в условиях нечеткости. Будем использовать систему построчных ограничений по возможности. Исходные параметры будем моделировать нормальными распределениями. Тогда мы перейдем к возможностной постановке задачи, состоящей в оптимизации целевой функции (2.107) на множестве D, определяемом системой

$$\begin{cases} \pi\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha, \\ \pi\{a_{21}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha, \end{cases} \tag{2.109}$$

где параметры a_{12}, a_{21}=N(1, b), a_{11}, a_{22}=N(-1, b). Зафиксируем уровень возможности α и коэффициент нечеткости b. Рассмотрим $f_i(x,\gamma) = a_{i1}(\gamma)x_1 + a_{i2}(\gamma)x_2$, i=1,2. По теореме 2.10 $f_1(x,\gamma) = N(-x_1 + x_2,\ b(x_1 + x_2))$ $f_2(x,\gamma) = N(x_1 - x_2, b(x_1 + x_2))$.

По определению возможностной величины

$$\pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} = \mu_{f_i(x,\gamma)}(0) = \exp\left(-\frac{1}{b^2}\frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2}\right).$$

Тогда распределение возможностей принадлежности точек $x \in X$ множеству допустимых решений D имеет вид

$$\mu_D(x) = \min_i\{\mu_{f_i(x,\gamma)}(0)\} = \exp\left(-\frac{1}{b^2}\frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2}\right).$$

Нетрудно показать что решением данной задачи, как и задачи (2.107), (2.108), является точка $\bar{x}$=(1,1), в которой целевой функционал достигает своего значения $\Re$=2 с уровнем возможности, равным 1.

Зададим возмущения исходных нечетких параметров. Для простоты предполагаем наличие флуктуаций только в модальных значениях соответствующих возможностных параметров. Тогда вместо задачи (2.107), (2.108)получим задачу оптимизации (2.107) на множестве D^{ε}

$$\begin{cases} \pi\{a_{11}(\gamma)x_1 + a^{\varepsilon}_{12}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha, \\ \pi\{a^{\varepsilon}_{21}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha, \end{cases}$$

где $a^{\varepsilon}_{12}, a^{\varepsilon}_{21} = N(1+\varepsilon, b),\ a_{11}, a_{22} = N(-1, b)$. Очевидно, что условие (2.106) выполнено. В этом случае распределение возможностей принадлежности точек $x \in X$ множеству допустимых решений D^{ε} имеет вид.

$$\mu_{D^{\varepsilon}}(x) = \min_i\{\mu_{f_i^{\varepsilon}(x,\gamma)}(0)\} = \exp\left(-\frac{((1+\varepsilon)\max\{x_1, x_2\} - \min\{x_1, x_2\}^2}{b^2(x_1 + x_2)^2}\right).$$

Нетрудно видеть, что увеличение возмущения параметров ограничений понижает возможность принадлежности точек $x \in X$ множеству D^{ε}. При ε=0 результат $\Re^0$ = 2 достигается в точке (1,1) с возможностью 1. Обозначим через ε_0 величину возмущения, при котором $\Re^{\varepsilon} = 2$ с возможностью, равной α, $\varepsilon_0 = 2b\sqrt{-\ln\alpha}$. Тогда при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ точкой оптимальности будет точка (1,1), в которой $\Re^{\varepsilon} = 2$ с возможностью $\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4b^2}\right) \ge \alpha$. При $\varepsilon > \varepsilon_0$ множеств $D^{\varepsilon} = \varnothing$ и $\Re^{\varepsilon}$ не определено. Таким образом, при достаточно малых ε точка $\overline{x}^{\varepsilon}$ совпадает с точкой $\overline{x}$ и $\Re^{\varepsilon}=\Re$, т.е. при малых возмущениях задача возможностой оптимизации в отличие от исходной задачи линейного программирования не «теряет» оптимального решения Это решение становится лишь менее возможным, причем данная зависимость непрерывна, что позволяет говорить о выполнение свойства сильной устойчивости в рассматриваемой задаче.

Данная ситуация соответствует случаю II примера 2.4. Аналогичным образом можно показать, что построенная возможностная модель является устойчивой и в случаях I, III. Это позволяет сделать вывод о более слабых условиях, гарантирующих устойчивое поведение задач возможностной оптимизации в сравнении с задачами классического математического программирования, и о предпочтительности таких постановок задач для практического использования в том смысле, что формализуемую ими информацию о неопределенности можно трактовать также как априорные предположения о характере возмущений. Хотя возможностные аналоги в общем случае являются задачами нелинейного программирования, применением так называемых непрямых методов возможностной оптимизации [115], суть которых состоит в построении эквивалентных детерминированных аналогов рассматриваемых в данной работе моделей, можно перейти к четким корректным постановкам исходно неустойчивых задач линейного программирования, оставаясь в классе линейных задач. Это расширяет сферу применения моделей возможностной оптимизации, позволяя с определенной точки зрения рассматривать реализуемые ими принципы принятия решений (в соответствующих классах распределений) как методы регуляризации детерминированных оптимизационных задач, основанные на аппарате теории возможностей, предоставляющем методологию использования информации экспертов относительно задания исходных параметров относительно задания исходных параметров. Дополнительные параметры интерпретируются при этом как параметры регуляризации. В нашем примере это пара α, b. Коэффициент нечеткости b, характеризующий степень размытости исходных параметров, при таком подходе будет определяться предполагаемой величиной возмущения, причем так как каждому параметру может соответствовать свой коэффициент нечеткости, можно таким образом учитывать индивидуальное влияние параметров системы на ее устойчивость. Уровень α ограничивает степень отклонения по возможности оптимального решения возмущенной и исходной задач.

В предыдущих работах авторов [116-118] доказан характерные для линейного программирования факт эквивалентности определений устойчивости по решению и по функционалу, показана устойчивость базовых моделей критериев и неустойчивость в общем случае модели линейных построчных ограничений, связанная с вырождением множество допустимых решений этой модели вследствие падения уровня возможности выполнения хотя бы одного из возмущенных ограничений ниже порогового значения.

Следующий пример иллюстрирует связь величины возмущения и значения уровня, приводящую к неустойчивому поведению системы при «неудачном» выборе затребованной возможности.

Пример 2.6. Рассмотрим задачу

$$x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} \pi\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}^{\varepsilon}(\gamma)x_2 = \delta\} \ge \alpha, \\ \pi\{a_{21}^{\varepsilon}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 = \delta\} \ge \alpha, \end{cases} \tag{2.110}$$

где параметры $a_{12}^{\varepsilon}, a_{21}^{\varepsilon} = N(1+\varepsilon, b),\ a_{11}, a_{22} = N(-1, b)$ δ - положительная постоянная. Распределение возможностей принадлежности точек $x \in X$ множеству допустимых решений D^{ε} имеет вид

$$\mu_{D^{\varepsilon}}(x) = \exp\left(-\frac{(\delta + (1+\varepsilon)\max\{x_1, x_2\} - \min\{x_1, x_2\})^2}{b^2 (x_1 + x_2)^2} \right).$$

Пусть α будет такое, что $2b\sqrt{-\ln \alpha} = \delta$. В этом случае при $\varepsilon=0$ задаче имеет решение $\bar{x}^0 = (1,1)$, $\Re^0 = 2$. Однако при любом $\varepsilon>0$ множество $D^{\varepsilon}=\varnothing$. Очевидно, что задаче (2.107), (2.110) неустойчива. Оценивание параметров регуляризации может быть проведено на базе техники, предложенной в [113] и результатов лемм 2.3 и 2.4. Необходимым условием регуляризации является выполнение условия сильной устойчивости, отражающего специфику оптимизации в условиях неопределенности, когда степень выполнения ограничений определяется через меру возможностей. Это условие выражается в существовании решения устойчивой задачи при незначительном повышении уровня требуемой возможности и основано на определяемой взаимосвязи между возмущениями распределений нечетких параметров задачи и возмущением функции принадлежности нечеткого множества ее решений. С данным условием тесно связан предложенный ранее метод регуляризации задач возможностной оптимизации [115] – понижение уровня требований по возможности выолнения ограничений в силу предполагаемой квазивогнутости распределений параметров эквивалентно расширению множества допустимых решений. Отметим, что данный метод может быть применен не только к неустойчивым, но также и к некоторым некорректным задачам возможностной оптимизаций, например к задачам, в которых множество допустимых решений пусто в силу завышенного уровня возможности выполнения ограничений.

Докажем ряд вспомогательных утверждений. Будем далее предполагать, что множество допустимых решений исходной задачи ограничено. Пусть

$$D_\eta(\alpha) = \{x \in X \mid \pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} \geq \alpha_i + \eta\} \ ,$$

где

$$f_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma) .$$

Следующий результат является обобщением леммы 2.3 [116].

Лемма 2.7. Пусть $a_{ij}(\gamma) \in \mathfrak{I}(E^1)$, $j=1,\dots,n$, тогда для любых α_i, η_1, η_2 таких, что $\alpha_i \in (0,1]$, $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \min\{\alpha_i, 1-\alpha_i\}$, верно

$$D_{-\eta}(\alpha_i) = \left\{ x \in X \mid \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta)x_j \leq \overline{b}_i(\alpha_i - \eta), \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta)x_j \geq \overline{b}_i(\alpha_i - \eta) \right\},$$

$$D(\alpha_i) = \left\{ x \in X \mid \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\alpha_i)x_j \leq \overline{b}_i(\alpha_i), \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(\alpha_i)x_j \geq \overline{b}_i(\alpha_i) \right\},$$

$$D_{\eta}(\alpha_i) = \left\{ x \in X \mid \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta)x_j \leq \overline{b}_i(\alpha_i + \eta), \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta)x_j \geq \overline{b}_i(\alpha_i + \eta) \right\},$$

где η = (η$_1$, η$_2$). Таким как распределения $\mu_{a_{ij}}, \mu_{b_i}$ квазивогнуты и $\alpha - \eta_2 \le \alpha - \eta_1 \le \alpha \le \alpha + \eta_1 \le \alpha + \eta_2$,
то

$$\underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_2) \le \underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_1) \le \underline{a}_{ij}(\alpha_i) \le \underline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_1) \le \underline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_2)$$

$$\overline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_2) \le \overline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_1) \le \overline{a}_{ij}(\alpha_i) \le \overline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_1) \le \overline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_2),$$

$$\underline{b}_i(\alpha_i - \eta_2) \le \underline{b}_i(\alpha_i - \eta_1) \le \underline{b}_i(\alpha_i) \le \underline{b}_i(\alpha_i + \eta_1) \le \underline{b}_i(\alpha_i + \eta_2)$$

$$\overline{b}_i(\alpha_i + \eta_2) \le \overline{b}_i(\alpha_i + \eta_1) \le \overline{b}_i(\alpha_i) \le \overline{b}_i(\alpha_i - \eta_1) \le \overline{b}_i(\alpha_i - \eta_2),$$

откуда непосредственно следует утверждение леммы 2.7.

Лемма 2.7 доказана.

Введем множество $D_\eta(\alpha) = \{x \in X \,|\, \pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} \ge \alpha_i + \eta,\ i = \overline{1,m}\}$,
где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$

Лемма 2.8. Пусть $a_{ij}(\gamma) \in \Im(E^1)$, $j=1,\dots,n$, тогда для любых α, η$_1$, η$_2$ таких, что $\alpha \in (0,1]^m$, $0 \le \eta_1 \le \eta_2 \le \min\{\min\limits_i \alpha_i,\ 1 - \max\limits_i \alpha_i\}$, верно

$$D_{-\eta_2}(\alpha) \supseteq D_{-\eta_1}(\alpha) \supseteq D(\alpha) \supseteq D_{\eta_1}(\alpha) \supseteq D_{\eta_2}(\alpha)$$

Доказательство. На основании леммы 2.7

$$D_{-\eta_2}(\alpha) = \bigcap_{i=1}^m D_{-\eta_2}(\alpha_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^m D_{-\eta_1}(\alpha_i) = D_{\eta_1}(\alpha),$$

$$D_{-\eta_1}(\alpha) = \bigcap_{i=1}^m D_{-\eta_1}(\alpha_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^m D(\alpha_i) = D(\alpha),$$

$$D(\alpha) = \bigcap_{i=1}^m D(\alpha_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^m D_{\eta_1}(\alpha_i) = D_{\eta_1}(\alpha),$$

$$D_{-\eta_2}(\alpha) = \bigcap_{i=1}^m D_{-\eta_1}(\alpha_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^m D_{-\eta_1}(\alpha_i) = D_{\eta_2}(\alpha).$$

На основании теоремы 2.10 [115]

$$D_{\eta_1}(\alpha) = \bigcap_{i=1}^m D_{\eta_1}(\alpha_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^m D_{\eta_2}(\alpha_i) = D_{\eta_2}(\alpha),$$

Лемма 2.8 доказана.

Введем множество $D^\varepsilon(\alpha) = \{x \in X \,|\, \pi\{f_i^\varepsilon(x,\gamma) = 0\} \ge \alpha_i, i = \overline{1,m}\}$, где

$$f_i^\varepsilon(x,\gamma) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^\varepsilon(\gamma) x_j - b_i^\varepsilon(\gamma),$$

ε - величина возмущения, удовлетворяющая условию (2.106).

Лемма 2.9. Пусть $a_{ij}(\gamma)$, $b_i(\gamma)$, $b^{\varepsilon}_i(\gamma) \in \Im_c(E^1)$ и η такое, что
$$\max_{i,j}\{\omega(a_{ij};\varepsilon),\omega(b_i;\varepsilon)\} \le \eta \le \min\{\min_i \alpha_i, 1-\max_i \alpha_i\}.$$
Тогда
$$D_{\eta}(\alpha) \subseteq D^{\varepsilon}(\alpha) \subseteq D_{-\eta}(\alpha).$$

Доказательство. По определению
$$\left|\underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) - \underline{a}_{ij}(\alpha_i)\right| \le \varepsilon, \quad \left|\overline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) - \overline{a}_{ij}(\alpha_i)\right| \le \varepsilon,$$
$$\left|\underline{b}^{\varepsilon}_{i}(\alpha_i) - \underline{b}_{i}(\alpha_i)\right| \le \varepsilon, \quad \left|\overline{b}^{\varepsilon}_{i}(\alpha_i) - \overline{b}_{i}(\alpha_i)\right| \le \varepsilon.$$
Если
$$\underline{a}_{ij}(\alpha_i) \le \underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) \le \overline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) \le \overline{a}_{ij}(\alpha_i),$$
$$\underline{b}_{i}(\alpha_i) \le \underline{b}^{\varepsilon}_{i}(\alpha_i) \le \overline{b}^{\varepsilon}_{i}(\alpha_i) \le \overline{b}_{i}(\alpha_i),$$
то $D(\alpha) \supseteq D^{\varepsilon}(\alpha)$ и утверждение $D^{\varepsilon}(\alpha) \subseteq D_{-\eta}(\alpha)$ верно в силу леммы 2.8. Иначе
$$\underline{a}_{ij}(\alpha_i) - \varepsilon \le \underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) \le \overline{a}_{ij}(\alpha_i),$$
неравенство $\underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta) \le \underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) - \varepsilon$ следует из предположения
$$\omega(a_{ij};\ \varepsilon) \le \eta \le \min\{\alpha_i, 1-\alpha_i\},$$
что влечет $\underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta) \le \underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i)$.

При $\overline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) > \overline{a}_{ij}(\alpha_i)$ получаем $\underline{a}_{ij}(\alpha_i) \le \underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i) \le \overline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta)$. Подобным образом можно показать, что $\underline{b}_{i}(\alpha_i - \eta) \le \underline{b}^{\varepsilon}_{i}(\alpha_i) \le \overline{b}^{\varepsilon}_{i}(\alpha_i) \le \overline{b}_{i}(\alpha_i - \eta)$ следует из оценки $\omega(b_i;\varepsilon) \le \eta \le \min\{\alpha_i, 1-\alpha\}$. Из полученных неравенств непосредственно следует, что $D^{\varepsilon}(\alpha) \subseteq D_{-\eta}(\eta)$

Доказательство обратного включения $D^{\varepsilon}(\alpha) \subseteq D_{-\eta}(\alpha)$ основывается на аналогичных рассуждениях. Лемма доказана

Лемма. 2.10. [116] Для любого $\alpha \in [0,1]$, $\eta_0 \ge 0$,

I. $\lim\limits_{\eta \to \eta_0 +} D_{\eta}(\alpha) = D_{\eta_0}(\alpha)$,

II. $\lim\limits_{\eta \to \eta_0 -} D_{\eta}(\alpha) = D_{\eta_0}(\alpha)$,

в метрике Хаусдорфа.

Далее будем предполагать, что в задаче возможностной оптимизации модель критерия устойчива по результату, множество допустимых решений $D(\alpha)$ ограничено.

Теорема 2.11. Пусть $a_{ij}(\gamma)$, $a^{\varepsilon}_{ij}(\gamma)$, $b_i(\gamma)$, $b^{\varepsilon}_i(\gamma) \in \Im_C(E^1)$. Если $D(\alpha)$ имеет внутреннюю точку, то задача устойчива по решению.

Доказательство. Ввиду устойчивости модели критерия достачно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \Delta(D^{\varepsilon}(\alpha), D(\alpha)) = 0.$$

Так как $D(\alpha)$ имеет внутреннюю точку, то существует $\eta>0$ такое, что $D_{\eta}(\alpha) \subseteq D(\alpha)$. По лемме 8

$$(\forall \overline{\eta} \le \eta) D(\alpha) \supseteq D_{\overline{\eta}}(\alpha) \supseteq D_{\eta}(\alpha),$$

$D_{\overline{\eta}}(\alpha)$ ограничено и задача разрешима на $D_{\overline{\eta}}(\alpha)$. Пусть $\{\varepsilon_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ есть произвольная последовательность. Образует последовательность $\{\eta_k | \omega(\varepsilon_k) \le \eta_k\}$, где

$$\omega(\varepsilon_{\kappa}) = \max_{i,j}\{\omega(a_{ij};\varepsilon_k), \omega(b_i;\varepsilon_k)\}.$$

В силу равномерной непрерывности распределений возможностных параметров задачи мы вправе положить $\{\eta_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Начиная с некоторого номера верно $\eta_k \le \eta$ и тогда по лемме 9

$$D_{-\eta_k}(\alpha) \supseteq D^{\varepsilon_k}(\alpha) \supseteq D_{\eta_k}(\alpha).$$

Но по лемме 10 множества $D_{-\eta_k}(\alpha), D_{\eta_k}(\alpha)$ стремятся при $\kappa\to\infty$ к $D(\alpha)$ в метрике Хаусдорфа, что влечет $D^{\varepsilon_k}(\alpha) \xrightarrow[k\to\infty]{} D(\alpha)$. Теорема доказана.

Данная теорема устанавливает факт неустойчивости и общем случае задач, использующих систему модальных ограничений.

Следствие 2.1. Пусть $a_{ij}(\gamma)$, $a^{\varepsilon}_{ij}(\gamma)$, $b_i(\gamma)$, $b^{\varepsilon}_i(\gamma) \in \Im_C(E^1)$. Если существует $\eta>0$ такое что $D_{\eta}(\alpha) \neq \varnothing$, то задача устойчива по решению.

В этом параграфе предложен метод регуляризации задач линейного программирования на основе унифицированного подхода, позволяющего исследовать устойчивость как детерминированных задач, так и задач с неопределенными параметрами, характеризуемыми возможностными распределениями. Получены новые условия сильной устойчивости, выполнение которых гарантирует устойчивость возможностного аналога, выступающего в качестве регуляризующей модели.

2.4.Об эффективности методов классификации, основанных на минимизации эмпирического риска

В настоящем параграфе обсуждается теоретическая эффективность некоторых методов (бинарной) классификации, в частности метода опорных векторов (Support Vector Machine/Method — SVM) [121]. Задача классификации рассматривается в стандартной для статистической теории обучения модели «обучения с учителем». Предполагается, что имеется обучающая выборка парных наблюдений $\{\{y_i, x_i), i = 1,..., m)$ размера m, где x_i - вектор признаков объекта i со значениями в множестве X, y_i - метка класса из дискретного множества Y, которому принадлежит объект i. В статистической теории обучения считается, что пары (y_i, x_i) являются независимыми случайными векторами с общим неизвестным вероятностным распределением P на множестве $Y \times X$. Под задачей классификации понимается построение на основе обучающей выборки отображения (классификатора) из X в Y. В качестве меры эффективности классификатора используется средняя вероятность ошибочной классификации как функция объема обучающей выборки и других параметров модели. Эта величина называется усредненным байесовским риском (в узком смысле), и для него существует теоретический минимум. Для рационального метода классификации риск ошибочной классификации должен стремиться к теоретическому минимуму с ростом объема обучающей выборки, в этом случае говорим о сходимости (по вероятности или почти наверное) метода классификации. Такие методы классификации называются состоятельными, однако состоятельность может иметь место только для определенных классов распределений обучающей выборки.

Одна из проблем статистической теории классификации заключается в том, что теоретическое распределение элементов обучающей выборки неизвестно, поэтому нельзя формально проверить, принадлежит ли распределение данной обучающей выборки к тому или иному классу. Некоторым разрешением этой проблемы могли бы быть методы классификации, состоятельные на любом распределении обучающих данных. Такие методы естественно называть универсально состоятельными [122]. Долгое время не было известно, существуют ли универсально состоятельные методы классификации. Только в 1977 году было показано [123], что этим свойством обладает известный с 1951 года метод *k*-ближайших соседей. Однако выяснилось [122], что универсально состоятельные методы могут сходиться (снижать риск ошибочной классификации с ростом обучающей выборки) как угодно плохо на некоторых распределениях обучающих данных и, следовательно, не существует универсально наилучшего (оптимального) метода классификации. Таким образом, утверждения об оценках скорости сходимости риска ошибочной классификации к неустранимому минимуму или об оптимальности некоторого метода классификации справедливы только для определенного класса распределений обучающих данных.

Этот вывод относится и к методам минимизации эмпирического риска, в частности к методу опорных векторов [121]. Его линейный вариант (метод оптимальных разделяющих плоскостей) детально исследован в [124,125], а нелинейный (метод потенциальных функций) - в [126], новейшие версии (методы опорных векторов - SVM) описаны в [121,127,128]. В настоящее время SVM успешно конкурируют с наиболее развитыми системами машиной классификации, поэтому он продолжает оставаться объектом интенсивного теоретического анализа [128,129]. Классическое обоснование метода базируется равномерном функциональном законе больших чисел, полученные оценки скорости сходимости зависят от так называемой VC-емкости (Вапника-Червоненкиса) класса решающих функций [121,124,125]. Однако оценка VC-емкости в общем случае представляет непростую проблему, и более того, далеко не всегда класс допустимых функций имеет конечную VC-емкость. Хотя некоторые часто используемые минимизируемые (квадратичные, абсолютного отклонения) функционалы эмпирического риска отражают качество классифицирующего правила, их связь с вероятностью безошибочной классификации не очевидна. Вид имеющихся оценок скорости сходимости в терминах доверительных границ для риска не позволяет сравнивать данный метод с другими, для которых эти оценки получены в терминах сходимости среднего риска.

В настоящей работе исследуется метод опорных векторов для решения задач бинарной классификации с позиций теории некорректных задач и устанавливаются оценки скорости сходимости метода при довольно общих предположениях о распределении обучающих данных. Эти предположения состоят в том, что некоторые характеристики распределения данных (условные медианы и средние) принадлежат определенному функциональному гильбертову пространству (с воспроизводящим ядром). Уточняется связь между используемыми функционалами риска и вероятностями ошибочной классификации. Получены оценки скорости сходимости вероятности ошибочной классификации к минимуму, зависящие от распределения данных, но не зависящие от VC-емкости функционального пространства. При этом не используется равномерный функциональный закон больших чисел. Эти оценки содержат неизвестные константы, поэтому непригодны для количественных выводов, однако показывают характер стремления к теоретическому минимуму средней ошибки данного классификатора. Как правило, скорость сходимости имеет порядок $const/\sqrt[4]{m}$, где m — число элементов в обучающей выборке.

2.4.1. Байесовские методы классификации

Пусть данные наблюдений представляют собой случайные пары *(y,x)* с распределением *P,* причем скалярная величина $y \in Y$ может принимать только дискретные значения (метки классов), например $y \in Y = \{0,1\}$, а компоненты n-мерного вектора $x \in X$ (признаки) могут быть как дискретными, так и непрерывными. Задача с s классами стандартным образом сводится к решению s задач бинарной классификации, в которых один класс - это один из исходных классов, а второй - все остальные. Для любой измеримой функции классифицирующее правило определяется по формуле

$$I_{1/2}(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) > 1/2, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (2.111)$$

Качество классифицирующего правила $I_{1/2}(f(\cdot))$ измеряется байесовским риском, т.е. вероятностью $P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\}$ ошибочной классификации, где $y \in \{0,1\}$. Напомним [122, с. 10], что байесовский риск достигает минимального значения P^* на решающем правиле, задаваемом функцией условной вероятности $p_1(x) = P\{y = 1|x\}$, но она не известна. В случае многих классов, когда $y \in Y = \{0,1,2,...\}$, оптимальная байесовская стратегия классификации состоит и максимизации по $l \in \{0,1,2,...\}$ условного распределения вероятностей $p_l(x) = P\{y = l \mid x\}$ [10, с. 22], которое, однако, тоже не известно.

Таким образом, один возможный путь построения оптимальных классификаторов состоит в аппроксимации условной вероятности $p_1(x)=P\{y=1 \mid x\}$ в бинарном случае или распределения $p_l(x)=P\{y=l \mid x\}$ $l=0,1,...$, в общем случае. Например, в методе классификации по k-ближайшим соседям [121, разд. 5] отбирается k наблюдений $\{x_i,\ i \in I_k(x)\}$, ближайших к вектору признаков x, строится их распределение по классам и вектор x относится к классу с максимальной частотой. Обозначим такой классификатор $g_k(x)$, его качество измеряется величиной вероятности ошибочной классификации $L_k(m) = E_{\{(y_1,x_1),...,(y_m,x_m)\}} P\{g_k(x) \neq y\}$, а асимптотическое качество - величиной $L_{k(m)} = \lim_{m\to\infty} L_k(m)$. Известно [121, разд. 5], что $P^* \le L_k^* \le P^*(1+1/\sqrt{ke})$ для всех распределений и четных k, где e - основание натуральных логарифмов. Кроме того, этот классификатор является универсально состоятельным, т.е. $L_{k(m)}(m) \to P^*$ при $m\to\infty$ и $k(m)/m \to 0$ независимо от вероятностного распределения элементов выборки, хотя скорость сходимости $L_{k(m)}(m)$ к P^* может быть медленной. Интересно отметить, что простейший классификатор $g_1(x)$ (классифицирующий по одному ближайшему соседу) может быть в среднем лучше на некоторых распределениях данных, чем более сложные классификаторы $g_k(x)$ с k>1. В [121] показано, что нельзя построить универсально состоятельный классификатор с фиксированной скоростью сходимости вероятности ошибочной классификации к теоретическому минимуму P^*. Для любого классификатора скорость сходимости может оказаться как угодно медленной при соответствующем выборе распределения исходных данных. Поэтому оценки скорости сходимости могут быть получены только при дополнительных предположениях о распределении наблюдений.

Заметим, что в бинарном случае $p_1(x) = P\{y = 1 \mid x\}$ является функцией условного среднего (регрессии), поэтому для ее оценки можно применять стандартные подходы регрессионного анализа, в частности непараметрические методы [131]. Пусть $\{(y_i, x_i),\ i = 1,..., m\}$ - обучающая выборка, $\rho(\cdot,\cdot)$ - некоторая функция расстояния между точками в пространстве признаков X, $k(\cdot)$ - некоторая одномерная симметричная плотность вероятностей, θ_m -

положительные числа. Тогда ядерная оценка Надараи-Ватсона [131, разд. 5] функции регрессии $p_1(x)$ в данном случае имеет вид

$$\tilde{p}_1(x) = \sum_{i:\, y_i=1} k\left(\frac{\rho(x,x_i)}{\theta_m}\right) / \sum_{i=1}^{m} k\left(\frac{\rho(x,x_i)}{\theta_m}\right),$$

а соответствующий бинарный классификатор задается формулой (2.111) с $f(x) = \tilde{p}_1(x)$.

В работах [132-134] неизвестное условное распределение вероятностей $\{p_l(x),\ l=0,\ 1,\ \ldots..)$ аппроксимируется байесовской оценкой $\{\tilde{p}_l(x), l = 0,1,\ldots.\}$при (сильном) предположении условной независимости признаков (компонент случайного вектора x для объектов из фиксированного класса l). Для такого классификатора в [132-134] получены оценки скорости сходимости вида

$$B(m) = E_{\{(y_1,x_1),\ldots,(y_m,x_m)\}} P\{\arg\max_l \tilde{p}_l(x) \neq y\} \leq P^* + C/\sqrt{m},$$

где C - универсальная константа, не зависящая от распределения данных, и доказана их неулучшаемость при сделанных предположениях по характеру зависимости от размера обучающей выбора m Существенное для этой оценки предположен о независимости при детально обсуждается в [130, разд. 3.3].

В бинарном случае хорошо известно (см. [2, с. 16] и ссылки в этой боте), что байесовская ошибка классификации выражается через ошибку $\tilde{p}_1(x) - p_1(x)$ аппроксимации условной вероятности $p_1(x)=P\{y=1|\, x\}$ следующим образом:

$$P\{I_{1/2}(\tilde{p}_1(x)) \neq y\} - P^* \leq 2E\left|\tilde{p}_1(x) - p_1(1)\right|.$$

Здесь символ E обозначает математическое ожидание по мере P. Эта оценка дает статистическое обоснование методам классификации, основанным на аппроксимации условных вероятностей $p_l(x) = P\{y = l|\, x\}$, l=0,1.

2. Связь задачи бинарной классификации с оптимизацией выпуклых функционалов риска

Другой подход к построению методов классификации состоит в сведении задачи классификации к выпуклой задаче оптимизации функционала риска [129, разд. 4.2]. Далее рассмотрим случаи, не представленные в обзоре [9]. Например, известно [122, с. 11] , что $p_1(x)=arg\ min_f\ E(y\ -\ f(x))^2$. Если $f(x)$- некоторое приближенное решение задачи минимизации квадратичного риска, то соответствующее решающее правило определяется по формуле (2.111), а оценка качества классификации – по формуле (2.112).

Этот подход к бинарной классификации подробно обсуждается в [135]. Кроме того, в статистической теории классификации и обучения используются функционалы риска вида

$$R_\varepsilon(f) = E\max\{0, |y - f(x)| - \varepsilon\},\ \varepsilon \geq 0,$$

и, p частности, $R_0(f) = E\,|y - f(x)| = L_1(f)$ [121]. Их применение в какой-то мере обосновано оценкой [122, с. 20]

$$\begin{aligned} &P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} - \min{}_f\, P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} \leq \\ &\leq 2(E|y - f(x)| - \min{}_f\, E|y - f(x)|), \end{aligned} \tag{2.113}$$

где минимумы берутся по множеству борелевских функций на X.

Следующая теорема дает оценку качества классификатора, минимизирующего квадратичный функционал риска $L_2(f)=E(y-f(x))^2$, отличную от (2.112).

Теорема 2.12. Пусть F — множество борелевских функций на $x\in X$ такое, что $p_1(x)=P\ \{y\ =\ 1|x\}\in F$. Тогда для любой функции $f(\cdot)\in F$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} &P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} - \min{}_{f-измерима} P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} \leq \\ &\leq 2\sqrt{L_2(f) - \min{}_{f\in F}\, L_2(f)}. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Доказательство. Представим

$$P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} = E_x\{P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\}\},$$

$$E(f(x) - y)^2 = E_x\{E\{(f(x) - y)^2 |x\}\},$$

где $P\{\cdot|\,x\}$ и $E\{\cdot|\,x)$ - условная вероятность и условное математическое ожидание при фиксированной компоненте x случайного вектора (y,x); E_x - математическое ожидание по распределению компоненты x. Рассмотрим функции $p_1(x)=P\{y=1|x\}$, $p_0(x) = P\ \{y=0|x\}=1-p_1(x)$ и $e(h, x)=E\{(h-y)^2|x\}$.

Справедливы соотношения:

$$r(h,x) = P\{I_{1/2}(h) \neq y|x\} = \begin{cases} p_0(x) = 1 - p_1(x), & h > 1/2, \\ p_1(x), & h \geq 1/2; \end{cases}$$

$$e(h,x) = p_1(x)(h-1)^2 + (1 - p_1(x))h^2 = h^2 - 2hp_1(x) + p_1(x) =$$

$$(h - p_1(x))^2 + p_1(x)(1 - p_1(x)) = (h - p_1(x))^2 + e^*(x),$$

$$e^*(x) = p_0(x)\,p_1(x).$$

Отсюда следует, что для любого $h \in R^1$ выполнено

$$r(h,x) \geq r(p_1(x),x) = \min\{p_0(x), p_1(x)\} = r^*(x), \tag{2.115}$$

$$e(h,x) \geq e(p_1(x),x) = p_0(x)\,p_1(x) = e^*(x). \tag{2.116}$$

Если $p_1(x)\leq 1/2$, то

$$r(h,x)-r^*(x)=\begin{cases}0, & h\le 1/2,\\ p_0(x)-p_1(x), & h>1/2.\end{cases}$$

Если $p_1(x)$>1/2, то

$$r(h,x)-r^*(x)=\begin{cases}p_1(x)-p_0(x), & h\le 1/2,\\ 0, & h>1/2.\end{cases}$$

Пусть $p_1(x)$ ≤1/2. При h≤1/2 выполнено $r(h,x)-r^*(x) = 0 \le 2(e(h,x)-e^*(x)^*$. При h>1/2 имеет место

Таким образом, при $p_1(x)$≤1/2 и всех h выполнено

$$r(h,x)-r^*(x)\le 2\sqrt{e(h,x)-e^*(x)}. \qquad (2.117)$$

Доказательство этого неравенства для случая p(x)>1/2 проводится аналогично. Подставляя в (2.115), (2.116), (2.117) значение $h = f(x)$ и взяв математическое ожидание по x, для любой измеримой функции $f(x)$ имеем

$$P\{I_{1/2}(f(x))\ne y\}\ge P\{I_{1/2}(p_1(x))\ne y\}=P^*,$$

$$E\{(f(x)-y)^2\}\ge E\{(p_1(x)-y)^2\},$$

$$P\{I_{1/2}(f(x))\ne y\}-P\{I_{1/2}(p_1(x))\ne y\}\le 2\sqrt{E\{(f(x)-y)^2\}-E\{(p_1(x)-y)^2\}}.$$

При получении последнего неравенства использовалось неравенство Иенсена для вогнутой функции $\sqrt{(\cdot)}$. Поэтому если $p_1(\cdot)\in F$, то для любой функции $f_1(\cdot)\in F$ выполнено

$$P\{I_{1/2}(f(x))\ne y\}-P^*\le 2\sqrt{E\{(f(x)-y)^2\}-\min_{f(\cdot)\in F}E\{(f(x)-y)^2\}},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу [2, с. 20]

$$L_1(f)=E\left|f(x)-y\right|\to\inf_{f\in F}, \qquad (2.118)$$

где F — множество борелевских функций на $x\in X$ такое, что $g_1(\cdot)\in F$, где

$$g_1(x)=\begin{cases}1, & p_1(x)>1/2,\\ 0, & p_1(x)\le 1/2,\end{cases}\qquad p_1(x)=P\{y=1|x\}.$$

Следующая теорема обобщает оценку (2.113) и устанавливает связь между байесовским риском и выпуклым функционалом $L_1(f)=E\left|f(x)-y\right|$.

Теорема 2.13. Пусть F — множество борелевских функций на $x\in X$ такое, что $g_1(\cdot)\in F$ или $\mu(\cdot)\in F$, где $\mu(\cdot)$ - любая условная медиана распределения $P\{\cdot\,|x\}$ при фиксированном x. Тогда для любой функции $f(\cdot)\in F$ имеет место оценка

$$P\{I_{1/2}(f(x))\neq y\}-\min_{f-\text{измерима}}P\{I_{1/2}(f(x))\neq y\}\leq$$
$$2(R(f)-\min_{f(\cdot)\in F}R(f)), \qquad (2.119)$$

где $R(f)=L_1(f=E\left|f(x)-y\right|$

Доказательство. Для случая, когда F-множество всех измеримых функций на $x\in X,$ утверждение теоремы имеется в [122, с. 20] (без множителя 2 в правой части (2.119)). Представим

$$P\{I_{1/2}(f(x))\neq y\}=E_x\{P\{I_{1/2}(f(x))\neq y|x\}\},$$
$$E\left|f(x)-y\right|=E_x\{E\left|f(x)-y\right|\left|x\right\}.$$

Рассмотрим функции $p_1(x)=P\{y=1|x\}$ и $a(h,x)=E\{|h-y||x\}$. Справедливы представления:

$$r(h,x)=P\{I_{1/2}(h)\neq y|x\}=\begin{cases}1-p_1(x), & h>1/2,\\ p_1(x), & h\leq 1/2,\end{cases}$$
$$a(h,x)=E\{|h-y||x\}=p_1(x)|h-1|+(1-p_1(x))|h|.$$

Обозначим $r^*(x)=min\{p_1(x),1\text{-}p_1(x)\}$. Для любой условной медианы $\mu(\cdot)$ имеет место

$$\mu(x)\in\begin{cases}1, & p_1(x)>1/2,\\ [0,1], & p_1(x)=1/2,\\ 0, & p_1(x)\leq 1/2,\end{cases}$$

и, в частности, $g_1(x)$ является условной медианой распределения P при фиксированном x. Отсюда следует, что для любого $h\in R$ выполнено

$$r(h,x)\geq r(p_1(x),x)=r^*(x), \qquad (2.120)$$
$$a(h,x)\geq a(\mu(x),x)=r^*(x). \qquad (2.121)$$

Докажем неравенство

$$r(h,x)-r^*(x)\leq 2(a(h,x)\text{-}r^*(x)). \qquad (2.122)$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(p,h)=p|h-1|+(1-p)|h|=\begin{cases}p-h, & h\leq 0,\\ p+h-2ph, & 0\leq h\leq 1,\\ h-p, & h\geq 1.\end{cases}$$

Покажем, что при $p\leq 1/2\leq 1-p$ выполнено

$$\varphi(p,h)-p\leq 2(\psi(p,h)\text{-}p).$$

Действительно,

$$\varphi(p,h)-p=0\leq 2(\psi(p,h)-p)=-2h\ \ \text{при}\ h\leq 0;$$
$$\varphi(p,h)-p=0\leq 2(\psi(p,h)-p)=2h(1-2p)\ \ \text{при}\ 0\leq h\leq 1/2;$$
$$\varphi(p,h)-p=1-2p\leq 2(\psi(p,h)-p)=2h(1-2p)\ \ \text{при}\ 1/2\leq h\leq 1;$$
$$\varphi(p,h)-p=1-2p\leq 2(\psi(p,h)-p)=2(h-2p)\ \ \text{при}\ 1<h.$$

Аналогично проверяется, что при $1\text{-}p \le 1/2 \le p$ выполнено $\varphi(p,h)\text{-}(1\text{-}p) \le 2(\psi(p,h)) - (1\text{-}p))$. Таким образом, неравенство (2.122) доказано.

Подставляя в (2.120), (2.121), (2.122) значение $h = f(x)$ и взяв математическое ожидание по x, для любой борелевской функции $f(x)$ получаем

$$P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} \geq P\{ I_{1/2}(p_1(x)) \neq y\} \neq P^*,$$

$$E|f(x)-y| \geq E|\mu(x)-y|,$$

$$P\{I_{1/2} f(x) \neq y\} - P^* \leq 2E|f(x)-y| - E|\mu(x)-y|. \qquad (2.123)$$

Из (2.123) следует требуемое неравенство (2.119).

Теорема доказана.

Таким образом, минимизация функционала $L_1(f) \geq E|\mu(x)-y|$ по множеству борелевских функций F такому, что $g_1(\cdot)\in F$ или $\mu(\cdot)\in F$ в силу (2.119) автоматически ведет к минимизации функционала байесовского риска.

Как известно, минимум квадратичного функционала риска $L_2(f)$ достигается на функции условного среднего $m(x) = \int_{R^1} yP(dy|x)$ распределения P. Для неквадратичных функционалов риска соответствие их минимумов каким-либо характеристикам распределения менее очевидно, но в случае функционала среднего абсолютного отклонения, часто используемого в теории статистического обучения, такое соответствие может быть установлено.

Теорема 2.14. В задаче минимизации функционала риска

$$R(f) = E_{(x,y)} \max\{(1-\delta)(f(x)-y), \delta(y-f(x))\}$$

по всем измеримым функциям $f(x)$ минимум достигается на условных δ -квантилях распределения P, т.е. на функциях $q(x)$ таких, что $P\{y \le q(x)|x\} \ge \delta$. В частности, при $\delta = 0{,}5$ функционал риска имеет вид $R(f) = (1/2)E|f(x)-y|$ и его минимум достигается на условных медианах $\mu(x)$ распределения $P\{\cdot|x\}$.

Данное утверждение получено в [136,137]; в контексте стохастических минимаксных задач этот факт был установлен в работах [138,139]; он детально обсуждается в [140]. Отметим, что δ - квантиль и медиана распределения, в общем случае, могут быть не единственными.

Если есть априорные основания полагать, что условные медианы распределения $P(\cdot)$ принадлежат некоторому классу функций, например некоторому гильбертову пространству Z, то в (2.118) можно положить $F = H$. В этом случае говорят об отсутствии ошибки аппроксимации (медиан) функциями из H. В общем случае ошибка аппроксимации существует, ее оценки имеются в [122,128,131,141].

В [121] при решении задач классификации часто используются ε-нечувствительные функционалы риска вида

$$R_\varepsilon(f) = E\max\{0, |f(x)-y| - \varepsilon\}.$$

Легко видеть, что функционал $L_\varepsilon(f) = E|f(x)-y|\}$ связан с $R_\varepsilon(f)$ соотношением $L_1(f)$-ε≤$R_\varepsilon(f)$≤$L_1(f)$ равномерно по всем борелевским функциям f, поэтому в условиях теоремы 2.13 из (2.119) следует соотношение

$$P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} - \min{}_{f\in F} P\{I_{1/2}(f(x)) \neq y\} \leq 2(R_\varepsilon(f) - \min{}_{f\in F} R_\varepsilon(f)) + 2\varepsilon.$$

Использование ε - нечувствительных функционалов риска позволяет упростить классификатор [121], хотя и ухудшает точность классификации на 2ε.

В задачах классификации часто используются функционалы вида $R(f)=E\varphi(-yf(x))$ [9], где метки классов $y\in\{\pm l\}$, $\varphi(\cdot)$ - некоторая неотрицательная выпуклая неубывающая функция потерь такая, что $lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$ и $\varphi(0) = 1$. С их помощью также установлены оценки риска безошибочной классификации, аналогичные оценкам (2.114), (2.119).

Отметим, что в задачах классификации признаковое пространство X часто является дискретным, например, оно может состоять из вершин единичного куба [126, гл. Ill, §1.3]. В этом случае функция $f(x)$, $x \in X$, задается конечным, возможно очень большим, числом значений, т.е. является вектором большой размерности.

2.4.3. Оптимизация регуляризованных функционалов эмпирического риска и метод опорных векторов

В 2.4.2 показано, что задача бинарной классификации может быть сведена к минимизации выпуклого функционала риска. В общем случае она имеет вид

$$R(f)=Ec(y, f(x))\to min_{f\in F}\,, \tag{2.124}$$

где $c(y,f(x))$ – некоторая функция потерь, например, $c(y, f(.x)) = (y - f(x))^2$, $c(y, f(x)) = |y - f(x)|$, $c(y, f(x)) = \max\{0, 1-yf(x)\}$; F-допустимый класс функций. Обозначим F^* множество решений задачи (2.124). В предыдущем разделе также показано, что минимум в таких задачах может достигаться на некоторой характеристике распределения случайного вектора наблюдений $z=(y,x)$, например функции условного среднего $p_1(x)$ или условной медиане $\mu(x)$. Если есть основания полагать, что эти характеристики принадлежат некоторому классу функций F, например подмножеству некоторого гильбертова пространства функций H, то в (2.124) можно считать $F\subset H$. В статистической теории обучения используются разнообразные классы функций (классические гильбертовы пространства с заданным базисом, нейросетевые суперпозиции, деревья и другие [122]) и, в частности, так называемые репродуктивные гильбертовы пространства функций H_k, порожденные ядром k.

Определение 2.20. (репродуктивное гильбертово пространство). Гильбертово пространство $H_k(X)$ функций, определенных на замкнутом множестве $X\subset R^n$, называется репродуктивным гильбертовым пространством (РГП), если существует функция двух векторных переменных $k(\cdot,\cdot)$, определенная на декартовом произведении $X \times X$, обладающая следующими свойствами:

а) $k(\cdot,x) \in H_k(X)\ \forall x\in X;$

б) $f(x) =\langle f, k(\cdot, x)\rangle_k\ \forall f \in H_k(X),\quad \forall x\in X$ (репродуктивное свойство ядра).

Теория РГП изложена в работах [127,141,142,143]. В частности, известно, что множество функций $\left\{f(x)=\sum_s a_s k(\bar{x}_s,x)\right\}$ из РГП $H_k=H_k(X)$, где $\{\bar{x}_s\}$ произвольный конечный набор точек из X, $\{a_s\}$ - произвольный конечный набор чисел, является плотным в $H_k(X)$.

В задачах классификации распределение $P(\cdot)$ наблюдений обычно не известно полностью, а имеется набор независимых наблюдений $\{z_i=(y_i,x_i),\ i=1,\ldots,m\}$ векторной случайной величины $z=(y,x)$ с распределением $P(\cdot)$, который в статистической теории обучения называется обучающей выборкой. Это позволяет аппроксимировать неизвестное распределение $P_m(\cdot)$ эмпирическим распределением $P_m(\cdot)$, а функционал риска $R(f)=E\ c\ (y,f(x))$ с функцией потерь $c(y,f)$ - эмпирическим средним (эмпирическим риском)

$$\tilde{R}_m(f)=(1/m)\sum_{i=1}^{m}c(z_i, f(x_i)).$$

Задача минимизации функционала риска (2.124), вообще говоря, может быть некорректной, т.е. иметь неоднозначные решения, быть неустойчивой по отношению к возмущениям функционала. В статистической теории обучения классификации исходный функционал риска *R(f)* заменяется случайным приближением $\widetilde{R}_m(f)$, т.е. рассматривается его стохастическое возмущение вида $R(f)+\delta_m(f)$, где $\delta_m(f)=\widetilde{R}_m(f)-R(f)$. Поэтому для нахождения приближенных решений применяется метод регуляризации Тихонова в функциональном (гильбертовом) пространстве *H* [144,145]. Рассмотрим метод регуляризации в РГП при определенных (эмпирических) случайных возмущениях функционала и для общих выпуклых (не только квадратичных) функционалов риска, который сводится к решению семейства задач минимизации регуляризованного эмпирического риска

$$\widetilde{R}_m(f)+\lambda\|f\|_k^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}c(y_i,f(x_i))+\lambda\|f\|_k^2\to\inf_{f\in H_k} \qquad (2.125)$$

где H_k - некоторое РГП, порожденное ядром *k*. Оказывается, что решение регуляризованной задачи (2.125) в РГП сводится к задаче конечномерной оптимизации, а для кусочно-линейных функций потерь – к задаче квадратичной оптимизации при линейных ограничениях. В силу так называемой теоремы о представлении решения в РГП [127, Theorem 4.2, p. 90; 146] решение задачи (2.125) существует и может быть представлено в виде

$$f_m^{\lambda}(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i k(x_i,x), \qquad (2.126)$$

где $\alpha^m=\{\alpha_i\}$-некоторый неизвестный набор действительных чисел, $\{x_i\}$-известный набор точек наблюдения. Подставляя выражение (2.126) в (2.125) и используя репродуктивное свойство ядра, приходим к следующей конечномерной задаче оптимизации:

$$R_m(a^m)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}c\left(y_i,\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,k(x_i,x_j)\right)+\lambda\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_i\alpha_j k(x_i,x_j)\to\min_{\alpha^m}. \qquad (2.127)$$

Если функция потерь $c(y,\cdot)$ выпукла и неотрицательна, а матрица $\{k(x_i,x_j)\}$ положительно определена, то эта задача имеет единственное решение f_m^{λ}. В решении задачи (2.127) в силу наличия квадратичного штрафа в целевой функции значительная часть коэффициентов разложения (2.126) может быть равна пулю. Векторы x_i соответствующие ненулевым коэффициентам разложения (2.126), называются опорными векторами, а в целом метод классификации, основанный на решении задач (2.125)-(2.127), называется методом опорных векторов [121,127]).

Отметим, что для негладких кусочно-линейных функций потерь, например, $c(y, f(x)) = |y - f(x)|, c(y, f(x)) = \max\{0,1 - y f(x)\}$, задача (2.127) является выпуклой и негладкой, однако с помощью дополнительных переменных она легко сводится к задаче квадратичного программирования при линейных ограничениях. Детали численной реализации метода можно найти, например, в [127,147].

2.4.4. Сходимость метода опорных векторов при неограниченном росте числа наблюдений

Рассмотрим асимптотические свойства при $m \to \infty$ и $\lambda \to 0$ решений $f_m^\lambda(x)$ задачи минимизации регуляризованного эмпирического риска (2.125). В работах [121,124,125] вопрос сходимости $R(f_m^\lambda) \to \inf_{f \in F} R(f)$ исследован в предположении ограниченной емкости класса функций F. Примененный подход основан на установлении условий равномерной по $f \in F$ сходимости эмпирических аппроксимаций функционала риска $R_m^\lambda(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} c(z_i, f(x_i))$ к его истинному значению $R(f)=Ec(z, f(x))$ т.е. $\sup_{f \in F} |R_m^\lambda(f) - R(f)| \to 0$ при $m \to \infty$. Однако подходящий класс функций имеет конечную емкость (конечную размери в смысле Вапника–Червоненкиса [124]). Более слабые требования для равномерной на классе функций сходимости эмпирических средних к функционалу риска можно сформулировать в терминах сложности класса по Радемахеру [129, разд. 3]. Заметим что условие равномерной сходимости аппроксимаций $R^\lambda{}_m(f)$ к $R(f)$ не является необходимым для сходимости минимумов [148]. Поэтому следуем другому подходу основанному на свойстве устойчивости регуляризованных решений $f_m^\lambda(x)$ но отношению к отдельным наблюдениям. Подобный подход использовался в [127 разд. 12.1; 149,150,151], где исследовалась сходимость оценок риска по вероятности. В отличие от этих работ в данной работе устанавливаются условия на $\lambda=\lambda(m)$, при которых оценки $f_m^{\lambda(m)}(x)$ равномерно по $x \in X$ сходятся с вероятностью единица к минимуму f^* функционала риска $R(f)$, имеющему минимальную норму. В смысле построенные классификаторы асимптотически устойчивы.

Предположение 2.1 (свойства функции потерь). Функция потерь c(y,·) неотрицательна, выпукла и липшицева по второму аргументу с константой Ly на множестве Ф={f(x)|f∈F, x∈X}.

Предположение 2.2 (свойства ядра). Порождающее ядро $k(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию $\sup_{x\in X}|k(x,x)| = K^2 <= +\infty$.

Очевидно, функции потерь $c(y,f)=|y-f|, c(y,f)=\max\{0,1-yf\}$ удовлетворяют предположению 1 при любом множестве Ф, а функция $c(y,f) = (y\text{-}f)^2$ удовлетворяет этому предположению при ограниченном множестве Ф. Обозначим

$$L=\max_{y\in Y} L_y,\ C=\max_{y\in Y} c(y,0). \tag{2.128}$$

Следующая теорема дает оценку неоптимальности (в среднем) приближенных решений f_m^{λ} как функцию m и Z. Эти оценки являются случайными величинами со значениями в функциональном пространстве H_k и определены на счетном произведении исходного вероятностного пространства *(X, B_X ,P)*.

Теорема 2.15 [152, 153]. Пусть решение задачи (2.124) существует, функции f_m^{λ} являются решениями задачи (2.125). Тогда в сделанных предположениях для любого λ > 0 и m имеет место оценка

$$E_m R(f_m^{\lambda}) \le R(f^*) + 2\frac{2C+L\|f^*\|_{\infty}}{\sqrt{m}} + \frac{LK(5LK+2\lambda C)}{\lambda\sqrt{m}} + \lambda\|f^*\|_k^2, \tag{2.129}$$

где математическое ожидание E_m берется по всем выборкам $\{z_1,...,z_m\}$ с независимыми одинаково распределенными наблюдениями, f^* - любое решение задачи (2.124), $\|f^*\|_{\infty}=\sup_{x\in X}|f(x)|, \|f^*\|_k$ - норма функции f^* в пространстве H_k.

Теорема гарантирует сходимость в среднем величины $R(f_m^{\lambda})$ к минимальному значению $R(f^*)$ при $\lambda(m)\to 0$ и $\sqrt{m}\lambda(m)\to 0$ когда $m\to\infty$.

Укажем условия сильной состоятельности оценок $f_m^{\lambda}(x)$ т.е. их равномерной по $x \in X$ сходимости к некоторому минимуму $f^*(x)$ функционала риска R при $\lambda=\lambda(m)\to 0$ и $m\to\infty$.

Определение 2.21. [144]. Решение $f^* \in F^*$ задачи называется нормальным, если оно имеет минимальную норму, $\|f^*\|_k = \min_{f\in F^*}\|f\|_k$.

Следующие две теоремы из [152, 153] дают достаточные условия равномерной сходимости с вероятностью единица приближенных решений $f_m^{\lambda(m)}(x)$ к нормальному решению $f^* \in F^*$ задачи (2.124), т.е. $\lim_{m\to\infty}\sup_{x\in X}\left|f_m^{\lambda(m)} - f^*(x)\right| = 0$.

Теорема 2.16 (достаточные условия сильной состоятельности метода опорных векторов). Пусть решение задачи (2.124) существует и выполнены предположения 2.1, 2.2. Рассмотрим семейство решений $f_m^{\lambda(m)}(x)$ задачи (2.125), причем $\lim_{m\to\infty}\lambda(m) = 0$. Тогда если $\lim_{m\to\infty} m\lambda^2(m)/\ln m = \infty$ то $R(f_m^{\lambda(m)}) \to R(f^*)$. Если $\lim_{m\to\infty} m\lambda^4(m)/\ln m = \infty$ то $R(f_m^{\lambda(m)}) \to R(f^*)$ и решения $f_m^{\lambda(m)}(x)$ задачи (2.125) равномерно по $x\in X$ сходятся к нормальному решению f^* задачи (2.124) с вероятностью единица при $m\to +\infty$.

Теорема 2.17 (оценка скорости сходимости метода опорных векторов). Пусть в условиях предыдущей теоремы $\lambda(m) = \Lambda(\ln m)^{\varepsilon}/m^{1/4}$, $\Lambda > 0$, $1/4 < \varepsilon \le 1$, тогда справедливы утверждения теоремы 2.15 и имеет место оценка

$$E_m R(f_m^{\lambda}) - R(f^*) \le 2\frac{2C + L\|f^*\|_{\infty}}{\sqrt{m}} + \frac{LK(5LK + 2\sqrt{2\Lambda C})}{\Lambda(\ln\, m)^{\varepsilon}\sqrt[4]{m}} + \frac{\|f^*\|_k^2\Lambda(\ln\, m)^{\varepsilon}}{\sqrt[4]{m}}. \quad (2.130)$$

2.4.5. Эффективность метода опорных векторов при решении задач бинарной классификации

С помощью решения f_m^{λ} задачи (2.125) соответствующий бинарный классификатор строится следующим образом:

$$I_{1/2}(f_m^{\lambda}(x)) = \begin{cases} 1, & f_m^{\lambda}(x) > 1/2, \\ 0 & \textit{впротивном случае.} \end{cases} \quad (2.131)$$

Для заданной обучающей выборки эффективность классификатора измеряется величиной вероятности ошибки классификации

$$\Delta_m^{\lambda} = P\{I_{1/2}(f_m^{\lambda}(x)) \ne y\} - \min_{f\in F} P\{I_{1/2} f(x) \ne y\},$$

которая оценивается сверху через разности $[R(f_m^{\lambda})-R(f^*)]$ согласно неравенствам (2.114), (2.119) из теорем 2.12, 2.13, при условии, что условные медианы и средние принадлежат допустимому множеству F задачи минимизации риска (2.124). Для получения средней вероятности ошибки классификации необходимо взять математическое ожидание $E_m\Delta_m^{\lambda}$ по всем независимым обучающим выборкам $\{(y_i, x_i)\}$ объема m. В свою очередь, среднее значение $[E_m(f_m^{\lambda})-R(f^*)]$ ошибки минимизации функционала риска по всем возможным обучающим выборкам оценивается неравенствами

(2.129), (2.130) из теорем 2.15, 2.17. Таким образом, приходим к следующим результатам.

Теорема 2.18 (оценка эффективности метода опорных векторов при использовании негладкого функционала риска *$L_1(f)$*). Предположим, что условная медиана *$f^*(x)$* вероятностного распределения P независимых элементов обучающей выборки $\{(y_i,x_i)\}$ принадлежит подмножеству F некоторого репродуктивного гильбертова пространства H_k с порождающим ядром k . Для бинарного классификатора (2.131), где функция $f_m^\lambda(x)$ является решением задачи (2.125) с функцией потерь $c(y,f)=|y-f|$ или $c(y,f)=\max\{0,1-yf\}$, средняя по всем обучающим выборкам $\{(y_i,x_i)\}$ объема m ошибка классификации оценивается следующим образом: $$E_m\Delta_m^\lambda \le 4\frac{2C+L\|f^*\|_\infty}{\sqrt{m}}+\frac{2LK(5LK+2\sqrt{\lambda C})}{\lambda\sqrt{m}}+2\lambda\|f^*\|_k^2.$$

Здесь константы L, C определены в (2.128), константа K определена в предположении 2.2. При $\lambda(m)=\Lambda\ln m/m^{1/4},\Lambda>0$, эта оценка принимает вид
$$E_m\Delta_m^\lambda \le 4\frac{2C+L\|f^*\|_\infty}{\sqrt{m}}+\frac{2LK(5LK+2\sqrt{2\Lambda C})}{\Lambda(\ln\, m)^\varepsilon\sqrt[4]{m}}+\frac{2\|f^*\|_k^2\Lambda(\ln\, m)}{\sqrt[4]{m}}.$$

Теорема 2.19 (оценка эффективности метода опорных векторов при использовании квадратичного функционала риска *$L_1(f)$*. Предположим, что условное среднее $p_1(x)=P\{y=1|x\}=E\{y|x\}$ вероятностного распределения P независимых элементов обучающей выборки $\{(y_i,\, x_i)\}$ принадлежит подмножеству F некоторого репродуктивного гильбертова пространства H_k с порождающим ядром k. Для бинарного классификатора (2.131), где функция $f_m^\lambda(x)$ является решением задачи (2.125) с квадратичной функцией потерь $c(y,f)=(y-f)^2$, средняя по всем обучающим выборкам объема m ошибка классификации оценивается следующим образом: $$E_m\Delta_m^\lambda \le 2\left(2\frac{2C+L\|p_1\|_\infty}{\sqrt{m}}+\frac{LK(5LK+2\sqrt{\lambda C})}{\lambda\sqrt{m}}+\lambda\|p_1\|_k^2\right)^{1/2}.$$

Здесь константы определены в (2.128), константа K определена в предположении 2. При $\lambda(m)=\Lambda\ln m/m^{1/4},\Lambda>0$, эта оценка принимает вид
$$E_m\Delta_m^\lambda \le \left(2\frac{2C+L\|p_1\|_\infty}{\sqrt{m}}+\frac{LK(5LK+2\sqrt{2\Lambda C})}{\Lambda(\ln\, m)\sqrt[4]{m}}+\frac{\lambda\|p_1\|_k^2\Lambda\ln m}{\sqrt[4]{m}}\right)^{1/2}.$$

Можно сделать несколько выводов, касающихся применения метода опорных векторов для решения задач бинарной классификации.

При использовании метода опорных векторов важно правильно определить класс функций F и пространство $H \supseteq F$, которым принадлежат условные медианы и условное среднее вероятностного распределения элементов обучающей выборки. В этом случае говорят об отсутствии ошибки аппроксимации медианы и среднего функциями из $F \subseteq H$. Поскольку теоретическое распределение обучающих данных неизвестно, а имеется только конечная выборка наблюдений с этим распределением, выбор пространства H и его подмножества F для конкретной реализации метода опорных векторов не является формализованным актом. Если $F=H=H_k$ - некоторое РГП функций, то построение классификатора сводится к решению задачи квадратичного программирования.

Метод опорных векторов является состоятельным (в случае отсутствия ошибки аппроксимации), а именно, при выборе параметра регуляризации $\lambda(m)$ согласно условиям $\lim_{m\to\infty}\lambda(m) = 0$ и $\lim_{m\to\infty} \lambda(m)\sqrt{m} = \infty$ вероятность ошибочной классификации стремится к теоретическому минимуму (в среднем и по вероятности) для любого распределения обучающих данных. Однако полученные оценки скорости сходимости средней ошибки классификации к минимуму содержат неизвестные константы $(\|f^*\|_\infty, \|f^*\|_k,\ (\|p_1\|_\infty, \|f_1\|_k^2)$, зависящие от вероятностного распределения элементов обучающей выборки.

Скорость сходимости к минимуму средней вероятности ошибочной классификации (при увеличении объема m обучающей выборки) методом опорных векторов при использовании функционала абсолютного отклонения $L_1(f)$ имеет порядок $const/\sqrt[4]{m}$, а квадратичного функционала риска $L_2(f)$- порядок $const/\sqrt[8]{m}$. Оценки скорости сходимости не содержат в явном виде размерности признакового пространства (размерности вектора x), однако эта размерность может входить в оценки через константу K, характеризующую порождающее ядро k пространства H_k.

Например, для полиномиального ядра вида $k(x,x') = (1+\langle x,x'\rangle)^q,\ q \geq 1$,и n-мерного вектора x с бинарными компонентами соответствующая константа имеет вид $K=(1+n)^q$.

Глава 3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В рассматриваемых до сих пор задачах математические модели имели единственную целевую функцию, при наличии системы ограничений. Однако на практике при решении задач, связанных с принятием решений, нередко приходится учитывать набор из нескольких несоизмеримых, противоречивых целевых функций, которые необходимо рассматривать одновременно. Расширением математического программирования с единственной целевой функцией на случай нескольких целевых функций является многокритериальное программирование, или многокритериальная оптимизация.

В качестве иллюстрации можно привести следующую, часто встречающуюся, ситуацию. Необходимо принять решение о строительстве нового предприятия. Для этого из нескольких конкурсных проектов необходимо выбрать один. Критериями эффективности могут служить стоимость L_1 реализации проекта и величина прибыли L_2, которую обеспечит построенное предприятие. Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием эффективности, практическая значимость ее решения окажется незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия эффективности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум указанным следует добавить еще один – третий критерий и т. д. Рассмотренная многокритериальная задача носит название задачи выбора наилучшего проектного решения.

3.1. Формулировка многокритериальной задачи

В общем виде математическая формулировка многокритериальной задачи выглядит следующим образом.

Требуется найти значения действительных переменных $x_1,\ldots,$ x_n, при которых целевые функции

$$L_1(X),\ldots,L_p(X)$$

принимают экстремальные значения при ограничениях:

$$g_i(X) \le 0, i = 1,..., m,$$

где X — n-мерный вектор независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, $g_i(X) \le 0$ — система ограничений.

Если цели находятся в противоречии друг с другом, то не существует оптимального решения, которое удовлетворяло бы всем критериям эффективности. В этом случае вводится понятие «эффективное решение». Оно означает, что невозможно улучшить значение любой из целевых функций без ухудшения значений одной или нескольких целевых функций. Уточним введенное понятие для задачи максимизации: решение X^* называется эффективным, если не существует допустимого решения $\overline{X}$, такого, что $L_i(\overline{X}) \ge L_i(X^*)$, $i = 1, \ldots, p$, и $L_i(\overline{X}) > L_i(X^*)$ по крайней мере, для одного индекса j. Множество всех эффективных решений в непрерывном случае известно как эффективная граница. Эффективное решение называют также недоминируемым решением, неулучшаемым решением или решением по Парето[3] (Парето-оптимальным решением).

Очевидно, что наличие в математической модели каждой из таких задач нескольких целевых функций требует применения более гибких математических методов их решений.

В данном параграфе будет рассмотрено несколько задач с двумя или тремя целевыми функциями. В каждой из рассматриваемых задач критерии эффективности считаются равноправными.

3.1.1. Множество Парето

Напомним некоторые определения. Пусть на плоскости (или в пространстве) дано некоторое множество точек M. Точка P называется внутренней точкой множества M, если существует такая окрестность этой точки, которая целиком состоит из точек данного множества. Если же в любой окрестности точки P имеются точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству M, то точка P называется граничной точкой множества M. Совокупность всех граничных точек данного множества M называется его границей. Иллюстрацией служит Рис. .

[3] Вильфредо Парето (1848—1923) — итальянский социолог и экономист.

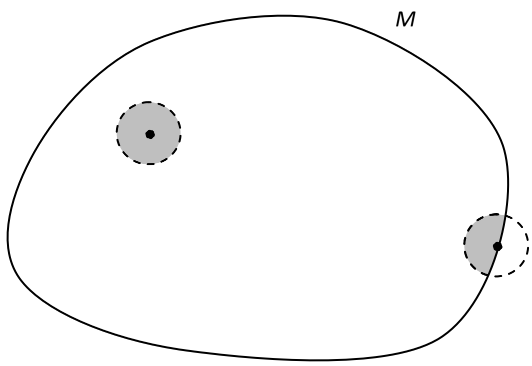


Рис. 3.1. Внутренняя и
граничная точки

Если множество M не содержит ни одной своей граничной точки, то оно называется открытым (то есть любая точка открытого множества является внутренней). Если множество M содержит все свои граничные точки, то оно называется замкнутым. В дальнейшем будут рассматриваться только замкнутые множества.

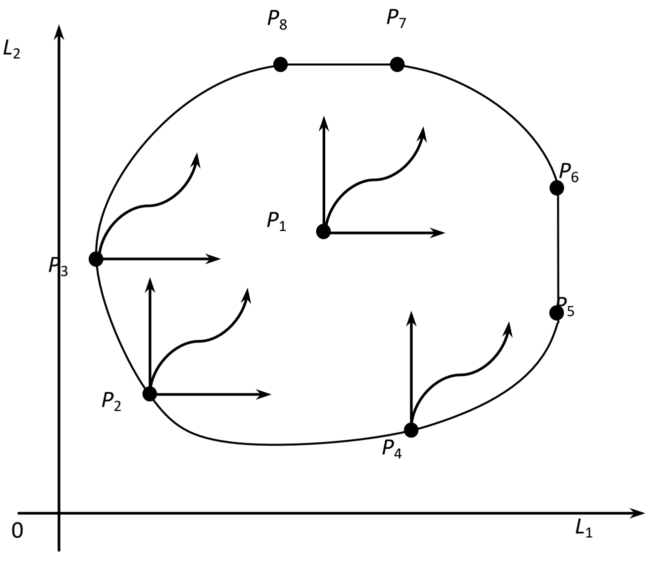


Рис.3.2. Возможные перемещения

Рассмотрим на плоскости OL_1L_2 множество M. Пусть P — произвольная точка этого множества. Возможно ли во множестве M перемещение точки P в близкую ей точку так, чтобы при этом увеличились обе ее координаты? Если P — внутренняя точка, то такое перемещение возможно. Если P — граничная точка, то такое перемещение не всегда возможно. Иллюстрацией служит Рис.. Требуемое перемещение точек P_1, P_2, P_3, P_4 возможно, а ни одна из точек как отрезков P_5P_6 и P_7P_8, так и дуги P_6P_7 такому перемещению подвергнута быть не может. Действительно, при перемещении любой точки

- вертикального отрезка P_5P_6 может увеличиваться лишь координата L_2 этой точки (координата L_1 при этом останется неизменной);
- горизонтального отрезка P_7P_8 может увеличиваться лишь координата L_1 (координата L_2 при этом останется неизменной);
- дуги P_6P_7 увеличение одной координаты влечет уменьшение другой.

Таким образом, каждая точка множества M попадает в один из трех следующих классов.

- Первый класс содержит точки, каждую из которых можно переместить так, чтобы при этом увеличились обе ее координаты, а сама точка осталась во множестве M (в этот класс попадают все внутренние точки множества M и некоторые его граничные точки (например, P_2)).
- Второй класс содержит точки, каждую из которых можно переместить во множестве M лишь при условии увеличения только одной из ее координат при сохранении значения второй (точки вертикального отрезка P_5P_6 и точки горизонтального отрезка P_7P_8).
- Третий класс содержит точки, каждую из которых можно переместить во множестве M лишь при условии уменьшения хотя бы одной из координат (точки дуги P_6P_7).

Множество точек третьего класса называют границей (множеством) Парето данного множества M. Часто говорят, что граница Парето множества M — это множество точек, из которых нельзя переместиться на «север», «восток» или «северо-восток», оставаясь во множестве M. Свойства множества Парето изучены достаточно подробно (см., например, [70]), разработаны методы и алгоритмы его построения. Считается, что наилучшие решения многокритериальной задачи следует искать именно среди множества Парето. Поэтому построение множества Парето нередко считают первым необходимым шагом в решении любой многокритериальной задачи.

3.1.2. Задача линейной многокритериальной максимизации с двумя переменными и двумя целевыми функциями

Указанная задача является частным случаем многокритериальной задачи в случае $p = 2$. Сформулируем ее. Пусть на плоскости Ox_1x_2 задано множество $\overline{X}$ (Рис.) и в каждой точке этого множества определены две непрерывные функции $L_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $L_2 = f_2(x_1, x_2)$. Необходимо найти значения переменных, при которых указанные функции принимают наибольшие значения. Формулировку задачи максимизации с двумя целевыми функциями можно записать более компактно:

$$f_1(x_1, x_2) \to \max;$$

$$f_2(x_1, x_2) \to \max$$

при ограничениях:

$$(x_1, x_2) \in \overline{X}.$$

Попытаемся ее решить. Изобразим на плоскости OL_1L_2 все точки, координаты которых удовлетворяют условиям $L_1 = f_1(x_1, x_2)$, $L_2 = f_2(x_1, x_2)$ и $(x_1, x_2) \in \overline{X}$. Полученное множество обозначим через $\overline{L}$ (Рис.).

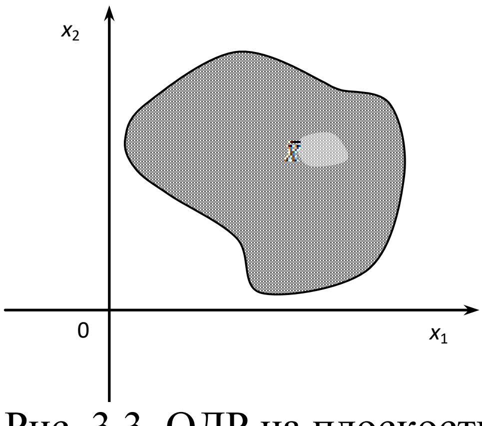


Рис. 3.3. ОДР на плоскости Ox_1x_2

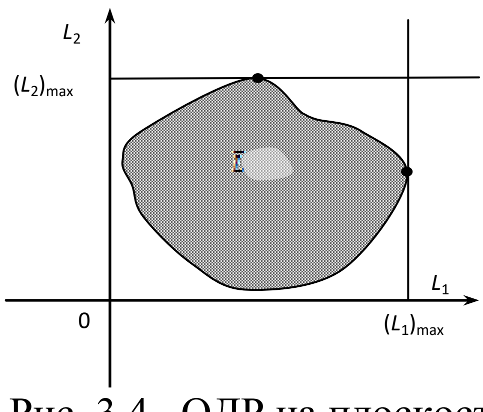


Рис. 3.4.. ОДР на плоскости OL_1L_2

Из Рис. видно, что $(L_1)_{max}$ — наибольшее значение L_1 — и $(L_2)_{max}$ — наибольшее значение L_2 — достигаются в разных точках. При этом $((L_1)_{max}, (L_2)_{max}) \notin \overline{L}$. Это означает, что задача неразрешима — не существует оптимального решения, которое одновременно максимизировало бы обе целевые функции. Поэтому нужно искать Парето-оптимальное решение. Как уже выше отмечалось, наилучшие решения многокритериальной задачи следует искать среди множества Парето. Рассмотрим два метода нахождения недоминируемого решения, связанных с множеством Парето:

1. Метод (последовательных) уступок.
2. Метод идеальной точки.

В рассматриваемом случае множество Парето составлено из допустимых точек задачи, которые не могут быть перемещены в пределах допустимого множества с улучшением сразу по двум критериям: улучшение значения одного критерия влечет ухудшение значения другого.

Метод (последовательных) уступок заключается в том, что ЛПР, работая в режиме диалога со специалистом, анализирует точки на границе Парето и выбирает одну из них — компромиссную.

Метод идеальной точки заключается в нахождении на границе Парето точки, ближайшей к точке утопии, задаваемой ЛПР. Как правило, ЛПР формулирует цель в виде определенных показателей, и часто в качестве координат целевой точки выбирается комбинация наилучших значений всех критериев (в данном случае — точка с координатами $((L_1)_{\max},\ (L_2)_{\max})$). Обычно эта точка не реализуется при заданных ограничениях, поэтому ее и называют точкой утопии.

Замечание 3.1. Задачу максимизации можно путем умножения целевой функции на (–1) преобразовать в задачу минимизации, решаемую при тех же самых ограничениях. Это связано с наличием следующего свойства: функция $(-f)$ достигает наибольшего значения в тех точках, в которых функция f принимает наименьшее значение, и наоборот. Это означает, что условия [$f \to \min$] и [$(-f) \to \max$] равносильны. Следовательно, поменяв знак целевой функции на противоположный, любую двухкритериальную задачу можно свести к задаче максимизации с двумя целевыми функциями.

3.1.3. Применение метода идеальной точки

Дадим подробную иллюстративную характеристику применения метода идеальной точки к конкретным задачам оптимизации с двумя целевыми функциями. Это позволит не приводить последующего его формального описания.

Пример 3.1. Найти значения переменных, при которых функции

$$L_1 = 2x_1 + x_2 + 1 \longrightarrow \max;$$
$$L_2 = x_1 - x_2 + 5 \longrightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 0 \le x_1 \le 6, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

Решение. Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2 и построим множество $\overline{X}$ — область допустимых решений данной задачи в указанной системе координат. Ограничительные условия определяют на плоскости многоугольник *ABCDE* (Рис.), вершины которого имеют соответственно координаты: (0; 0), (0; 3), (2; 3), (6; 1), (6; 0). Следовательно, $\overline{x}$ представляет собою многоугольник *ABCDE*.

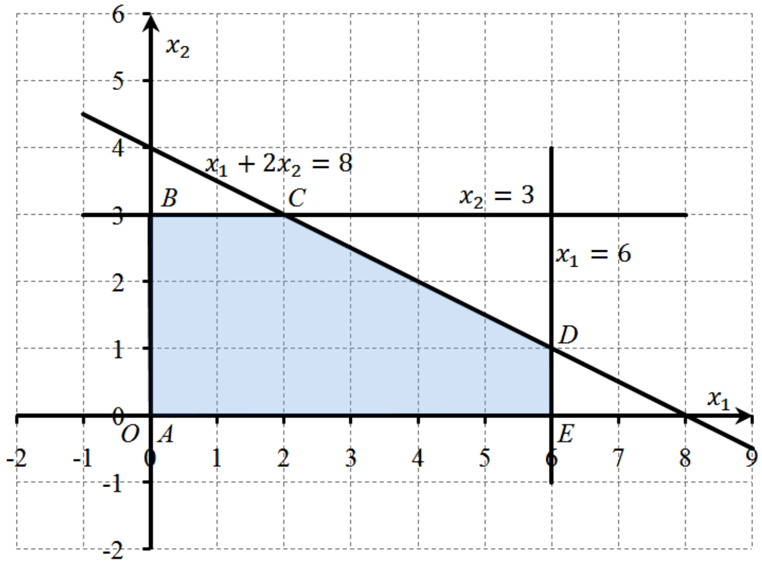


Рис. 3.5. Область допустимых решений на плоскости Ox_1x_2

Подвергнем координаты каждой точки плоскости Ox_1x_2 преобразованиям $L_1 = 2x_1 + x_2 + 1$ и $L_2 = x_1 - x_2 + 5$. Получим плоскость OL_1L_2. При этом в силу линейности проводимых преобразований прямоугольная система координат Ox_1x_2 перейдет в прямоугольную систему координат OL_1L_2, а многоугольник *ABCDE* в многоугольник $A^*B^*C^*D^*E^*$, вершины которого имеют соответственно координаты: (1;5), (4;2), (8;4), (14;10), (13;11) (

Рис.). Для наглядности укажем описанное соответствие вершин: $A(0;\ 0) \rightarrow A^*(1;5)$, $B(0;3) \rightarrow B^*(4;2)$, $C(2;3) \rightarrow C^*(8;4)$, $D(6;1) \rightarrow D^*(14;10)$, $E(6;0) \rightarrow E^*(13;11)$.

Таким образом, все точки, координаты которых удовлетворяют условиям $L_1 = 2x_1 + x_2 + 1$, $L_2 = x_1 - x_2 + 5$ и $(x_1, x_2) \in \overline{X}$, определяют на плоскости многоугольник $A^*B^*C^*D^*E^*$. Следовательно, область допустимых решений $\overline{L}$ данной задачи в системе координат OL_1L_2 (пространстве критериев) представляет собою многоугольник $A^*B^*C^*D^*E^*$.

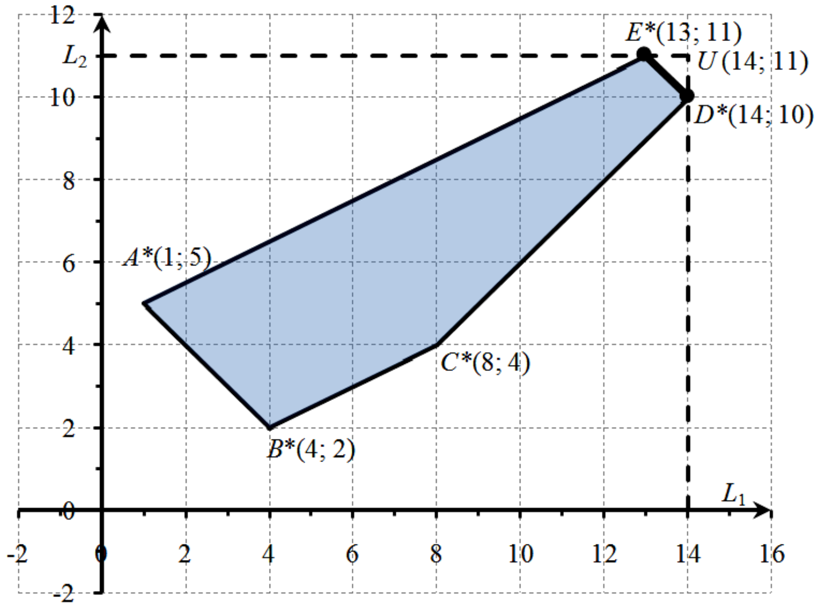


Рис. 3.6. ОДР в пространстве критериев и множество Парето

Находим множество Парето. Это отрезок D^*E^*. В условии задачи не сказано, что считать точкой утопии. Поэтому выбираем комбинацию наилучших значений всех критериев. В данном случае это точка U с координатами (14;11).

Теперь необходимо найти во множестве Парето точку, расположенную ближе всех к точке утопии U. Из

Рис. видно, что точка $I(I_1, I_2)$, являющаяся основанием перпендикуляра, проведенного из точки U (14;11) к прямой D^*E^*, принадлежит отрезку D^*E^*. Это означает, что точка I — искомая. Найдем ее координаты.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки. Имеем

$$\frac{L_1 - L_{1,D*}}{L_{1,E*} - L_{1,D*}} = \frac{L_2 - L_{2,D*}}{L_{2,E*} - L_{2,D*}},$$

где $L_{1,D*}, L_{2,D*}$ и $L_{1,E*}, L_{2,E*}$ — координаты точек $D*$ и $E*$ соответственно. Подставляя сюда числовые значения для координат $D*$ и $E*$, находим:

$$\frac{L_1 - 14}{13 - 14} = \frac{L_2 - 10}{11 - 10}, \text{ или } L_1 + L_2 = 24.$$

Нормальным вектором прямой $D*E*$ является вектор $\vec{N}\,(1;1)$, направляющим вектором для прямой UI. Следовательно, ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{L_1 - L_{1,U}}{1} = \frac{L_2 - L_{2,U}}{1},$$

где $L_{1,U}, L_{2,U}$ — координаты точки U. Подставляя сюда числовые значения для координат U, находим:

$$\frac{L_1 - 14}{1} = \frac{L_2 - 11}{1}, \text{ или } L_1 - L_2 = 3.$$

Точка I принадлежит прямым $D*E*$ и UI (Рис.). Поэтому ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = 24, \\ I_1 - I_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда находим $I_1 = \frac{27}{2}$, $I_2 = \frac{21}{2}$.

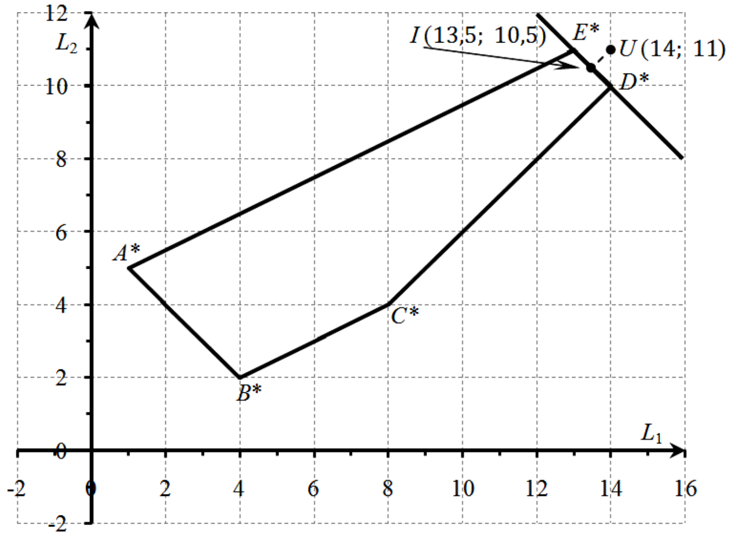


Рис. 3.7. Идеальная точка

Расстояние d между точками $I\left(\frac{27}{2};\frac{21}{2}\right)$ и $U(14;\ 11)$ равно длине вектора $\vec{IU}=\ \left(14-\frac{27}{2};\ 11-\frac{21}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, которая, в свою очередь, равна корню квадратному из суммы квадратов его координат. Поэтому $d=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Соответствующие значения x_1, x_2 найдем из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+1=\frac{27}{2}, \\ x_1-x_2+5=\frac{21}{2}. \end{cases}$$

Имеем $x_1=6, x_2=\frac{1}{2}$.

Таким образом, Парето-оптимальное решение $L_1=\frac{27}{2}, L_2=\frac{21}{2}$ достигается при $x_1=6, x_2=\frac{1}{2}$, а идеальная точка $\left(\frac{27}{2};\frac{21}{2}\right)$ находится от точки утопии (14; 11) на расстоянии $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Замечание 3.2. При нахождении расстояния между точкой утопии и идеальной точкой, учитывая топологию множества Парето, был применен «геометрический» метод. В общем случае задача нахождения расстояния между указанными точками решается как экстремальная. Необходимо найти на множестве Парето точку, такую, что расстояние между ней и точкой утопии минимально:

$$\sqrt{(I_1-U_1)^2+(I_2-U_2)^2} \to \min,$$

или, опуская знак квадратного корня,

$$(I_1-U_1)^2+(I_2-U_2)^2 \to \min,$$

где I_1 и I_2 — неизвестные координаты искомой точки I, а U_1 и U_2 — уже найденные координаты точки утопии U.

Предлагается в качестве упражнения определить в задаче примера 3.1 идеальную точку только что описанным способом.

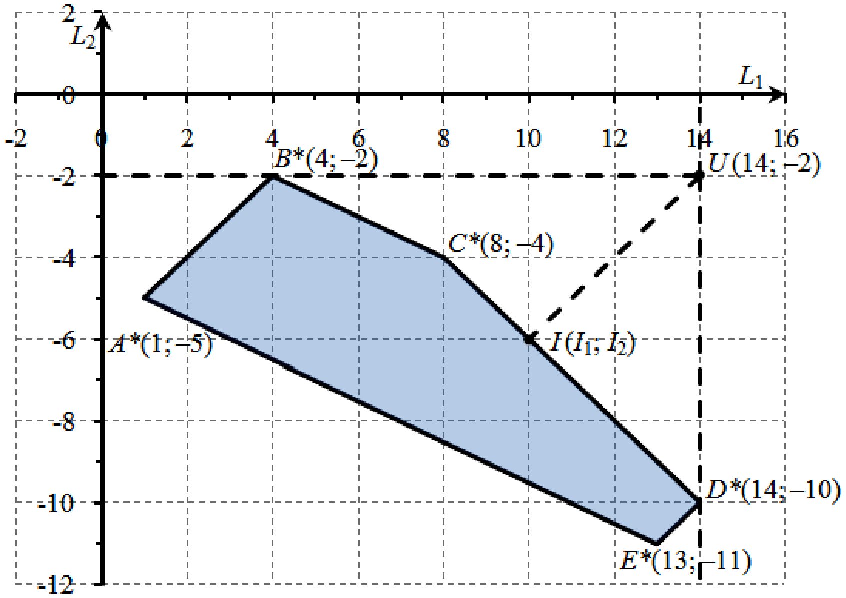
Пример 3.2. Найти значения переменных, при которых функции

$$L_1=2x_1+x_2+1 \to \max;$$
$$L_2=\ x_1-x_2+5 \to \min$$

при тех же ограничениях, что и в примере 3.1.

Решение. Введем функцию $L_2'=-x_1+x_2-5$. Тогда, согласно замечанию 3.1, исходная задача преобразуется в задачу максимизации

$$L_1=2x_1+x_2+1 \to \max;$$



$$L_2' = -x_1 + x_2 - 5 \longrightarrow \max.$$

Рис. 3.8. Геометрическая интерпретация задачи максимизации

Ограничительные условия те же, что и в примере 3.1. Они определяют на плоскости Ox_1x_2 многоугольник *ABCDE* (Рис.), который функции $L_1 = 2x_1 + x_2 + 1$ и $L_2' = -x_1 + x_2 - 5$ переводят в многоугольник *A*B*C*D*E**. Его вершины в плоскости OL_1L_2' (пространстве критериев) имеют соответственно координаты: $(1;\ -5)$, $(4;-2)$, $(8;-4)$, $(14;\ -10)$, $(13;\ -11)$ (Рис.).

Множество Парето образуют точки ломаной *B*C*D**. Как и в примере 3.1, в условии не сказано, что считать точкой утопии. Поэтому снова выбираем комбинацию наилучших значений всех критериев. В данном случае это точка *U* с координатами $(14;-2)$ (заметим, что в исходной задаче ей соответствует точка с координатами $(14;2)$, и, следовательно, в исходной задаче точкой утопии является она). Из Рис. видно, что точка, принадлежащая ломаной *B*C*D** и находящаяся на минимальном расстоянии от точки утопии, должна принадлежать отрезку *C*D**. Обозначим ее через $I\,(I_1;I_2)$. Для отыскания ее координат воспользуемся способом, описанным в замечании 3.2. Согласно этому способу, нужно минимизировать функцию расстояния d между точкой I ($I_1; I_2$) и точкой $U(14; -2)$:

$$d = \sqrt{(I_1 - 14)^2 + (I_2 + 2)^2} \rightarrow \min,$$

или

$$y = (I_1 - 14)^2 + (I_2 + 2)^2 \rightarrow \min.$$

Составим уравнение прямой C^*D^* (подробности см. в примере 1). Имеем

$$\frac{L_1 - 8}{14 - 8} = \frac{L_2' + 4}{-10 + 4}, \text{ или } L_1 + L_2' = 4.$$

Точка I принадлежит множеству точек отрезка C^*D^*. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой C^*D^*: $I_1 + I_2 = 4$, или $I_1 = -I_2 + 4$. Это означает, что минимизируется функция $y = 2(I_2)^2 + 24I_2 + 104$ на отрезке $[-10;-4]$. Вычисляем производную $y' = 4I_2 + 24$ и находим стационарную точку: $I_2 = -6$. Легко видеть, что $y' < 0$ на промежутке $[-10;-6)$ и $y' > 0$ на промежутке $(-6; -4]$. Следовательно, (-6) — точка минимума функции $y(I_2)$ на отрезке $[-10; -4]$, а $(10; -6)$ — точка минимума функции $y(I_1, I_2) =$ $(-I_1 - 10)^2 + (I_2 + 2)^2$ в замкнутой области, определяемой неравенствами $8 \le I_1 \le 14$ и $-10 \le I_2 \le -4$, при этом $d_{\min} = d(10; -6) = \sqrt{(10 - 14)^2 + (-6 + 2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Заметим, что в исходной задаче точке $(10; -6)$ соответствует точка $(10; 6)$.

Соответствующие значения x_1, x_2 найдем из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 = 10, \\ -x_1 + x_2 - 5 = -6. \end{cases}$$

Имеем $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{7}{3}$.

Таким образом, Парето-оптимальное решение $L_1 = 10, L_2 = 6$ достигается при $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{7}{3}$. При этом идеальная точка $(10; 6)$ находится от точки утопии $(14; 2)$ на расстоянии $4\sqrt{2}$.

3.1.4. Пример решения экономической задачи с двумя критериями эффективности

В качестве примера рассмотрим конкретную задачу из практики действующего предприятия (задачу регионального уровня).

Задача 3.1. ОАО «Мукомольный завод» реализует хлебопекарную муку высшего сорта двумя способами: через сеть магазинов и через прямые поставки по договорам неторговым организациям. Известно, что ежемесячно магазины могут реализовать не более 50 тыс., а ежемесячные поставки неторговым организациям не должны превышать 35 тыс. т муки. Для продажи в каждом месяце выделяется не более 45 тыс. т муки. Предприятие выработало определенную политику в области ценообразования, которой собиралось следовать. Однако в связи с сильно изменившейся экономической ситуацией, затраты на реализацию увеличились, а мука вошла в перечень продуктов, которые должны продаваться по ранее установленной цене, регулируемой местной властью. При продаже одной тонны муки через магазины расходы на реализацию стали составлять 7 тыс. руб., а цена осталась прежней — 10 тыс. руб.; при втором способе реализации расходы и цена составили 4 и 6 тыс. руб. соответственно. Необходимо определить, сколько тонн муки следует продавать каждым способом, чтобы расходы были минимальными, а выручка от продажи — максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Пусть x_1 и x_2 — объемы (тысячи тонн) реализуемой в ноябре хлебопекарной муки высшего сорта через сеть магазинов и через прямые поставки по договорам неторговым организациям соответственно.

Тогда целевые функции имеют вид:

$$L_1 = 7x_1 + 5x_2 \to \min;$$

$$L_2 = 10x_1 + 8x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 45, \\ 0 \le x_1 \le 50, \\ 0 \le x_2 \le 35. \end{cases}$$

Введем функцию $L_1' = -7x_1 - 5x_2$. Тогда исходная задача преобразуется в задачу максимизации

$$L_1' = -7x_1 - 5x_2 \to \max;$$

$$L_2 = 10x_1 + 8x_2 \to \max.$$

Ограничительные условия остаются прежними. Они определяют на плоскости Ox_1x_2 многоугольник $ABCD$ (Рис.), который функции L_1' и L_2 переводят в многоугольник $A^*B^*C^*D^*$ плоскости $OL_1'L_2$ (

Рис.):

$A(0; 0) \to A^*(0; 0)$, $B(0; 35) \to B^*(-175; 280)$, $C(10; 35) \to C^*(-245; 380)$, $D(45; 0) \to D^*(-315; 450)$.

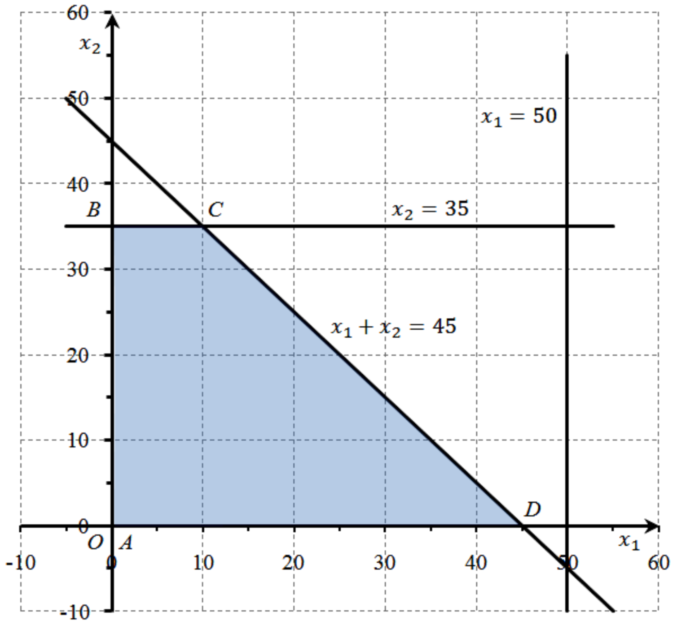


Рис. 3.9. ОДР на плоскости Ox_1x_2

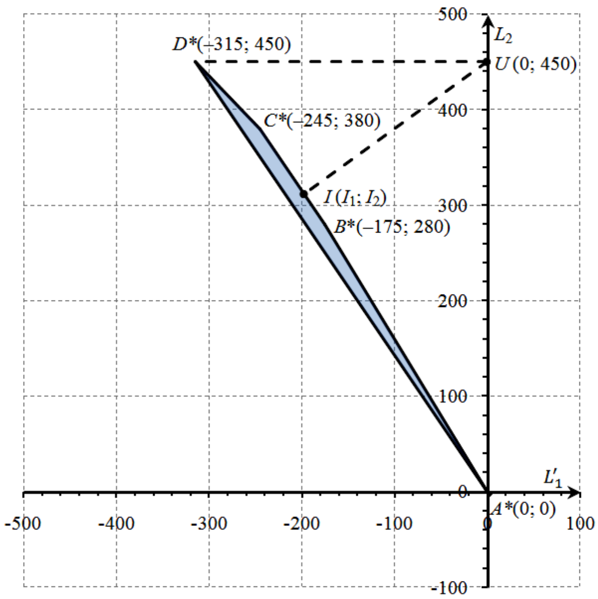


Рис. 3.10. Геометрическая интерпретация задачи максимизации,

эквивалентной задаче 3.1

Множество Парето образуют точки ломаной $A^*B^*C^*D^*$. Выбираем комбинацию наилучших значений всех критериев. В данном случае это точка U с координатами $(0;450)$. Необходимо найти во множестве Парето точку, расположенную ближе всех к точке утопии U. Обозначим ее через $I\ (I_1; I_2)$. Для отыскания координат указанной точки минимизируем функцию расстояния d между точкой $I\ (I_1; I_2)$ и точкой $U(0; 415)$:

$$d=\sqrt{I_1^2+(I_2-450)^2}\longrightarrow \min,$$

или

$$y=I_1^2+(I_2-450)^2\longrightarrow \min.$$

Из

Рис. видно, что искомая точка находится на отрезке B^*C^*.

Составим уравнение прямой B^*C^*. Имеем

$$\frac{L_1'+245}{-175+245}=\frac{L_2-380}{280-380},\ \text{или}\ 10L_1'+7L_2=210.$$

Точка I принадлежит множеству точек отрезка B^*C^*. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой B^*C^*: $10I_1+7I_2=210$, или $I_2=-\frac{10}{7}I_1+30$. Это означает, что на отрезке $[-245;-175]$ минимизируется функция $y=\frac{149}{49}I_1^2+1200I_1+420^2$. Вычисляем производную $y'=\frac{298}{49}I_1+1200$ и находим стационарную точку: $I_1=-197\frac{47}{149}$. Из того, что $y'<0$ на промежутке $[-45; -197\frac{47}{149})$ и $y'>0$ на промежутке $(-197\frac{47}{149}; -175]$, следует: $(-197\frac{47}{149})$ — точка минимума функции $y(I_1)$ на отрезке $[-245;-175]$. Тогда $(-197\frac{47}{149};\ 311\frac{917}{1043})$ — искомая точка, что соответствует точке $(197\frac{47}{149};\ 311\frac{917}{1043})$ в исходной задаче.

Соответствующие значения x_1, x_2 найдем из системы линейных уравнений

$$\begin{cases}7x_1+5x_2=197\dfrac{47}{149},\\ 10x_1+8x_2=311\dfrac{917}{1043}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1043x_1+745x_2=2940,\\ 10430x_1+8344x_2=325290.\end{cases}$$

Имеем $x_1=3\frac{196}{1043};\ x_2=35.$

Таким образом, объемы реализации хлебопекарной муки высшего сорта ОАО «Мукомольный завод» должны составить: $\approx$3,19 тыс. т через сеть магазинов и 35 тыс. т через прямые поставки по договорам неторговым организациям. При таких способах и объемах реализации расходы будут минимальными (составят $\approx$197,32 тыс. руб.),а выручка — максимальной (составит $\approx$ 311,88 тыс. руб.).

3.1.5. Применение симплексного метода при решении многокритериальных задач

Математическая модель каждой из таких задач имеет несколько целевых функций, что, как уже отмечалось, требует применения более гибких математических методов их решения. Например, многокритериальную модель, содержащую несколько задач с весовыми коэффициентами предпочтения, можно рассматривать как частный случай задач в условиях неопределенности. Если же вопроса о приоритетах не касаться, ограничившись рассмотрением задач с несколькими критериями, считая их равноправными, то можно предложить следующий способ решения.

Сначала сформулируем задачу:

$$L_1(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} x_j \to \max,$$

$$L_2(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} x_j \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le Bi,$$

$$x_j \ge 0 \text{ для } i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}\,.$$

Теперь опишем один из возможных методов ее решения.

1.Решают задачу

$$L_1(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} x_j \to \max,$$

при тех же ограничениях, что и у исходной задачи.

2. Решают задачу

$$L_2(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} x_j \to \min,$$

оставляя ограничения неизменными.

3. Решают задачу

$$L = x_{n+1} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_J^{(1)} x_j + L_{1\max} x_{n+1} \geq L_{1\max}, \\ \sum_{j=1}^{n} c_J^{(2)} x_j - L_{2\min} x_{n+1} \leq L_{2\min}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \text{ для } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

На каждом из этапов применяют симплексный метод.

Алгоритм нахождения эффективного решения задач, имеющих более двух целевых функций, аналогичен.

В качестве примера рассмотрим задачу, состоящую в нахождении оптимального выпуска продукции.

Задача 3.2. АООТ «Прицеп» выпускает 4,5-тонные прицепы и кормораздатчики по цене 40,3 и 74,3 тыс. руб. соответственно. По результатам маркетинговых испытаний спрос на изделия первого вида не менее 1 200 шт. в год. Для производства прицепов используются сталь и чугун, запасы которых на предприятии составляют 25 000 и 4 500 т соответственно. Для изготовления одной тысячи прицепов норма расхода стали составляет 1 615 т, а чугуна — 385 т. Для изготовления одной тысячи кормораздатчиков расходуется: стали — 2 022 т, чугуна — 478 т. Себестоимость прицепов — 34,66, а кормораздатчиков — 63,9 тыс. руб. Составить годовой план производства прицепов и кормораздатчиков, такой, чтобы количество выпускаемых изделий и выручка от их реализации были максимальными, а себестоимость — минимальной.

Решение. Обозначим через x_1 количество прицепов (тыс. шт.); x_2 — количество кормораздатчиков (тыс. шт.), выпускаемых АООТ «Прицеп» в год.

Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$L_1 = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$L_2 = 40{,}3x_1 + 74{,}3x_2 \to \max,$$
$$L_3 = 34{,}66x_1 + 63{,}9x_2 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 1615x_1 + 2022x_2 \le 25000 \text{ (ограничение по стали)}, \\ 385x_1 + 478x_2 \le 4500 \text{ (ограничение по чугуну)}, \\ x_1 \ge 1{,}2 \text{ (ограничение по спросу)} \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Применяя симплексный метод, решим задачу по каждой целевой функции в отдельности. Получим

$$X_{1\ \text{опт}} = (11{,}688;\ 0),\ X_{2\ \text{опт}} = (1{,}2;\ 8{,}448),\ X_{3\ \text{опт}} = (1{,}2;\ 0),$$
$$L_{1\max} = 11{,}688,\ L_{2\max} = 676{,}0464,\ L_{3\min} = 41{,}592.$$

Математическая модель задачи нахождения эффективного решения в канонической форме имеет вид:

$$L = x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 11{,}688x_3 - x_4 = 11{,}688, \\ 40{,}3x_1 + 74{,}3x_2 + 676{,}05x_3 - x_5 = 676{,}05, \\ 34{,}66x_1 + 63{,}9x_2 + 41{,}592x_3 + x_6 = 41{,}592, \\ 1615x_1 + 2022x_2 + x_7 = 25000, \\ 385x_1 + 478x_2 + x_8 = 4500, \\ x_1 - x_9 = 1{,}2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,9}.$$

Получим $X_{\text{эффект}} = (1{,}2;\ 0{,}564)$. Таким образом, АООТ «Прицеп» целесообразно выпускать 1 200 прицепов и 564 кормораздатчика ежегодно. При таком плане производства количество изделий и выручка от их реализации будут максимальными (составят 1 764 единиц и 90,096 млн руб. соответственно), а себестоимость — минимальной (составит 77,6316 млн руб.).

3.2. Многокритериальная задача нечеткого линейного программирования

До сих пор исследовались задачи нечеткого линейного программирования с одним критерием, т. е. с единственной целевой функцией. Но наш подход может быть легко распространен на многокритериальный случай.

Многокритериальная задача нечеткого линейного программирования, соответствующая задаче нечеткого линейного программирования (3.1), определяется следующим образом:

«максимизировать» $\tilde{c}_{k1}\tilde{x}_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{c}_{kn} x_n,\ k \in K,$

$$\text{при ограничениях} \quad \begin{array}{l} (\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} .. + \tilde{a}_{in}x_n)\, \tilde{R}_i \tilde{b}_i,\ i \in M, \\ x_j \geq 0,\ j \in N, \end{array} \qquad (3.1)$$

где K = {1,2, ... , q} - множество нечетких критериев, а $\mu_{\tilde{c}_{kj}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{b}_i} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $k \in K, i \in M, j \in N$, - функции принадлежности нечетких параметров $\tilde{c}_{kj}, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$, соответственно.

Чтобы «максимизировать» целевые функции, можно использовать понятия «оптимального решения», аналогичные тем, что были реализованы в случае одного критерия, а именно,

1) идею удовлетворяющего решения,

2) идею α - эффективного решения.

Для определения компромиссного решения многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования мы развиваем далее лишь подход на основе удовлетворяющего решения. Другой путь может быть реализован аналогичным образом.

Итак, для каждого критерия

$$\tilde{f}_k(x, \tilde{c}_k) = \tilde{c}_{k1}x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{c}_{kn}x_n,\quad k \in K, \qquad (3.2)$$

мы допускаем существование заданной дополнительной цели $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$ - некоторого нечеткого множества на вещественной оси. Определение цели может быть существенным для качества «оптимального» решения. Его смысл зависит, однако, от природы критериев, будучи в некотором смысле идеальными значениями соответствующих критериев. Нечеткое значение $\tilde{f}(x, \tilde{c}_k)$ функции критерия сравнивается с целью $\tilde{d}_k$ с помощью некоторого нечеткого отношения S_k, также заданного извне. Тогда нечеткие критерии обрабатываются как ограничения $\tilde{f}(x,\tilde{c}_k)\tilde{S}_k\ \tilde{d}_k$.

Определение 3.1. Пусть f_k, $k \in K$, - линейные функции (3.2). Пусть $\mu_{\tilde{c}_{kj}}$: $\mathbb{R} \to [0,1]$ - функции принадлежности нечетких параметров $\tilde{c}_{kj}$, и пусть $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$ - нечеткие подмножества $\mathbb{R}$, называемые нечеткими целями, $k \in K$,, $j \in N$. Кроме того, пусть $\tilde{S}_k, k \in K$, - нечеткие отношения, задаваемые функциями принадлежности $\mu_{\tilde{S}_k}$: $F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \to [0, 1]$, и пусть G_F - оператор агрегирования.

Нечеткое подмножество $\tilde{F}$ в $\mathbb{R}^n$, заданное функцией принадлежности $\mu_{\tilde{F}}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, которая определяется как

$$\mu_{\tilde{F}}(x) = G_F\left(\mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_1(x,\tilde{c}_1),\ \tilde{d}_1\right), ...,\ \mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_k(x,\tilde{c}_k),\ \tilde{d}_k\right)\right), \quad (3.3)$$

называется критериальным нечетким множеством многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (3.1).

Для $k \in K$, мы будем через $\tilde{F}_k$ обозначать нечеткое множество, заданное функцией принадлежности $\mu_{\tilde{F}_k}$, которая определяется для всех $x \in \mathbb{R}^n$ как

$$\mu_{\tilde{F}_k}(x) = \mu_{\tilde{S}_k}\left(\tilde{f}_k(x,\tilde{c}_k),\ \tilde{d}_k\right). \quad (3.4)$$

Заметим, что в случае задачи с одним критерием (т.е. когда q=1), оператор агрегирования G_F является тождественным оператором, и функция принадлежности критериального нечеткого множества равна $\mu_{\tilde{F}_k}(x) = \mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_1(x,\tilde{c}_1),\ \tilde{d}_1\right)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 3.2. Пусть f_k, $k \in K$, g_i, $i \in M$, - некоторые функции, $\tilde{c}_{k_j}, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ - нечеткие параметры, и $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$ - нечеткие цели. Кроме того, пусть $\tilde{R}_i$ и $\tilde{S}_k$ - нечеткие отношения, задаваемые Определениями 3.1 и 3.2. Наконец, пусть G_X, G_F и G - операторы агрегирования.

Нечеткое множество $\tilde{X}^*$, задаваемое для всех $x \in \mathbb{R}^n$ функцией принадлежности $\mu^*_{\tilde{X}}$, определяемой как

$$\mu^*_{\tilde{X}}(x) = G(\mu_{\tilde{X}}(x),\ \mu_{\tilde{F}}(x)), \quad (3.5)$$

называется компромиссным решением многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (3.1), где $\mu_{\tilde{F}}$ и $\mu_{\tilde{X}}$ являются функциями принадлежности критериального нечеткого множества и допустимого решения, соответственно [116].

Для α ∈ (0,1] вектор $x \in [\tilde{X}^*]_\alpha$ называется α-компромиссным решением многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (3.1). Вектор $x^* \in \mathbb{R}^n$, обладающий свойством $\mu^*_{\tilde{X}}(x^*) = Hgt(\tilde{X}^*)$, называется max - компромиссным решением.

Заметим, что компромиссное решение $\tilde{X}^*$ многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования является нечетким подмножеством $\mathbb{R}^n$. В случае задачи с одним критерием компромиссное решение, в действительности, является удовлетворяющим решением. Кроме того, $\tilde{X}^* \subseteq \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ — допустимое решение.

С другой стороны, α - компромиссное решение является вектором, также как и max - компромиссное решение, которое является α -компромиссным решением при $\alpha = Hgt(\tilde{X}^*)$.

В Определении 3.2 рассматривались три оператора агрегирования G_X, G_F и G. Первый оператор G_X использовался для объединения отдельных ограничений в допустимое решение согласно Определению 3.1; второй – G_F - применялся для агрегирования отдельных критериев, а с помощью третьего оператора G объединялись критерии и ограничения. Иногда может оказаться трудным или даже невозможным выбрать подходящий агрегирующий оператор для комбинирования критериев и ограничений. В этом случае можно применить хорошо известную идею Парёто - оптимального решения, адаптированную к «новым критериям», представленным функциями принадлежности $\mu_{\tilde{X}}$ и $\mu_{\tilde{F}}$ (см. также [115]).

Определение 3.3. Пусть $\mu_{\tilde{X}}$ и $\mu_{\tilde{F}}$ - функции принадлежности критериального нечеткого множества из Определения 3.1 и допустимого решения, данного Определением 3.2, соответственно.

Говорим, что вектор $x^p \in \mathbb{R}^n$ является Парёто - оптимальным решением многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (3.1), если не существует ни одного вектора $x \in \mathbb{R}^n$, такого что

$$\mu_{\tilde{X}}(x^p) \le \mu_{\tilde{X}}(x) \qquad и \quad \mu_{\tilde{F}}(x^p) < \mu_{\tilde{F}}(x)$$

или

$$\mu_{\tilde{X}}(x^p) < \mu_{\tilde{X}}(x) \qquad и \quad \mu_{\tilde{F}}(x^p) \le \mu_{\tilde{F}}(x)$$

Отметим, что Парето - оптимальное решение x^p задачи (3.1) является четким вектором. О дальнейших свойствах и связях между Парёто - оптимальными и компромиссными решениями см. [115].

Поскольку задача (3.1) является задачей максимизации (т.е. поиска оптимума по принципу «чем больше значение критерия, тем лучше»), функции принадлежности $\mu_{\tilde{d}_k}$ нечетких целей $\tilde{d}_k$ должны быть возрастающими или неубывающими. По этой же причине нечеткие отношения $\tilde{s}_k$, используемые для сравнения $\tilde{f}_k(x,\tilde{c}_k)$ и $\tilde{d}_k$, должны быть типа «больше или равно». Здесь отношения $\tilde{s}_k$ рассматриваются как T-нечеткие расширения обычной бинарной операции сравнения « $\geq$ », где T - t-норма.

Формально в Определениях 3.1 и 3.2 понятия допустимого решения и компромиссного решения очень похожи друг на друга. Таким образом, можно воспользоваться результатами, полученными ранее в предыдущей части данной главы. Нетрудно показать, что *max* - компромиссное решение в случае задачи с одним критерием и четкими векторами параметров c_1, a_i и b, совпадает с оптимальным решением задачи классического линейного программирования при условии возрастания $\tilde{d}_1$. Кроме того, если $\tilde{X}^{*'}$- компромиссное решение многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (3.1) с параметрами $\tilde{c}_1', \tilde{a}_i', и\ \tilde{b}'$ а $\tilde{X}^{*''}$ - компромиссное решение подобной задачи с параметрами $\tilde{c}_1'', \tilde{a}_i'', и\ \tilde{b}''$, такими что $\tilde{c}_1' \subseteq \tilde{c}_1''$, $\tilde{a}_i' \subseteq \tilde{a}_i''\ и\ \tilde{b}' \subseteq \tilde{b}''$, для всех $i \in M$, *то* $\tilde{X}^{*'} \subseteq \tilde{X}^{*''}$. *В* частности, в случае четкого оптимального решения x задачи линейного программирования с одним критерием и параметрами в виде четких чисел степень принадлежности компромиссного решения x соответствующей многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования с нечеткими параметрами равна единице. Этот факт делает возможным естественное вложение класса четких многокритериальных задач линейного программирования в класс многокритериальных задач нечеткого линейного программирования.

Следующее предложение аналогично для задачи с одним критерием.

Предложение 3.1. Пусть для всех $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mu_{\tilde{F}_j}(x) = \mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x, \tilde{c}_j), \tilde{d}_j\right), \; j \in K,$$

u

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) = \mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{g}_i(x, \tilde{a}_i), \tilde{b}_i), \quad i \in M$$

являются функциями принадлежности нечетких критериев и нечетких ограничений многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (3.1), соответственно. Пусть G_X = G_F = G = min, и пусть $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$, $k \in K$, — нечеткие цели.

Вектор $(t^*, x^*) \in {}^{+1}$ является оптимальным решением задачи

максимизировать $\quad t$

при ограничениях $\quad \mu_{\tilde{F}_j}(x) \geq t, \; k \in K,$

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) \geq t, \quad i \in M, \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

тогда и только тогда, когда x* является тах - компромиссным решением задачи (3.1).

Доказательство. Пусть x^* является *тах*-компромиссным решением задачи (3.1) и пусть

$$t^* = \min\{ \mu_{\tilde{X}}(x^*), \mu_{\tilde{F}}(x^*)\}$$

где в силу (3.3)

$$\mu_{\tilde{F}}(x^*) = \min_{j \in K} \left\{\mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x^*, \tilde{c}_j), \tilde{d}_j\right)\right\}$$

и согласно (3.5)

$$\mu_{\tilde{X}}(x^*) = \min_{i \in M} \left\{\mu_{\tilde{R}_i}\left(\tilde{g}_i(x^*, \tilde{a}_i), \tilde{b}_i\right)\right\}.$$

Тогда

$$t^* = \max_{x \in R^n} \min \left\{\mu_{\tilde{X}}(x), \mu_{\tilde{F}}(x)\right\},$$

$$\mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x^*, \tilde{c}_j), \tilde{d}_j\right) \geq t^*, \qquad j \in K,$$

$$\mu_{\tilde{R}_i}\left(\tilde{g}_i(x^*, \tilde{a}_i), \tilde{b}_i\right) \geq t^*, \qquad i \in M.$$

Как следствие, вектор $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ является оптимальным решением задачи (3.6).

С другой стороны, пусть $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ - оптимальное решение задачи (3.6). Тогда

$$t^* = \min_{j \in K, i \in M} \left\{\mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x^*, \tilde{c}_j), \tilde{d}_j\right), \mu_{\tilde{R}_i}\left(\tilde{g}_i(x^*, \tilde{a}_i), \tilde{b}_i\right)\right\},$$

и это означает, что вектор x^* является max-компромиссным решением задачи (3.1).

Рассмотрим следующую задачу. Инвестор имеет сумму в 12 млн. долларов в начале рассматриваемого периода времени и решает вопрос об участии в двух инвестиционных проектах. Длительность обоих проектов- три года. Неиспользованные остатки сумм в каждом отдельном году можно положить на временный депозит. Рассматриваемые доходы и затраты характеризуются неопределенностью и могут быть формализованы как нечеткие числа. Задача состоит в том, чтобы найти стратегию (не являющуюся нечеткой) максимизации величины ресурсов в конце данного трехлетнего периода. Эта задача оптимального инвестирования может быть сформулирована как модельная задача нечеткого линейного программирования

максимизировать $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} c_2 x_2 \tilde{+} (1 \tilde{+} \tilde{u}_3) p_3$

при ограничениях

$$\begin{array}{llr} \tilde{a}_{11} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{12} x_2 \tilde{+} p_1 & & \cong 12, \\ \tilde{a}_{12} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{22} x_2 \tilde{+} (1 \tilde{+} \tilde{u}_1) p_1 \simeq p_2 & & \cong 0, \\ \tilde{a}_{31} x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{32} x_2 & \tilde{+} (1 \tilde{+} \tilde{u}_2) p_2 \simeq p_3 & \cong 0, \\ & x_1, x_2 & \le 1, \\ & x_1, x_2, p_1, p_2, p_3 & \ge 0, \end{array} \qquad (3.7)$$

где приняты следующие обозначения:

$\tilde{c}_i$ - нечеткий доход от i - го проекта, i = 1,2, в конце указанного периода;

$\tilde{a}_{ij}$ - нечеткий доход / затраты от i-го проекта, i = 1,2, в j – ом году j= 1, 2, 3;

$\tilde{u}_i$ - нечеткая процентная ставка в году j = 1, 2, 3;

x_i - мера участия в i - ом проекте, i = 1,2;

p_j - распределение ресурсов в j-ом году, j = 1,2,3;

$\cong$ - отношение нечеткого равенства.

Пусть $\tilde{a} = (a_L, a_C, a_R)$ - треугольное нечеткое число и $a_L < a_c < a_R$, где a_L называется левым значением числа $\tilde{a}$, a_C называется средним, а a_R - правым значением числа $\tilde{a}$. Тогда функция принадлежности числа $\tilde{a}$ задается выражением

$$\mu_{\tilde{a}}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - a_L}{a_c - a_L},\ \frac{a_R - t}{a_R - a_C}\right\}\right\} \qquad (3.8)$$

Если $a_L = a_C = a_R$, то говорим, что $\tilde{a} = (a_L, a_C, a_R)$ - четкое (т. е. обыкновенное вещественное число) с функцией принадлежности, совпадающей с характеристической функцией X_{a_C}

В нашей задаче параметры $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ предполагаются треугольными нечеткими числами следующего вида:

$$\tilde{c}_1 = (4, 6, 8), \qquad \tilde{a}_{21} = (-4, -2, 0), \qquad \tilde{u}_1 = (0.01, 0.02, 0.03),$$
$$\tilde{c}_2 = (3, 5, 7), \qquad \tilde{a}_{22} = (1, 2, 3), \qquad \tilde{u}_2 = (0.01, 0.02, 0.03),$$
$$\tilde{a}_{11} = (6, 10, 14), \qquad \tilde{a}_{31} = (6, 8, 10), \qquad \tilde{u}_3 = (0.01, 0.03, 0.05),$$
$$\tilde{a}_{12} = (3, 6, 9). \qquad \tilde{a}_{32} = (6, 12, 18).$$

Пусть $x_1, x_2 \geq 0$ исключая случай $x_1 = x_2 = 0$. Таким образом, исключается ситуация, при которой инвестор не участвует ни в одном проекте.

(а) Функции принадлежности. По принципу расширения левые части трех ограничений (3.7), обозначенные как $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$ *и* $\tilde{L}_3$ являются треугольными нечеткими числами следующего вида:

$$\tilde{L}_1 = (6x_1 + 3x_2 + p_1, 10x_1 + 6x_2 + p_1, 14x_1 + 9x_2 + p_1)$$
$$\tilde{L}_1 = (-4x_1 + x_2 + 1.01p_1 - p_2, -2x_1 + 2x_2 + 1.02p_1 - p_2,$$
$$3x_2 + 1.03p_1 - p_2)$$
$$\tilde{L}_3 = (6x_1 + 6x_2 + 1.01p_2 - p_3, 8x_1 + 12x_2 + 1.02p_2 - p_3,$$
$$10x_1 + 1.03x_1 - p_3)$$

Применяя (3.8), вычисляем функции принадлежности для $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$ *и* $\tilde{L}_3$:

$$\mu_{\tilde{L}_1}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - 6x_1 - 3x_2 - p_1}{4x_1 + 3x_2}, \frac{14x_1 + 9x_2 + p_1 - t}{4x_1 + 3x_2}\right\}\right\},$$

$$\mu_{\tilde{L}_2}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t + 4x_1 - x_2 - 1.01p_1 + p_2}{2x_1 + x_2 + 0.01p_1}, \frac{3x_2 + 1.03p_1 - p_2 - t}{2x_1 + x_2 + p_3}\right\}\right\},$$

$$\mu_{\tilde{L}_2}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - 6x_1 - 6x_2 - 1.01p_2 + p_3}{2x_1 + 6x_2 + 0.01p_1}, \frac{10x_2 + 18x_2 - 1.03p_2 - p_3 - t}{2x_1 + 6x_2 + 0.01p_2}\right\}\right\}.$$

Далее вычисляем функцию принадлежности $\mu_{\cong}$ нечеткого отношения $\cong$, являющегося нечетким расширением взвешенного отношения «=»:

$$\mu_{\cong}(\tilde{L}_i, \tilde{P}_i) = \sup\{\min\{\ 0, \mu_{\tilde{L}}(u), \mu_{\tilde{P}_i}(\upsilon)\} u = \upsilon\},\ i = 1, 2, 3,$$

где $\tilde{P}_i$ — четкие числа, заданные функциями принадлежности

$$\mu_{\tilde{P}_1}(t) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad t = 12, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{P}_2}(t) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad t = 0, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{P}_3}(t) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad t = 0, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

В частности,

$$\mu_{\cong}(\tilde{L}_1, \tilde{P}_1) = \mu_{\tilde{L}_1}(12), \ \mu_{\cong}(\tilde{L}_i, \tilde{P}_i) = \mu_{\tilde{L}_i}(0), \ i = 2{,}3$$

Заметим, что для четких чисел нечеткое отношение «$\cong$» идентично обычному отношению равенства «=».

(б) Допустимое решение. При T^A=T= min допустимое решение задачи нечеткого линейного программирования (3.7) является нечетким множеством $\tilde{X}$, определенным функцией принадлежности

$$T_{\tilde{X}}(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3) = \min\{\ \mu_{\tilde{L}_1}(12), \mu_{\tilde{L}_2}(0),\ \mu_{\tilde{L}_3}(0)\}$$

α-допустимое решение для $\alpha \in (0,1]$ является множеством всех векторов

$$x=(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3)^{\mathrm{T}}$$

таких что

$$\min\{\ \mu_{\tilde{L}_1}(12), \mu_{\tilde{L}_2}(0),\ \mu_{\tilde{L}_3}(0)\} \geq \alpha\,. \tag{3.9}$$

Неравенство (3.9) может быть выражено эквивалентным образом через следующие неравенства:

$$(6 + 4\alpha)x_1 + (3 + 3\alpha)x_2 + p_1 \leq 12,$$
$$(6 + 4\alpha)x_1 + (9 - 3\alpha)x_2 + p_1 \geq 12,$$
$$(4 - 2\alpha)x_1 - (1 - \alpha)x_2 +(1.01+0.01\alpha)\, p_1 +p_2 \geq 0,$$
$$- 2\alpha x_1 + (3 - \alpha)x_2 +(1.03 + 0.01\alpha)\, p_1 - p_2 \geq 0,$$
$$(6 + 2\alpha)x_1 + (6 +6\alpha)x_2 + (1.01 + 0.01\alpha)\, p_2 - p_3 \leq 0,$$
$$(10 - 2\alpha)x_1 + (18 - 6\alpha)x_2 + (1.03 + 0.01\alpha)\, p_2 - p_3 \geq 0,$$
$$x_1\,,\, x_2 \leq 1,$$
$$x_1, x_2, p_1, p_2, p_3 \geq 0.$$

(в) Удовлетворяющее решение. Рассмотрим нечеткую цель $\tilde{d}$, задаваемую функцией принадлежности $\mu_{\tilde{d}}(t) = \min\{\,1, \max\{\,0,\ (t-21)/6\}\}$ для всех $t \geq 0$. Для функции принадлежности целевого множества $\tilde{Z}$ имеем

$$\mu_{\tilde{Z}}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - 4x_1 - 3x_2 - 1.01p_3}{2x_1 + 2x_2 + 0.02p_3}, \frac{8x_1 + 7x_2 - 1.05p_3 - t}{2x_1 + 2x_2 + 0.02p_3}\right\}\right\}.$$

Теперь вычислим функцию принадлежности $\mu_{\tilde{\geq}}$ нечеткого отношения которое является нечетким расширением обычного взвешенного отношения

$$\mu_{\tilde{\geq}}(\tilde{Z}, \tilde{d}) = \sup\{\min\{\ 0, \mu_{\tilde{Z}}(u), \mu_{\tilde{d}}(\upsilon) \,|\, u \geq \upsilon\ .$$

Функция принадлежности целевой функции задается как

$$\mu_{\gtrapprox}(\tilde{Z},\tilde{d}) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{8x_1+7x_2+1.05p_3-21}{2x_1+2x_2+0.02p_3+6},1\right\}\right\},$$

и потому для оптимального решения $\tilde{X}_0$ имеет место

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \min\{\ \mu_{\tilde{X}}(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3), \mu_{\gtrapprox}(\tilde{Z},\tilde{d})\},$$

При $\alpha \in (0,1]$ α - эффективное решение является множеством всех векторов $x^\circ = (x_1, x_2, p_1, p_2, p_3)$, таких что $\mu_{\tilde{X}}(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3) \geq \alpha$,и то же время $\mu_{\gtrapprox}(\tilde{Z},\tilde{d}) \geq \alpha$. Первое из этих неравенств эквивалентно неравенствам (3.10), а последнее эквивалентно

$$(8 - 2\alpha)x_1 + (7 - 2\alpha)x_2 + (1.05 + 0.02\alpha)\, p_3 \geq 21+6\alpha. \quad (3.11)$$

Таким образом, множество всех α - удовлетворяющих решений - это множество векторов $x^*=(x_1,x_2,p_1,p_2,p_3)$, для которых выполняются условия (3.10) и (3.11).

Чтобы найти max-удовлетворяющее решение задачи нечеткого линейного программирования (3.7), решаем следующую задачу нелинейного программирования:

максимизировать α

при ограничениях (3.10), (3.11),

$$0 \leq x_1, x_2, \alpha \leq 1,$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0.$$

Применение пакета Microsoft Excel Solver позволило вычислить следующее оптимальное решение:

$$x_1 = 0.605\ ,\quad x_2 = 1,\quad p_1 = 0,\quad p_2 = 0.811,\quad p_3 = 17.741,$$

$$\alpha = 0.990.$$

Для такой же, но четкой задачи, т. е. для обычной задачи линейного программирования (3.7), где параметры $\tilde{c}_i, \tilde{a}_{ij}, \tilde{u}_j$ являются вещественными числами, равными средним значениям нечетких параметров, получаем следующее оптимальное решение:

$$x_1 = 0.6,\quad x_2 = 1,\quad p_1= 0,\quad p_2 = 0.8,\quad p_3 = 17.611,\quad z = 26.744.$$

Естественно, оба решения являются близкими, так как используются средние значения параметров.

С другой стороны, мы можем искать α - эффективное решение для $\alpha < 1$, например, $\alpha = 0.7$, т.е. для меньшего уровня эффективности. Таким решением при дополнительном условии максимизации p_3 является

$$x_1 = 0.62,\quad x_2 = 1, p_1 = 0, p_2 = 0.811, \alpha = 0.7 \text{ и } p_3 = 17.744.$$

Итак, формулировка задачи нечеткого линейного программирования позволяет находить различные типы «оптимальных» решений в условиях неопределенности параметров модели, а также дает возможность учитывать дополнительные требования.

В данной главе предложен новый общий подход к решению одно и многокритериальных задач нечеткого линейного программирования с нечеткими коэффициентами. Объединяющей концепцией этого подхода является понятие нечеткого отношения, в частности, нечетких расширений отношений равенства или неравенства, а также понятие оператора агрегирования.

Мы сформулировали задачу нечеткого линейного программирования, определили допустимое решение такой задачи и рассмотрели проблему вычисления «оптимального» решения для задач нечеткого линейного программирования. Было предложено два подхода: первый подход на основе удовлетворяющего решения, опирающегося на заданные извне цели, которые моделируются нечеткими величинами; второй - на основе α-эффективного (недоминируемого) решения. Дальнейшие исследования были сосредоточены на двойственности в нечетком линейном программировании.

Наконец, мы рассмотрели многокритериальный случай и сформулировали многокритериальную задачу нечеткого линейного программирования. После определения компромиссного решения выведен основной результат о сведении задачи нахождения таких решений к обычной задаче нелинейной оптимизации.

3.2.1. Решение нечеткой многокритериальной задачи оптимизации в условиях риска

Существует большое количество публикаций по принятию решений в условиях риска. Широко используются минимаксный подход, оптимизация ожидаемой полезности, минимизация среднего ущерба или вероятности неблагоприятного события, модели стохастического программирования и др.

В работах В.И. Норкина [154], Ю.М.Ермольева [155], В.С.Михалевича [156], П.С.Кнопова [117], И.В.Сергиенко и В.М.Яненко [118] обсуждается проблема принятия решений в условиях риска. Вопросам формализации рисков в экономическом плане (оценка риска инвестиции, принятия проектов) посвящены работы А.О. Недосекина [119], в которых предлагается своего рода конструктор, который может быть использован любым экспертом по своему усмотрению. Мысль применить нечеткие множества к финансовому анализу предприятий зародилась в работах А.О.Недосекина [119] как способ бороться с неопределенностью, когда она имеет не только статистический, но и лингвистический характер.

Однако этих постановок недостаточно для принятия решений в нечетких условиях, где невозможно ориентироваться на средние показатели эффективности решений, поскольку они оправданы в случае многократно повторяющихся ситуаций, в то время как рисковые ситуации уникальны, они могут случиться и завтра, и не случиться никогда. Последние характеризуются возможностью крайне маловероятных, но исключительно больших потерь, граничащих с выживанием рассматриваемой системы. Ясно, что такие традиционные показатели риска, как дисперсия, в данном случае неадекватны.

В этой связи для оценки рисков в нечетких условиях предлагается дополнить систему ограничений стандартной задачи принятия решений набором ограничений по возможным потерям, а именно, для избранных сценариев построить модель их последствий (ущербов) как функций управляющих параметров и накладывать экспертные ограничения по приемлемому уровню относительного ущерба для каждого сценария.

3.2.2. Подходы к решению оптимизационной задачи

Очевидно, что найти идеальный вариант критерия “максимальная доходность - минимальный риск” удаётся лишь в очень редких случаях. Поэтому предлагаются следующие подходы к решению этой оптимизационной задачи (табл.3.1).

Здесь $K=\{|y\in R^m, y\le g\}\}$ – заданное выпуклое подмножество пространства R^m;

$$\sum_j XK_j = \{y \Big| y\in R^m, y=\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij},\ x_i\in X,\ a_{ij}\in K_j\subset R^m, i=1,...,n;\ j=1,...,m\}.$$

Таблица 3.1

Подходы к решению оптимизационной задачи

№	Подходы	Модель
1	Подход "максимум выигрыша" заключается в том, что из всех вариантов выбирается тот, который приводит к максимальному значению выигрыша (F) при приемлемом для лиц, принимающих решений (ЛПР) риске ($R_{пр.доп}$).	$F \rightarrow \max$, $R = R_{пр.доп}$, $\sum_j XK_j \subset K$.
2	Подход "оптимальная вероятность" состоит в том, что из возможных решений выбирается тот, при котором обеспечивается максимум математического ожидания выигрыша ($M(F)$) при приемлемом для ЛПР риске (R).	$M(F) \rightarrow \max$, $\sum_j XK_j \subset K$.
3	Сочетание подходов "оптимальная вероятность" и "оптимальная колеблемость" состоит в выборе варианта, обеспечивающего минимум коэффициент вариации ($CV(F)$) при приемлемом для ЛПР риске (R).	$CV(F) \rightarrow \min$, $\sum_j XK_j \subset K$.
4	Подход "минимум риска". Из всех возможных вариантов выбирается тот, который позволяет получить ожидаемый выигрыш, т.е. предельно допустимое значение F при минимальном риске.	$F = F_{пр.доп}$, $R \rightarrow \min$, $\sum_j XK_j \subset K$.
5	Подход "максимальная доходность - минимальный риск" состоит в выборе варианта, обеспечивающего максимум F при минимуме R при удовлетворении заданным ограничениям.	$F \rightarrow \max$, $R \rightarrow \min$, $\sum_j XK_j \subset K$.

3.2.3. Решение нечеткой многокритериальной задачи оптимизации

В многокритериальных задачах сложно оценить решение задачи в комплексе всех критериев. Наиболее распространенным является метод аддитивной свертки и оценка лицом, принимающим решение (ЛПР) [120].

Предлагается применение нечетких методов для оценки альтернативных решений. Решение многокритериальной задачи оптимизации содержит следующие этапы [117-119]:

• Формирование целевой функции в нечеткой постановке.

• Определение значений критериев оценки в нечетком виде.

• Разработка функций принадлежности для критериев.

• Определение базы правил и/или базы предпочтений для критериев.

• Вычисление значений целевой функции.

• Деффазификация (приведение к четкому виду) целевой функции.

Обозначим через $F(X,\Lambda)$ операцию свертки частных критериев оптимальности, где $\Lambda \in D_\Lambda \subset R^s$ - вектор весовых множителей $(\Lambda = \{\lambda_i\}, i = \overline{1,s})$; $D_\Lambda = \{\lambda_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, i \in [1:s]\}$ - множество допустимых значений этого вектора.

Задача параметрического программирования с s независимыми параметрами $\Lambda = \{\lambda_i\}, i = \overline{1,s}$, или S-задача параметрического программирования в матричном виде записывается следующим образом:

$$F(X,\Lambda) = (\bar{a}_0 + \Lambda' \bar{b})X + \bar{e}\Lambda \to extr,$$

$$\sum_j XK_j \subset K,$$

$$\lambda \in R^s.$$

Здесь $X = \{x_j\}, j = \overline{1,n}$ – решение S-задачи параметрического программирования, $\bar{a}_0, \bar{b}, \bar{e}$ - коэффициенты, являющиеся нечеткими величинами, представляемыми обычно в виде нечетких множеств с заданными функциями принадлежностей $\mu_{\bar{a}_0}(a_0)$ $(\bar{a}_0 \subset A_0)$, $\mu_{\bar{b}}(b)$ $(\bar{b} \subset B)$ и $\mu_{\bar{e}}(e)$ $(\bar{e} \subset E)$.

Для решения задачи параметрического программирования при нечетких исходных данных (коэффициентов $\bar{a}_0, \bar{b}, \bar{e}$) предлагается три подхода:

1. Используя различные операции дефаззификации над нечеткими множествами $\bar{a}_0, \bar{b}, \bar{e}$ (интегрирования, суммирования, осреднения и др.), можно получить нечеткие оценки значения коэффициентов a_0, b, e [8]. Тогда, введя их в S-задачу параметрического программирования вместо нечетких

коэффициентов и записав ограничения в виде соответствующих неравенств, исходную задачу сведем к виду:

$$F(X,\Lambda) = (a_0 + \Lambda^{'}b)X + e\Lambda \to extr(\min) \ ,$$
$$\sum_j XK_j \le g \ , \qquad (3.12)$$
$$\lambda \in R^s \ .$$

Заметим, что в силу нечеткости описания коэффициентов $\bar{a}_0$ и $\bar{b}$ оценка любого решения $x(\lambda) \in X$ (и, соответственно, значения функции $F(X,\Lambda)$ при $x = x(\lambda)$) представляет собой нечеткое подмножество числовой оси базового множества *X*.

2. Сведение решения исходной задачи к решению задач линейного программирования для каждого дискретного α - уровня [9].

В результате нечёткие ограничения запишется в следующем интервальном виде:

$$P = \begin{cases} \sigma_\alpha(a_{i1})x_1 + \sigma_\alpha(a_{i2})x_2 + ... + \sigma_\alpha(a_{in})x_n \subseteq \sigma_\alpha(b_i), \ i = \overline{1,m}, \alpha = \overline{1,p}, \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Здесь $X = \{x_j\}, \ j = \overline{1,n}$ – решение многокритериальной задачи параметрического программирования на каждом дискретном α - уровне, $\sigma_\alpha(a_{i,j})$ и $\sigma_\alpha(b_i)$ - интервальные значения коэффициентов $a_{i,j}$ и b_i на каждом дискретном α - уровне.

3. Решение задачи многокритериальной оптимизации адаптивным методом [120]. Каждая итерация этих методов включает в себя фазу анализа, выполняемую ЛПР, и фазу расчетов, выполняемую системой многокритериальной оптимизации.

Прямой адаптивный метод решения многокритериальной задачи, который исследуется в данной работе, основан на предположении существования «функции предпочтений ЛПР» $F(X,\Lambda) = (a_0 + \Lambda^{'}b)X + e\Lambda$, которая определена на множестве D_X допустимых значений вектора варьируемых параметров X и выполняет отображение этого множества на множество действительных числе R. При этом задача многокритериальной оптимизации сводится к задаче выбора вектора $X^{\bullet} \in D_X$ ($X^* = \{x_j^*\}, \ j = \overline{1,n}$) такого, что

$$\min_X F(X,\Lambda) = F(X^{\bullet},\Lambda) \quad X \in D_X \ . \qquad (3.13)$$

При каждом фиксированном векторе $\Lambda \in D_\Lambda$ метод скалярной свертки сводит решение задачи (3.12) к решению однокритериальной задачи глобальной условной оптимизации (3.13)

Отметим, что в случае аддитивной свертки $F(X,\Lambda)$вектор $X^{\bullet}$ принадлежит множеству эффективных по Парето векторов [9].

Данное обстоятельство позволяет полагать, что в этом случае функция предпочтений ЛПР определена не на множестве D_X, а на множестве D_A:

$$F:\Lambda \to R.$$

В результате многокритериальная задача сводится к задаче выбора вектора $\Lambda^{\bullet} \in D_{\Lambda}$ такого, что

$$\min_{\Lambda} F(X,\Lambda) = F(X,\Lambda^{\bullet}), \qquad \Lambda \in D_{\Lambda} \ . \tag{3.14}$$

Поскольку обычно $s \ll n$, переход от задачи (3.12) к задаче (3.14) важен с точки зрения уменьшения вычислительных затрат.

Вектор $\Lambda^{\bullet} \in D_{\Lambda}$ находится с помощью нечетких правил вывода:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\bigcap_{i=1}^{s} \lambda_i = \Psi_{i,jp} - c \;\; весом \; w_{jp}\right) \to F(X,\Lambda) = F(X,\Lambda^{\bullet}).$$

Здесь $\Psi_{i,jp}$ - лингвистический терм, которым оценивается переменная λ_i в строчке с номером *jp;*

w_{jp} - весовой коэффициент правила с порядковым номером *jp;*

$F(X,\Lambda) = F(X,\Lambda^{\bullet})$ - выход нечеткого правила.

Величину Ψ будем считать лингвистической переменной со значениями от «Очень-очень плохо» до «Отлично». Ядро нечеткой переменной Ψ обозначим $\dot{\Psi}$ [8], так что значению переменной Ψ «Очень-очень плохо» соответствует $\dot{\Psi} = 1$, а значению «Отлично» - $\dot{\Psi} = l$.

В результате многокритериальная задача сводится к задаче отыскания вектора $\Lambda^{\bullet} \in D_{\Lambda}$, обеспечивающего максимальное значение дискретной функции $\dot{\Psi}(\Lambda)$:

$$\max_{\Lambda} \dot{\Psi}(\Lambda) = \dot{\Psi}(\Lambda^{\bullet}) = \dot{\Psi}^{\bullet} \qquad \Lambda \in D_{\Lambda} \ . \tag{3.15}$$

Каждая входная переменная имеет свои собственные функции принадлежности нечетким термам Ψ_{jp}.

Функции принадлежности элемента λ_i терму Ψ_{jp} имеет следующий вид:

$$\mu^{jp}(\lambda_i) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\lambda_i - b_i^{jp}}{c_i^{jp}}\right)^2}$$

где b_i^{jp}, c_i^{jp} - параметры функции принадлежности.

Общая схема рассматриваемого метода является итерационной и состоит из перечисленных ниже следующих основных этапов.

Этап 1. Случайно последовательно генерируется s векторов $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ и для каждого из этих векторов выполняются следующие действия:

1) решается многокритериальная задача

$$\min_X F(X, \Lambda) = F(X^\bullet, \Lambda) \quad X \in D_X \;. \tag{3.16}$$

2) ЛПР предъявляет найденное решение $X^\bullet$, а также соответствующие значения всех частных критериев оптимальности $f_1(X^\bullet),\ f_2(X^\bullet), ...\ f_s(X^\bullet)$;

3) ЛПР оценивает эти данные и вводит в задачу соответствующее значение своей функции предпочтений $\dot{\Psi}(\Lambda_i)$.

Этап 2. На основе всех имеющихся значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ вектора Λ и соответствующих оценок функции предпочтений выполняются следующие действия:

1) строится функция $\tilde{F}_1(X, \Lambda)$, аппроксимирующая функцию $F(X, \Lambda)$ в окрестности точек $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$;

2) отыскивается минимум функции $\tilde{F}_1(X, \Lambda)$

$$\min_A \tilde{\Psi}_1(\Lambda) = \tilde{\Psi}(\Lambda_1^\bullet),\ \ \Lambda \in D_\Lambda\,;$$

3) с найденным вектором $\Lambda_1^\bullet$ решается задача вида (3.16) – находится вектор параметров и соответствующие значения частных критериев оптимальности, а затем предъявляется ЛПР; ЛПР оценивает указанные данные и вводит в систему соответствующее значение своей функции предпочтений $F(\Lambda_1^\bullet)$.

Этап 3. На основе всех имеющихся в системе значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ вектора Λ и соответствующих оценок функции предпочтений $F(X, \Lambda_1^\bullet)$ выполняется аппроксимация функции $F(X, \Lambda)$ в окрестности точек $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_k, \Lambda_1^\bullet$, строится функция $\tilde{F}_2(X, \Lambda)$ по схеме первого этапа до тех пор, пока ЛПР не примет решение о прекращении вычислений.

Входами системы нечеткого вывода являются значения весов частных критериев оптимальности – нечеткие термы $\lambda_{i,}$, $i = 1,2,...k \in [1:s]$. Выходной переменной системы нечеткого вывода является лингвистическая переменная Ψ, ядро которой $\dot{\Psi}$ принимает значения 1,2,…,*l*.

Совокупность значений указанных нечетких входных переменных, выходных лингвистических переменных, а также правил нечетких продукций образуют нечеткую базу знаний.

3.2.4. Настройка нечетких баз знаний с применением генетических алгоритмов оптимизации

Алгоритм настройки параметров функций принадлежности $B = (b_1, b_2, ..., b_q)$ и $C = (c_1, c_2, ..., c_q)$- и веса правил $W = (w_1, w_2, ..., w_N)$ состоит из следующих этапов.

1.Формирование исходной популяции

Для реализации генетического алгоритма следует задать способ кодирования нечетких моделей. Сведем неизвестные параметры *W*,*B*.*C* в один вектор:

$$S = (W, B, C) = \left(w_1, w_2, ..., w_N,\ b_{11,} c_{11}, ...\ b_{1l_1,} c_{1l_1}, b_{n1,} c_{n1}, ...\ b_{nl_1,} c_{nl_1}\right),$$

где *N*- общее число строк в нечеткой базе знаний;

l_i- количество термов-оценок входной переменной λ_i,

$l_1 + l_2 + ... + l_n = q, \quad i = \overline{1,n};$

q- общее число термов;

Скрещивание

Поскольку операция скрещивания является основной операцией генетического алгоритма, то его производительность в первую очередь зависит от производительности используемой операции скрещивания. В результате скрещивания двух хромосом-родителей S_1 и S_2 получаются хромосомы-отпрыска Ch_1 и Ch_2 путем обмена генов относительно (n+1) -ой точки скрещивания .

Мутация

Каждый элемент вектора *S* может подвергнуться операции мутации с вероятностью p_m. Обозначим мутацию элемента *s* через $Mu(s)$:

$$Mu(w_j) = RANDOM\left(\left[\underline{w}, \overline{w}\right]\right), j = \overline{1,N}$$

$$Mu\left(b_{ip}\right) = RANDOM\left(\left[\underline{x}_i, \overline{x}_i\right]\right),$$

$$Mu\left(c_{ip}\right) = RANDOM\left(\left[\underline{c}_i, \overline{c}_i\right]\right),$$

где $\underline{w}, (\overline{w})$ - нижняя (верхняя) граница интервала возможных значений весов правил, $\left[\underline{w}, \overline{w}\right] \subset [0,1]$;

$\left[\underline{\tilde{n}}_i, (\overline{c}_i)\right]$ - интервал возможных значений коэффициента концентрации-растяжения функций принадлежности термов-оценок входной переменной x_i, $\left[\underline{\tilde{n}}_i, (\overline{c}_i)\right] \subset \left(0, +\infty\right]$, $i = \overline{1,n}$;

$RANDOM\left(\left[\underline{\xi}, \overline{\xi}\right]\right)$, обозначает операцию нахождения равномерно распределенного на интервале $\left[\underline{\xi}, \overline{\xi}\right]$ случайного числа.

Разработано программное обеспечение для решения практических задач многокритериальной оптимизации и получены результаты оптимизационной задачи [120].

Таким образом, показана целесообразность объединения метода нечеткого вывода и генетических алгоритмов в задачах с неопределенной или лингвистической информацией, а также в задачах, для которых характерны интуитивные решения. Предложенный метод позволяет существенно улучшить качество решения многокритериальных задач оптимизации с нечетко заданными параметрами и критериями. В дальнейшем планируется изучение различных гибридных методов применительно к оптимизационным задачам, а также методов автоматического формирования базы нечетких правил, что позволит перенести процесс автоматизации на новый уровень.

3.3. Разработка многокритериальных моделей оптимизации с использованием нейронечетких подходов

При формулировке задачи многокритериальной оптимизации в качестве требования к оптимальности решения вводится условие обязательного удовлетворения всем частным критериям и ограничениям, т.е. в. точке оптимума все функции желательности должны быть отличными от нуля. Также требуется, чтобы в оптимуме критерии удовлетворялись в максимально возможной степени. Иными словами, полагается нежелательным, чтобы значение обобщенного критерия возрастало при улучшении ряда показателей качества за счет ухудшения остальных. В терминологии теории принятия решений последнее требование эквивалентно условию принадлежности точки оптимума множеству Парето [58].

В большинстве случаев ограничения параметрических моделей представляет собой математическое описание и количественное выражение самых разнообразных условий, от которых зависит некоторый технический или производственный процесс. Это разнообразие может сказаться, в частности, и в том, что причины, влияющие на изменение величин, при помощи которых выражаются соответствующие ограничения, необходимо рассматривать как независимые, но действующие одновременно. Задачи такого рода естественно описывать при помощи нескольких параметров. Часто имеется только “расплывчатая” - нечёткая информация о коэффициентах параметрической модели. В качестве математического аппарата, позволяющего формализовать нечёткую информацию, в работе применяется теория нечётких множеств. Параметрическая модель с S независимыми параметрами $t_1,\ldots, t_s$ или S параметрическая задача в матричном виде записывается следующим образом:

$$f = (\bar{a}_0' + t'\bar{\bar{b}}) + \bar{e}t \to \min,$$
$$(\bar{a} + \bar{c}t)x \subset K, \qquad (3.17)$$
$$t \in R^s.$$

Здесь K={y| $y \in R^n, y \le a_{.0} + dt$ } – заданное выпуклое подмножество пространства R^n.

Задачу такого типа можно назвать задачей параметрического программирования с множественно-значными коэффициентами. Ясно, что в рамках этой задачи не имеет смысла говорить о максимизации функции цели, поскольку значения этой функции – не числа, а множество чисел. В этом случае необходимо выяснить, какое отношение предпочтения в множестве альтернатив порождает эта функция, а затем исследовать вопрос о том, какие выборы считать рациональными в смысле этого отношения предпочтения.

Следующим шагом на пути уточнения рассматриваемой модели является фаззификация, т.е. описание коэффициентов задачи в форме нечетких множеств. При этом, кроме задания множеств возможных значений параметров, в модель вводится дополнительная информация в виде функций принадлежности этих нечетких множеств. Таким образом, мы пришли к постановке задачи нечеткого параметрического программирования.

Задача (3.17) сводится к следующей задаче параметрического программирования

$$f = (a_0 + t'b)x + e't \to \min ,$$
$$(a + ct)x \le a_{.0} + dt , \qquad (3.18)$$
$$t \in R^s$$

в которой значения коэффициентов a, b, c, d, e описаны в форме нечетких подмножеств, т.е. заданы функции принадлежности $\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}), \mu_{ij}^k(a_{ij}), \nu_{ijl}^k(c_{ijl})$ и $\xi_{il}^k(d_{il})$ соответствующих множеств, где i=1,…,m; j=1,…,n; l=1,…,s . В силу нечеткости описания параметров a_0' и b оценка любой альтернативы $x(t) \in X$ (т.е. значение функции *f(t)*) представляет собой нечеткое подмножество числовой оси.

Для формулировки задачи необходимо описать отношение предпочтения в универсальном множестве оценок альтернатив (иными словами, в универсальном множестве значений функции *f(t)*). В данном случае это универсальное множество представляет собой числовую ось R^1 и мы будем считать, что исходное отношение предпочтения совпадает с естественным порядком ($\ge$) на R^1.

Далее сформулируем эту задачу в форме общей задачи нечеткого математического программирования. Это позволит построить в множестве X
нечеткое отношение предпочтения, соответствующее исходной нечеткой информации. Затем мы сможем выделить в множестве X подмножество недоминируемых альтернатив, которое и будет служить основой для рационального выбора альтернатив.

Для формулировки общей задачи можно непосредственно применить для определения нечетких значений функций *f(t)* и $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt)$, соответствующих нечетким значениям входящих в них параметров. Мы же воспользуемся здесь другим приемом, который представляется нам более наглядным.

Обратимся сначала к нечетким ограничениям $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt) \le 0$ и построим соответствующее им нечеткое подмножество допустимых альтернатив, функцию принадлежности которого будем обозначать $\mu_t(x)$. При этом будем опираться на следующие рассуждения.

Пусть a^0, c^0, d^0 - некоторые конкретные числовые значения соответствующих параметров в ограничениях $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt) \le 0$, степени их принадлежности заданным нечетким множествам равны соответственно $\mu_{ij}^k(a_{ij}^0), \nu_{ijl}^k(c_{ijl}^0)$ и $\xi_{il}^k(d_{il}^0)$. Обозначим μ^0 минимальное из этих чисел.

Если некоторая альтернатива $\tilde{x} \in X$ удовлетворяет неравенствам

$$\psi(t) = (a^0 + c^0 t)\tilde{x} - (a_{.0}^0 + d^0 t) \le 0,$$

то естественно считать, что эта альтернатива принадлежит множеству допустимых альтернатив μ^0, т.е. $\mu_t(\tilde{x}) \ge \mu^0$. Этим, собственно говоря, уже и определяется нечеткое множество допустимых альтернатив. Для удобства записи его функции принадлежности введем следующее обозначение:

$$\nu(t) = \min_{i,j,l}(\mu_{ij}^k(a_{ij}), \nu_{ijl}^k(c_{ijl}), \xi_{il}^k(d_{il})).$$

В этих обозначениях получаем

$$\mu_t(x) = \sup \nu(t).$$

Каждой альтернативе функция μ_t ставит в соответствие степень допустимости этой альтернативы с учетом исходной нечеткой информации о параметрах ограничений.

Обратимся теперь к заданной нечетко «минимизируемой» функции *f(t)* и представим ее в виде нечеткой функции цели вида $\varphi: X \times R^1 \to [0,1]$. Рассуждения здесь во многом аналогичны предыдущим.

Пусть $a_0^{0'}, b^0$ - некоторые конкретные числовые значения параметров функции $f(t) = (a_0^{'} + t^{'}b)x + e^{'}t$, степени их принадлежности заданным нечетким множествам равны соответственно $\mu_o^k(a_{0j}^0), \eta_{jl}^k(b_{jl}^0)$. Пусть φ^0 - минимальное из этих чисел. Пусть, $\tilde{x} \in X$ - некоторая альтернатива, а число

$$r^0 = (a_0^{0'} + t^{'}b^0)\tilde{x} + e^{'}t,$$

представляет собой соответствующее альтернативе $\tilde{x}$ и значениям параметров $a_0^{0'}, b^0$ значение функции $f(t) = (a_0^{'} + t^{'}b)x + e^{'}t$.

Естественно считать, что это значение (число r^0) принадлежит нечеткой оценке альтернативы $\widetilde{x}$ со степенью, не меньшей φ^0. Отсюда мы получаем, что искомая нечеткая функция цели $\varphi(x,r(t))$ имеет вид $\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}),\eta_{jl}^k(b_{jl}))$.

Окончательно получаем, что исходная задача с нечетко описанными параметрами формулируется в форме следующей общей задачи нечеткого математического программирования: «минимизировать» нечеткую функцию цели

$$\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}),\eta_{jl}^k(b_{jl}))$$

на нечетком множестве допустимых альтернатив вида

$$\mu_t(x) = \sup\nu(t)\,.$$

Следующий этап – нахождение недоминируемых альтернатив для сформулированной общей задачи.

Рассмотрим сначала более простую задачу с нечеткой функцией цели

$$\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}),\eta_{jl}^k(b_{jl}))$$

и обычным (четко описанным) множеством допустимых альтернатив, заданным неравенством

$$\psi(t) = (a+ct)x - (a_{.0}+dt) \le 0\,,$$

с точно известными значениями параметров.

Предположим, что все исходные нечеткие множества $\mu_o^k(a_{0j}),\eta_{jl}^k(b_{jl})$ таковы, что $\sup\limits_{a_{0j}\in R^1}\mu_o^k(a_{0j}) \ge \alpha$ и $\sup\limits_{b_{jl}\in R^1}\eta_{jl}^k(b_{jl}) \ge \alpha$. В [78] показано, что в этом случае функция $\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}),\eta_{jl}^k(b_{jl}))$ обладает свойством

$$\sup_{r(t)\in R^1}\varphi(x,r(t)) \ge \alpha$$

при любом $x\in X$. Для нахождения альтернатив, степень недоминируемости которых не меньше α, в рассматриваемом случае достаточно решить следующую задачу математического программирования:

$$r(t) \to \max\,,$$

$$\varphi(x,r(t)) \ge \alpha\,,$$

$$\psi(t) = (a+ct)x - (a_{.0}+dt) \le 0\,,$$

$$r(t)\in R^1,\quad x\in X\,.$$

Теперь посмотрим задачу, в которой нечетко описаны как параметры a_{0j}, b_{jl} функции *f(t)*, так и параметры a_{ij}, c_{ijl}, d_{il} ограничений $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt) \le 0$.

Заметим, прежде всего, что в данной задаче выбор альтернатив должен осуществляться с учетом двух отношений предпочтения на множестве альтернатив X: нечеткого индуцированного функцией $\varphi(x, r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}))$, и четкого, индуцированного функцией μ_t и естественным порядком на R^1.

Для нахождения альтернативы, имеющей степень недоминируемости, не меньшую заданного числа α, достаточно решить следующую задачу математического программирования:

$$f(t) = (a_0^{'} + t^{'}b)x + e^{'}t \to \min$$

при ограничениях

$$\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt) \le 0,$$

$$\mu_o^k(a_{0j}) \ge \alpha, \eta_{jl}^k(b_{jl}) \ge \alpha,$$

$$\mu_{ij}^k(a_{ij}) \ge \alpha, \ \nu_{ijl}^k(c_{ijl}) \ge \alpha, \ \xi_{il}^k(d_{il}) \ge \alpha,$$

$$x \in X.$$

Решение задачи такого типа позволяет определить лишь некоторые из недоминируемых альтернатив (со степенью α) для исходной общей задачи.

Решением задачи (3.18) называется явным образом заданная решающая функция

$$f_S(t) = \min\{ f = (a_0^{'} + t^{'}b)x + e^{'}t \mid (a + ct)x \le (a_0 + dt); x \ge 0\}.$$

Обозначим через O_i - множество решений t удовлетворяющих (3.18). В силу того, что значения коэффициентов заданы нечетко, O_i является нечетким множеством с функцией принадлежности $\varphi_{0i}(t)$. Таким образом,

$$O_i = \{t, \varphi_{0i}(t), \ t \in R^S\}.$$

Нечеткому решению соответствует нечеткое максимальное значение

$$\varphi_{zi} = \sup \varphi_{0i}(t),$$

$$t \in f^{-1}(r).$$

Для любого допустимого вектора x справедливы неравенства

$$f_s(t) \le g(t)\,, \tag{3.19}$$

где g(t)= $(a_0^{'} + t^{'}b)x + e't.$

Отображение q, задаваемое (3), описывается выражением

$$\varphi_q(f_S(t), g(t)) = \begin{cases} 1, если \quad g(t) \ge f_s(t), \\ 0, если \quad g(t) < f_s(t). \end{cases} \tag{3.20}$$

В связи с тем, что $f_s(t)$ – элемент нечеткого множества F_t, g(t) будет принадлежать некоторому нечеткому множеству G_t, которое является образом F_t при отображении q. Согласно [78] функция принадлежности множества F_t и его образа G_t связаны соотношением

$$\varphi_{G_t}(g(t)) = \max_{f_s(t)} \min\{\varphi_{F_t}(f_s(t)), \varphi_q(f_S(t), g(t))\}\,. \tag{3.21}$$

Подставив из (3.18) в (3.21) $\varphi_q(f_s(t), g(t))$, получим

$$\varphi_{G_t}(g(t)) = \max_{f_s(t)}\{\varphi_{F_t}(f_s(t)) : f_S(t) \le g(t)\}\,. \tag{3.22}$$

Для функции g(t) множество O_i является прообразом G_t. Отсюда, согласно [78, с. 58], имеем

$$\varphi_{0i}(t) = \varphi_{G_t}(g(t)) = \varphi_{G_t}((a_0^{'} + t^{'}b) + e^{'}t)\,. \tag{3.23}$$

Подставив (3.22) в (3.23), получим

$$\varphi_{0i}(t) = \max_{z_s(t)}\{\varphi_{F_t}(f_s(t)) : f_s(t) \le (a_0^{'} + t^{'}b) + e^{'}t\}\,. \tag{3.24}$$

Решением (3.24) для $\varphi_{F_t}(f_s(t))$ является

$$\varphi_{F_i}(t) = \exp(-\frac{k_i}{2}[\max(0, f_s(t) - (a_0^{'} + t^{'}b)x - e^{'}t)]^2)\,. \tag{3.25}$$

Нечеткое отображение зависит от s переменных, т.е. $t=t_1x...xt_s$ –декартовое произведение соответствующих множеств. В общем случае функция принадлежности этого подмножества имеет вид

$$\varphi_f(t) = \prod_{i=1}^{s} \varphi_{f_i}(t)\,. \tag{3.26}$$

Из (3.25) и (3.26) имеем

$$\varphi_f(t) = \exp(-\Phi(t)), \tag{3.27}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} k_i[\max(0, f_s(t) - (a_0^{'} + t^{'}b)x - e^{'}t)]^2\,.$$

Нами показано следующее: пусть $f_s(t)$ нечеткое решение задачи (3.18). Тогда множество решений имеет функцию принадлежности (3.27).

Если имеется нечеткая информация, то нужно выбрать такую оценку параметров t , чтобы она минимизировала $f_s(t)$ и в то же время ее степень принадлежности допустимому множеству F_t была максимальная, т.е.:

$$f(t) \to \min, \varphi_f(t) \to \max . \qquad (3.28)$$

Согласно лемме 2 [2, с.61], в силу положительности $\varphi_f(t)$ второй критерий в (3.28) можно заменить на $Ln\varphi_f(t)$. Таким образом (3.28) эквивалентно задаче

$$f(t) \to \min, \Phi(t) \to \min . \qquad (3.29)$$

Предпочтительными решениями такой задачи являются те, которые нельзя улучшить по одному критерию, не увеличив при этом другой критерий в (3.29).

Функция *f(t)* выпуклая функция, $\Phi(t)$ выпуклая функция. В этом случае решения оптимальные по Парето являются решением задачи [81-90]

$$\begin{matrix} L(t) = f(t) + r\Phi(t) \to \min \\ r \in [0, \infty] \end{matrix} . \qquad (3.30)$$

В случае формализации информации в виде нечетких множеств определяется не одно решение, а некоторое их множество. Они являются функцией r . Обозначим их через t(r).

В силу выпуклости функции L(t) для $r_2 > r_1 \geq 0$ имеем

$$f(r_1) + r_1\Phi(r_1) < f(r_2) + r_1\Phi(r_2),$$
$$f(r_2) + r_2\Phi(r_2) < f(r_1) + r_2\Phi(r_1).$$

Отсюда получим

$$r_2(\Phi(r_2) - \Phi(r_1)) + r_1(\Phi(r_1) - \Phi(r_2)) < 0,$$
$$(\Phi(r_2) - \Phi(r_1))(r_2 - r_1) < 0.$$

Из данного неравенства следует: если L(t) – выпуклая функция, то $\varphi_f(t)$- строго монотонно убывает при $r \geq 0$.

Это означает, что в множестве O_i нет такой альтернативы, для которой одновременно выполнялись бы неравенства

$\varphi_o(t) > \varphi_f(r) > 0$ и *f(t)*>r,

т.е. нет такого элемента t , который имел бы большую, чем $\varphi_f(r)$, степень принадлежности множеству φ_0 и давал бы большее, чем r максимизируемой функции. Если лицо принимающее решение предпочитает выбрать в качестве решения конкретную альтернативу $t \in T$ то его выбор должен опираться не только на степень принадлежности этой альтернативы нечеткому множеству $\varphi_f(t)$, но и на соответствующие значения функции *f(t)*.

Если только целевая функция зависит от параметров тогда задача многокритериальной оптимизации имеет следующий вид:

$$f(x) = \left[f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)\right]^T \to \min, \quad x \in X \tag{3.31}$$

где

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j \,,$$

$$k \in Q = \{1, 2, \dots, q\},$$

$$x = \{x \in R^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}\right).$$

Задача многокритериальной оптимизации с нечеткой целью предполагает нахождение таких *x*

$$f_k(x) \leq \tilde{g}_k, \quad k = 1, 2, \dots, Q, \; x \in X, \tag{3.32}$$

где $\tilde{g}_k$ - нечеткое множество.

$$\mu_k(f_k(x)) = \begin{cases} 1, & f_k(x) \leq g_k, \\ 1 - \dfrac{f_k(x) - g_k}{t_k}, & g_k \leq f_k(x) \leq g_k + t_k, \\ 0, & f_k(x) \geq g_k + t_k. \end{cases} \tag{3.33}$$

Решение нечеткой задачи (3.32) может быть преобразован к решению четкой задачи

$$\lambda \to \max, \mu_k(f_k(x)) \geq \lambda, \; x \in X. \tag{3.34}$$

Решение $x^0 \in X$ называется Парето оптимальным решением если для всех *y*

$$\mu_k(f_k(y)) \leq \mu_k(f_k(x^0))$$

и хотя бы одного

$$\mu_s(f_s(y)) < \mu_s(f_s(x^0)).$$

Решение $x^0 \in X$ называется оптимальным по критерию типа Парето, если не существует $y \in X$, лучшею по критерию типа Парето, чем x^0.

Введем понятие улучшаемости решения $y \in X$ по критерию типа Парето в нечеткой среде: решение $y \in X$ назовем улучшаемым, если существует решение $x^0 \in X$, которое лучше y по критерию типа Парето.

Утверждение 3.1. Решение $x^0 \in X$ улучшаемо в ситуации принятия многоцелевых нечетких решений $f(x) = \lfloor f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x) \rfloor$ тогда и только тогда, когда существует вектор $\gamma \in R^Q$, для которого выполнены неравенства

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) \le c^k \quad \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) < c^s$$

для всех $k \in \{1,...,Q\}$ и хотя бы одного $s \in \{1,...,Q\}$

где $c^k = c - \gamma_k$, $c = \max\limits_y \min\limits_k [\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k]$.

Доказательство. Пусть требуемые неравенства выполнены, тогда согласно определению c^k существует $y \in X$ для которого справедливо

$c \le \mu_k(f_k(y)) + \gamma_k$ и, следовательно, $c^k \le \mu_k(f_k(y))$, $\mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) < c^s \le \mu_s(f_s(y))$

$\mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) \le c^k \le \mu_k(f_k(y))$ для всех $k \in \{1,...,Q\}$ или хотя бы одного $s \in \{1,...,Q\}$.

Эти неравенство показывают, что решение $x^0 \in X$ улучшаемо.

Утверждение 3.2. Пусть решение $x^0 \in X$ улучшаемо и пусть $y \in X$ является тем решением, которое лучше решения x^0 по критерию Парето. Положим $\gamma_k = \mu_s(f_s(y)) - \mu_k(f_k(y))$ для всех $k \in \{1,...,Q\}$, где

$$s : \mu_s(f_s(y)) > \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right).$$

Тогда

$$\max_k[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] = \min_y[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] = \mu_s(f_s(y)).$$

Учитывая, что для всех γ из R^Q

$$\min_k[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] \le c, \text{ получаем}$$

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) + \gamma_k \le \mu_k(f_k(y)) + \gamma_k \le \max_k[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] = \min_y[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] \le c,$$

$\mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) + \gamma_s < \mu_s(f_s(y)) + \gamma_s \le c$ для всех $k \in \{1,...,Q\}$ или хотя бы одного $s \in \{1,...,Q\}$.

Отсюда следует справедливость доказываемых неравенств.

Утверждение 3.3. Решение $x^0 \in X$ улучшаемо в ситуации принятия многоцелевых решений тогда и только тогда, когда существует вектор γ из множества

$$\Gamma = \left\{\gamma \in \mathrm{R}^Q : \max_y \mu_k(f_k(y)) - \min_y \mu_\rho(f_\rho(y)) \ge \gamma_\rho - \gamma_k,\ (\rho, k = 1,...,Q, \rho \ne k)\right\},$$

такой, что выполнены неравенства утверждение 1.

Доказательство.

$$\left[\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)+\gamma_k\right]\le\left(\mu_k\left(f_k(y)\right)+\gamma_k\right)\le\max_k\left[\mu_k\left(f_k(y)\right)+\gamma_k\right]=$$
$$=\min_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho(y)\right)+\gamma_\rho\right]\le c,$$

для всех $k,\rho\in\{1,...,Q\}$.

$$\left(\mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right)+\gamma_s\right)<\left(\mu_s\left(f_s(y)\right)+\gamma_s\right)\le c\,.$$

Отсюда следует справедливость доказываемых неравенств.

<u>Следствие</u>. Если оценочные функционала $\{\mu_k(f_k(y))\}_{k=1}^Q$ получены после применение естественной нормализации, то область Г имеет вид:

$$\Gamma=\left\{\gamma\in\mathrm{R}^{\mathrm{Q}};\left|\gamma_\rho-\gamma_k\right|\le1,\;\; k,\rho=1,...,Q;\rho\ne k\right\}.$$

Таким образом, решение вопроса об улучшаемости, оптимальности по Парето многоцелевого решения $x^0\in X$ по критерию Парето сводится к существованию (отсутствию) вектора $\gamma\in\Gamma$ для которого выполнены неравенства утверждение 1.

<u>Утверждение 3.4</u>. Для того чтобы решение $y\in X$ было улучшаемо (оптимально по Парето), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись (были несовместны) неравенства

$$\mu_k\left(f_k(y)\right)\le\max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_z\min_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho(\mathrm{z})\right)+\gamma_\rho\right]-\gamma_k\right\},(k=1,...,Q).$$

<u>Доказательство.</u>

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)+\gamma_k\le\mu_k\left(f_k(y)\right)+\gamma_k\le\max_z\left[\mu_k\left(f_k(\mathrm{z})\right)+\gamma_k\right]=\min_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho(\mathrm{z})\right)+\gamma_\rho\right]\le$$

$$\le\max_z\min_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho(\mathrm{z})\right)+\gamma_\rho\right]\le\max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_z\min_\rho\left[\mu_\rho\left(f_\rho(\mathrm{z})\right)+\gamma_\rho\right]\right\},$$
$$\left(\mu_{\mathrm{s}}\left(f_{\mathrm{s}}\left(x^0\right)\right)+\gamma_{\mathrm{s}}\right)<\left(\mu_{\mathrm{s}}\left(f_{\mathrm{s}}(y)\right)+\gamma_{\mathrm{s}}\right)\le\max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\min_z\min_\rho\left(\mu_{\mathrm{s}}\left(f_{\mathrm{s}}(\mathrm{z})\right)+\gamma_\rho\right)\right\}$$

для всех $(\rho,k=1,...,Q,\rho\ne k)$ или хотя бы одного $\mathrm{s}\in\{1,...,Q\}$. Отсюда следует справедливость доказываемых неравенств.

<u>Утверждение 3.5</u>. Пусть $\mu_k(f_k(y))$ функция принадлежности $f_k(y)$, определяемое как в (3.33). x^0 оптимальное решение улучшаемой задачи

$$\sum_{k=1}^Q\gamma_k\to\max\,,$$
$$\mu_k\left(f_k(x)\right)-\gamma_k\ge\lambda^*,\; k=1,...,Q, \tag{3.35}$$
$$x\in X,\;\;\gamma_k\ge0.$$

Тогда решение $x^0\in X$ Парето – оптимальное решение задачи (3.31).

<u>Доказательство</u>. Предположим обратное. Пусть $x^0\in X$ не Парето – оптимальное решение (3.31). Тогда существует такое

решение $y \in X$, что $f_k(y) \le f_k(x^0)$ при всех ($k = 1,...,Q$) и $f_s(y) < f_s(x^0)$ для некоторого $s \in \{1,..,Q\}$.

Так как вектор $\gamma_k, k = 1,...,Q$ положительный и x^0 удовлетворяет следующие равенство:

$$\mu_k\left(f_k(x^0)\right) - \gamma_k = \lambda^*,\ k = 1,...,Q \text{ и } \sum_{k=1}^{Q} \gamma_k = \sum_{k=1}^{Q} \mu_k\left(f_k(x^0)\right) - Q\lambda^*.$$

Тем не менее существует $f_k(y) \le f_k(x^0)$ при всех ($k = 1,...,Q$) и $f_s(y) \le f_s(x^0)$ для некоторого s.

Это приводит к следующим неравенством:

$$\sum_{k=1}^{Q} \gamma_k = \sum_{k=1}^{Q} \mu_k\left(f_k(x^0)\right) - Q\lambda^* = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne s}}^{Q} \mu_k\left(f_k(x^0)\right) + \mu_s\left(f_s(x^0)\right) - Q\lambda^* <$$

$$< \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne s}}^{Q} \mu_k\left(f_k(y)\right) + \mu_s\left(f_s(y)\right) - Q\lambda^*.$$

Это означает $x^0 \in X$ не является оптимальным решением (3.35). Противоречивость показывает, что утверждение уместный.

Нахождение Парето – оптимального решения (3.35) при условии (3.33) приводится к решению следующий задачи линейного программирование:

$$\begin{cases} \mathrm{R} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{Q}} \mathrm{c_k} x_k \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k,\ k = 1,...,Q + m, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n. \end{cases} \tag{3.36}$$

Решение данной задачи находим с использованием рекуррентных нейронных сетей.

Для расчета модели рекуррентными нейронными сетями надо перейти к противоположной функции

$$R = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{Q} c_k x_k$$

и в соответствующей таблице записывать значения c_k с противоположным знаком.

При подаче на вход сети вектора, определяются состояния нейронов, но затем, из-за того, что выходы нейронов имеют обратные связи, на их входы опять поступает новый вектор, и состояния снова изменяются. При подаче вектора на вход стабильных рекуррентных сетей, вырабатываются выходные сигналы нейронов, которые затем опять поступают на входы, снова генерируя новый вектор состояний, но, по мере роста числа итераций, количество изменений состояний узлов уменьшается, пока сеть не установится в конечное состояние. Сети без обратных связей всегда стабильные, так как при подаче одного вектора на вход, узлы сети только один раз могут изменять свое состояние, вследствие постоянства входов нейронов.

Для решения задачи (3.36) предложена рекуррентная нейронная сеть [2], которая описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u_k(t)}{\partial t} = -\eta\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\right) + \lambda c_k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tag{3.37}$$

где $x_k = f(u_k(t)),\quad f(u) = \dfrac{1}{1+\exp(-\beta u)}$. Как и в сети Хопфильда, здесь используется матрица нейронов размером $n \times n$, но нейроны взаимодействуют не по принципу «каждый с каждым», а по строкам и столбцам.

Разностный вариант этого уравнения имеет вид

$$u_k^{t+1} = u_k^t - \Delta t \cdot \left[\eta\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\right) - \lambda c_k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \tag{3.38}$$

где Δt - шаг по времени. Параметры $\Delta t, \eta, \lambda, \tau, \beta$ подбираются экспериментально и существенно влияют на скорость достижения решения задачи и качество этого решения.

Для ускорения решения системы уравнений (3.38) предложен принцип «Winner takes all» [3]:

1. Порождается матрица $\left\| x_k^0 \right\|$ случайных значений $x_k^0 \in [0,1]$.

2. Итерация (3.38) продолжаются до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k \le \varepsilon,$$

где ε - заданная точность выполнения ограничений (3.36).

Шаги 1 и 2 повторяются.

Одним из основных свойств искусственных нейронных сетей является надежность нейросетевых моделей. Это свойство может позволить строить прикладные нейросетевые системы для областей, где требуется высокая надежность.

Не менее важным качеством является обучаемость нейронных сетей.

Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАСШИРЕННОГО НЕЧЕТКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К РЕАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

4.1. Применение метода расширенного нечеткого программирования к реальной транспортной задаче

Основная транспортная задача была первоначально разработана Хичкоком [91]. Существует несколько классических методов решения таких транспортных задач, когда данные задаются точным образом. Но в реальных транспортных задачах данные могут быть неизвестны с уверенностью. Но в реальных транспортных задачах данные могут быть неизвестны с уверенностью. В таких случаях неточные данные можно рассматривать как интервальные или нечеткие данные. Теория нечетких множеств была введена Заде [92]. Зиммерманн [93] представил задачи нечеткого линейного программирования (ЛП). Зиммерманн [94] рассматривал ЛП с нечеткой целью и нечеткими ограничениями и использовал линейную функцию принадлежности и оператор min в качестве агрегатора этих функций. Таким образом, была сформулирована задача нечеткого линейного программирования (FLP). Кроме того, теория нечетких множеств была применена для решения LPP с несколькими целевыми функциями. Нечеткие ограничения и целевые функции использовались для решения многокритериальных задач линейного программирования. Чанас [95] сосредоточился на модели нечеткого линейного программирования для решения транспортных задач с четкими коэффициентами затрат и нечеткими значениями спроса и предложения. Чанас и Кухта [96] разработали алгоритм оптимального решения ТП с нечеткими коэффициентами, которые выражаются в виде нечетких чисел LR. Чанас и Кучта [97] разработали алгоритм решения целочисленной нечеткой транспортной задачи с нечетким спросом и предложением. Бит и Бисвал [98] применили метод нечеткого программирования с линейной функцией принадлежности для решения многокритериальной транспортной задачи (МОТР). Бит и Бисвал [99] предложили аддитивную модель нечеткого программирования, которая учитывает веса и приоритеты для всех неэквивалентных целей для задач транспортного планирования. Ли и Лай [100] разработали метод нечеткого компромиссного программирования для получения компромиссного решения без доминирования для МОТР, в котором различные цели рассматривались синтетически с маргинальной оценкой для отдельных целей и глобальной оценкой для всех целевых функций. Реальная многоиндексная многоцелевая транспортная задача была решена Куром, Мукерджи и Басу в [101], [102], [103], [104] и [105] с использованием различных подходов. Интуиционистские нечеткие множества (IFS) были введены как обобщение нечеткого множества (FS). Здесь вместо точных чисел использовались степени принадлежности и непринадлежности. Интуиционистские нечеткие множества (ИНМ) были введены Атанасовым [106]. Атанасов и Гаргов [107] ввели понятие интервальнозначных интуиционистских нечетких множеств (IVIFS) как дальнейшее обобщение понятия IFS. Атанасов [108] также определил некоторые законы работы ИВИФС. Ангелов [109] переформулировал задачи оптимизации в интуиционистской нечеткой среде. Было выполнено несколько работ с использованием треугольных и трапециевидных интуиционистских нечетких чисел. Гани и Аббас [110] предложили новый метод решения интуиционистской нечеткой транспортной задачи с использованием треугольного интуиционистского нечеткого числа. Хуссейн и Кумар [111] применили метод нечеткой нулевой точки для поиска оптимального решения интуиционистских нечетких транспортных задач. Энтони [112] также разработал метод VAMs для ТР для треугольного интуиционистского нечеткого числа. Аггарвал и Гупта [113] решили ТП для обобщенного трапециевидного интуиционистского нечеткого числа методом ранжирования. П. П. Ангелов впервые ввел интуиционистскую нечеткую оптимизацию (IFO) в своей статье [119] и решил этим методом транспортную задачу с четкими данными. Концепция нейтрософического множества была введена Смарандаке [114] как обобщение четкого, нечеткого, интуиционистского, интервального интуиционистского нечеткого числа. К двум доступным параметрам: функции принадлежности истинности (T) и ложности (F) добавлена функция неопределенности (I). В нейтрософическом наборе неопределенность выражена в явном виде, а истина-принадлежность, неопределенность-принадлежность и ложная-принадлежность полностью независимы. В интуиционистских нечетких множествах неопределенность по умолчанию равна 1 –

$T(x)$- $F(x)$ (т.е. нерешительность или неизвестная степень). В нейтрософии членство в неопределенности $(I(x))$ вводится как новый подкомпонент, чтобы включить степень неуверенности лица, принимающего решение. Такой подход к проблеме выходил за рамки интуиционистских нечетких множеств. Ван и др. [115] ввели понятие однозначного нейтрософического множества (ОДНС). В настоящей работе представлено решение транспортных задач с нейтрософическими данными с использованием методов линейного программирования. Он имеет дело с целевой функцией затрат как с нейрософическими данными, и нейтрософский ТП был решен с использованием двух методов. В первом методе нечеткое линейное программирование (FLP) было расширено для нейрософических данных, а во втором методе используется метод четкого линейного программирования (CLP). Составы и растворы иллюстрируются с помощью решенного примера, а затем результаты сравниваются. Неопределенности реальных жизненных задач рассматриваются в виде нейтрософических данных. В транспортных задачах стоимость транспортировки, спрос и предложение могут быть не известны точно в виде четких цифр. Таким образом, неопределенности можно рассматривать с точки зрения их степеней приемлемости, степеней неопределенности и степеней отклонения. То есть нейтрософические нечеткие числа могут использоваться для представления неточных данных о стоимости перевозки, спросе или предложении или всего в транспортной задаче. Это можно пояснить с помощью примера. Если стоимость перевозки принять в терминах нейтрософского нечеткого числа (0,8, 0,1, 0,2), то это означает, что степень принятия имеющейся стоимости равна 0,8, степень неопределенности равна 0,1 а степень отклонения доступной стоимости равна 0,2.

Наконец, методы впервые применяются для решения реальной многоцелевой и многоиндексной нейтрософической транспортной задачи. Задача решена для оптимизации трех целей одновременно, а именно, транспортных расходов, скорости износа и недоиспользуемой мощности с нейрософическими данными. В работе представлено лучшее применение метода для решения многокритериальных транспортных задач.

4.1.1. Однозначный нейтрософический набор (SVNS)

SVNS A в X характеризуется функцией принадлежности истинности $T_A(x)$, функцией принадлежности неопределенности $I_A(x)$ и функцией принадлежности ложности $F_A(x)$ для каждой точки x в X, $T_A(x)$, $I_A(x)$, $F_A(x)$ ε [0, 1].
Когда X непрерывно, SVNS A можно записать как

$$A = \int \frac{\langle T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle}{x}, x \in X$$

Когда X является дискретным, SVNS A можно записать как

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle T_A(x_i), I_A(x_i), F_A(x_i) \rangle}{x_i}, x_i \in X$$

Транспортная задача предназначена для минимизации транспортных расходов из разных источников в разные пункты назначения.

- **Классические транспортные задачи:**

В классической транспортной задаче целевая функция стоимости и ограничения рассматриваются как четкие значения. Поэтому необходимо вычислить оптимальное решение, которое минимизирует целевые функции затрат и удовлетворяет всем ограничениям.

Минимизировать $f\ (x)$

При условии $g_j(x) \le 0, j = 1, 2, \ldots.. q$ (4.1)

- **Нечеткая транспортная задача:**

Позже нечеткая транспортная задача была введена [95,96,97] и использовалась в дальнейших работах [101-105,112,116]. Степень удовлетворения целевой функции и ограничений максимизируется для нахождения оптимального решения.

- **Интуиционистская нечеткая транспортная задача:**

Затем рассматривалась интуиционистская нечеткая транспортная задача (IFTP) [109, 110, 111, 113]. В таком случае также рассматривается степень отклонения $\upsilon_i\ (x)$ наряду со степенью приемлемости $\mu_i\ (x)$ целевой функции стоимости и ограничений. Степень приемлемости максимизируется, а степень неприятия минимизируется, чтобы найти оптимальное решение в таких задачах.

- **Нейтрософическая транспортная задача:**

В транспортных задачах с нейтрософическими данными фактор неопределенности рассмотрен впервые. Степень неопределенности $r_i\ (x)$также рассматривалась вместе с двумя доступными параметрами, степенью приемлемости $\mu_i\ (x)$ и степенью отклонения $\upsilon_i\ (x)$ целевой функции стоимости и ограничениями. Проблема состоит в том, чтобы максимизировать степень принятия и минимизировать степень неприятия и неопределенности.

Модель 1. Модель нечеткого линейного программирования (для нейтрософических данных):

Для одноцелевого ТР

Максимизировать $Z_1 = \sum\sum \mu_{ij} x_{ij}$

Максимизировать $Z_1 = \sum\sum r_{ij} x_{ij}$

Максимизировать $Z_1 = \sum\sum \upsilon_{ij} x_{ij}$

при условии $0 \le \mu(x), r(x), \upsilon(x) \le 1,$

$\sum_j x_{ij} = S_i$, где S_i обозначает предложение источника i,

$\sum_j x_{ij} = D_i$, где D_i обозначает спрос пункта назначения j,

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (4.2)$$

Для многоцелевого ТП мы получаем набор подобных трех уравнений для каждой из целевых функций.

Модель 2. Модель четкого линейного программирования (для нейтрософических данных)

Для одноцелевых транспортных задач модель:

Максимизировать $Z = \sum\sum (\mu_{ij} - \upsilon_{ij} - r_{ij}) x_{ij}$ (4.3)

при условии $0 \le \mu(x), r(x), \upsilon(x) \le 1$ и другие ограничения, упомянутые в уравнении (4.2)

Для многокритериальных транспортных задач мы получаем набор подобных уравнений для каждой целевой функции.

4.1.2. Нечеткое линейное программирование

Транспортная задача с нейтрософическими данными была сформулирована как многокритериальная транспортная задача, как и в модели 1 и решена методом нечеткого линейного программирования (Das [116], Zimmermann [93]).

Метод расширенного нечеткого программирования

Шаг 1: Решите многоцелевую транспортную задачу как транспортную задачу с одной целью, используя каждый раз только одну задачу и игнорируя другие.

Шаг 2: По результатам шага 1 определите соответствующие значения для каждой цели в каждом полученном решении. Затем найдите нижнюю и верхнюю границы , Z_k^L и Z_k^U $(k = 1, 2, 3, ..., K)$.

Шаг 3: Линейная функция принадлежности

Линейная функция принадлежности $\mu_{k(x)}$, соответствующая k-й цели задачи минимизации, определяется как

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad Z_k \le Z_k^L, \\ 1 - \dfrac{Z_k - Z_k^L}{Z_k^U - Z_k^L} & \text{если} \quad Z_k^L < Z_k < Z_k^U, \\ 0 & \text{если} \quad Z_k \ge Z_k^U \end{cases} \tag{4.4}$$

Точно так же линейная функция принадлежности может быть определена для задачи максимизации как

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad Z_k \le Z_k^L, \\ 1 - \dfrac{Z_k - Z_k^U}{Z_k^U - Z_k^L} & \text{если} \quad Z_k^L < Z_k < Z_k^U, \\ 1 & \text{если} \quad Z_k \ge Z_k^U \end{cases} \tag{4.5}$$

Задача линейного программирования может быть дополнительно упрощена, как в модели 3:

Модель 3:

Максимизировать λ при условии $Z_k + \lambda(Z_k^U - Z_k^L) \le Z_k^U$ (4.6)

для задачи минимизации и $Z_k + \lambda(Z_k^U - Z_k^L) \le Z_k^L$ (4.7)

для задачи максимизации с заданными ограничениями и ограничением неотрицательности, как в модели 1 и $\lambda \ge 0.$ (4.8)

Таким образом, шаг 3 дает значения трех целевых функций Z_1, Z_2 и Z_3, как и в модели 1.

Шаг 4:

$$Z = Z_1 - Z_2 - Z_3. \tag{4.9}$$

Это обеспечивает четкое оптимальное значение для целевых функций. Затем, используя определение функции принадлежности стоимости, степени удовлетворения, неопределенности и отклонения функции принадлежности решения получаются как однозначный нейтрософский набор (SVNS).

4.1.3. Четкое линейное программирование

Модель 1 можно далее сформулировать как одноцелевую задачу линейного программирования, как и в модели 2, и она решается, как обычно, с помощью стандартного программного обеспечения. Решение дает оптимальное значение целевой функции стоимости Z как четкое значение. Для многоцелевых транспортных задач он формирует набор целевых функций в уравнениях, которые можно решить с помощью метода нечеткого программирования, и оптимальное решение может быть получено как четкое значение для каждой целевой функции.

Пример 4.1.

Задача рассматривается как нейтрософическая транспортная задача (НТП), в которой каждая стоимость перевозки принимается как нейтрософические данные, представляющие степень принятия, степень неопределенности и степень отклонения стоимости, как в таблице 4.1. Рассматриваются спрос и пропускная способность. как четкие значения.

Таблица 4.1

Данные для NFTP

	Market 1	**Market 2**	**Market 3**	**Market 4**	**Вместимость**
Порт 1	(0.6,0.1,0.2)	(0.7,0.2,0.1)	(0.3,0.3,0.1)	(0.8,0.1,0.1)	400
Порт 2	(0.5,0.2,0.3)	(0.4,0.1,0.1)	(0.5,0.3,0.1)	(0.3,0.3,0.2)	150
Порт 3	(0.4,0.3,0.2)	(0.3,0.2,0.2)	(0.6,0.3,0.1)	(0.7,0.3,0.2)	300
Требование	200	200	100	350	(D_j)

Цель этой задачи может быть определена степенью приемлемости $\mu_o(x)$, степенью неопределенности $r_o(x)$ и степенью отклонения $\upsilon_o(x)$ функции стоимости, определяемой следующим образом:

$$\mu_o(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} < 200 \\ \dfrac{(350 - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij})}{150}, & 200 \le \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} \le 350 \\ 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} > 350 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$r_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<250 \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}-250)^2}{150}, & 230\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases} \qquad (4.11)$$

$$r_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<200 \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}-200)^2}{22500}, & 200\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases} \qquad (4.12)$$

где затраты считаются в тысячах долларов.

Решение

Данная задача является нейтрософской транспортной задачей (НТП) и решается указанными выше методами и получены результаты.

Решение с данными табл. 4.1 методом на основе ФЛП

Подставляя нейтрософические данные из Таблицы 4.1 в Модель 1, мы получаем три различные целевые функции как

Максимизировать

$$Z_1=0.6x_{11}+0.7x_{12}+0.3x_{13}+0.8x_{14}+0.5x_{21}+0.4x_{22}+0.5x_{23}+0.3x_{24}+0.4x_{31}+0.3x_{32}+0.6x_{33}+0.7x_{34}$$

Мининизировать

$$Z_2=0.1x_{11}+0.2x_{12}+0.3x_{13}+0.1x_{14}+0.2x_{21}+0.1x_{22}+0.3x_{23}+0.3x_{24}+0.3x_{31}+0.2x_{32}+0.3x_{33}+0.3x_{34}$$

Мининизировать

$$Z_3=0.2x_{11}+0.1x_{12}+0.1x_{13}+0.1x_{14}+0.3x_{21}+0.1x_{22}+0.1x_{23}+0.2x_{24}+0.2x_{31}+0.2x_{32}+0.1x_{33}+0.2x_{34}$$

при условии

$$\sum_j x_{ij}=S_i\ ,$$

где i обозначает запас источника i, указанный в таблице 4.1.

$$\sum_i x_{ij}=D_j\ ,$$

где D_j обозначает спрос пункта назначения j, указанный в таблице 4.1.

$$x_{ij}\ge 0\,. \qquad (4.13)$$

Шаг 1: Проблема решается с учетом единственной цели, принимая только одну целевую функцию и пренебрегая другими. Наборы решений получаются как:

$$z_1 = 565,\ z_2 = 180,\ z_3 = 140.$$

Шаг 2: Для каждого набора решений значения для двух других целевые функции получаются как:

$$Z_1 = 565 \qquad Z_1 = 505\,(\textit{для набора решений для}\, Z_2),$$

$$Z_1 = 515\ (\textit{для набора решений для}\, Z_3)$$

$$Z_2 = 140 \qquad Z_2 = 180\,(\textit{для набора решений для}\, Z_1),$$

$$Z_2 = 110\ (\textit{для набора решений для}\, Z_3)$$

$$Z_3 = 104 \qquad Z_3 = 140\,(\textit{для набора решений для}\, Z_1),$$

$$Z_3 = 110\ (\textit{для набора решений для}\, Z_2)$$

Для каждой цели лучшие и худшие значения даны как

$$Z_1^U = 565, \qquad Z_1^L = 505,$$

$$Z_2^U = 180, \qquad Z_2^L = 140,$$

$$Z_3^U = 140, \qquad Z_3^L = 105$$

Шаг 3: Используя значения, полученные на шаге 2 в уравнениях (4.6) и (4.7), полученных из модели 3, окончательное решение получается как

$$\lambda = 0.9090909,$$

$$Z_1 = 508.64,$$

$$Z_2 = 143.64,$$

$$Z_3 = 108.18$$

Шаг 4: Использование значений, полученных в уравнении (4.9), $Z = 256.82$

Также степень приемлемости, неопределенности и отклонения целевых функций стоимости получают с использованием уравнений (4.10), (4.11) и (4.12) как

$$\mu_o = 0.62, r_o = 0.0047, \upsilon_0 = 0.14$$

$$\textit{то есть}\ (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.62, 0.0047, 0.14)\cdot$$

Решение с данными табл. 4.1 методом на основе CLP

Подставляя нейтрософические данные из табл. 4.1 в модель 2, получаем

Минимизировать

$$Z = 0.3x_{11} + 0.4x_{12} - 0.9x_{13} + 0.6x_{14} + 0x_{21} + 0.2x_{22} + 0.1x_{23} - 0.8x_{24} - 0.1x_{31} - 0.1x_{32} + 0.2x_{33} + 0.2x_{34}$$

с учетом всех ограничений в уравнении (4.13).

Транспортная задача решается как одноцелевая ТП с помощью четкого линейного программирования, как в модели 2, и получается четкое оптимальное решение как $Z = 260$.

Степень приемлемости, неопределенности и отклонения целевых функций затрат получают как

$$\mu_o = 0.6, r_o = 0.01, \upsilon_0 = 0.16$$

$$\text{то есть } (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.6, 0.01, 0.16)\,.$$

4.1.4.Реальная многоцелевая многоиндексная транспортная задача

Чтобы проиллюстрировать применение предложенного подхода к реальной многокритериальной многоиндексной транспортной задаче, рассматривается следующий численный пример из Кура, Мукерджи и Басу [101], ранее взятый как приблизительные прошлые записи с завода DSP, Дургапур, Западная Бенгалия, Индия.

Задача связана с решением многокритериальной многоиндексной транспортной задачи реальной жизни с акцентом на минимизацию транспортных расходов, скорости износа и недоиспользуемой емкости транспортируемого сырья Кур Д., Басу К. Применение метода расширенного нечеткого программирования к реальной задаче транспортировки в нейтрософической среде материалов, таких как уголь, железная руда и т. д., из разных источников в разные места назначения на сталелитейном заводе в Дургапуре (DSP) различными видами транспорта, такими как поезд, грузовики и т. д. Задача формулируется с использованием различных параметров. в целевой функции как нейтрософические данные, а спрос и предложение как четкие числа.

Рассмотрим задачу, в которой у нас есть три вида сырья (m=3), т. е. q = 1 (уголь), 2 (железная руда), 3 (известняк).
материалы транспортируются из разных i-х источников в j-е места назначения различными видами транспорта «h»
где h=1(поезд), 2(грузовик) по таблице 4.2.

Таблица 4.2

Количество сырья, источников, пунктов назначения и способа транспортировки

Сырье	Источники	Направления	Режим транспортировки
q=1	i=1,2	j=1,2	h=1
q=2	i=1,2,3	j=1,2	h=1,2
q=3	i=1,2,3,4,5	J=1	h=1

После этого мы рассматриваем задачу как нейтрософическую транспортную задачу (НТП), в которой каждая транспортная стоимость принимается как нейтрософические данные, представляющие степень принятия, неопределенности и отклонения стоимости. Спрос и предложение считаются четкими цифрами.

Функции транспортных затрат как $C_{ijh}^{q}\,(C_{ij1}^{1}, C_{ij1}^{2}, C_{ij2}^{2}, C_{ij1}^{3})$ и другая цель скорость износа и недоиспользованная мощность в матричной форме. Данные приведены ниже.

$$C_{ij1}^{1} = \begin{bmatrix} [0.8, 0.01, 0.15] & [0.6, 0.1, 0.03] \\ [0.5, 0.02, 0.3] & [0.9, 0.01, 0.01] \end{bmatrix}_{h=1}$$

$$C_{ij1}^{2} = \begin{bmatrix} [0.5, 0.01, 0.4] & [0.75, 0.01, 0.02] \\ [0.55, 0.02, 0.3] & [0.4, 0.1, 0.2] \\ [0.8, 0.01, 0.1] & [0.9, 0.02, 0.03] \end{bmatrix}_{h=1}$$

$$C_{ij2}^{2} = \begin{bmatrix} [0.4, 0.1, 0.3] & [0.5, 0.2, 0.3] \\ [0.6, 0.02, 0.25] & [0.6, 0.1, 0.3] \\ [0.8, 0.01, 0.12] & [0.9, 0.01, 0.01] \end{bmatrix}_{h=2}$$

$$C_{ij1}^{3} = \begin{bmatrix} [0.85, 0.01, 0.02] \\ [0.78, 0.02, 0.2] \\ [0.8, 0.01, 0.1] \\ [0.7, 0.01, 0.15] \\ [0.5, 0.02, 0.3] \end{bmatrix}_{h=1}$$

$$U_{ij1}^{1}=\begin{bmatrix}[0.7,0.1,0.2] & [0.6,0.1,0.2]\\ [0.4,0.2,0.2] & [0.8,0.02,0.1]\end{bmatrix}_{h=1}$$

$$U_{ij1}^{2}=\begin{bmatrix}[0.3,0.1,0.2] & [0.5,0.02,0.2]\\ [0.45,0.1,0.2] & [0.4,0.02,0.3]\\ [0.6,0.1,0.3] & [0.7,0.03,0.2]\end{bmatrix}_{h=1}$$

$$U_{ij2}^{2}=\begin{bmatrix}[0.4,0.02,0.1] & [0.5,0.01,0.2]\\ [0.7,0.01,0.3] & [0.8,0.02,0.2]\\ [0.6,0.02,0.3] & [0.7,0.1,0.2]\end{bmatrix}_{h=2}$$

$$U_{ij1}^{3}=\begin{bmatrix}[0.5,0.03,0.3]\\ [0.8,0.2,0.1]\\ [0.7,0.01,0.2]\\ [0.4,0.02,0.3]\\ [0.6,0.01,0.2]\end{bmatrix}_{h=1}$$

$$R_{ij1}^{1}=\begin{bmatrix}[0.6,0.1,0.2] & [0.5,0.1,0.3]\\ [0.8,0.01,0.1] & [0.55,0.02,0.2]\end{bmatrix}_{h=1}$$

$$R_{ij1}^{2}=\begin{bmatrix}[0.6,0.01,0.3] & [0.9,0.01,0.1]\\ [0.8,0.1,0.2] & [0.7,0.01,0.2]\\ [0.4,0.3,0.1] & [0.6,0.2,0.1]\end{bmatrix}_{h=1}$$

$$R_{ij2}^{2}=\begin{bmatrix}[0.6,0.01,0.2] & [0.95,0.01,0.02]\\ [0.9,0.02,0.1] & [0.8,0.01,0.2]\\ [0.62,0.02,0.2] & [0.7,0.1,0.2]\end{bmatrix}_{h=2}$$

$$R_{ij1}^{3}=\begin{bmatrix}[0.9,0.02,0.1]\\ [0.4,0.1,0.3]\\ [0.6,0.02,0.2]\\ [0.75,0.1,0.1]\\ [0.8,0.2,0.1]\end{bmatrix}_{h=1}$$

Данные в виде четких цифр по спросу и предложению выглядят следующим образом:

Таблица 4.3

Данные о поставках

q	**h**	**I**	S_{iq}
1	1	1	182.5
1	1	2	107.5
2	1	1	59
2	1	2	40
2	1	3	30.5
2	2	1	77
2	2	2	89.5
2	2	3	51.25
3	1	1	78.05
3	1	2	47.75
3	1	3	122.5
3	1	4	147.5
3	1	5	120

Таблица 4.4

Данные о спросе

Q	**h**	**j**	D_{jq}
1	1	1	90
1	1	2	195
2	1	1	50
2	1	2	81
2	1	3	88
2	2	1	129
2	2	2	49

Данные по подаче S_{iq}, $\forall\, i$, q приведены в таблице 4.3. Данные по спросу D_{jq}**,** $\forall\, j$, q приведены в таблице 4.4. Нейтрософическая цель этой проблемы может быть определена степенью принятия $\mu_o(x)$, степенью неопределенности $r_o(x)$ и степенью отклонения о $\upsilon_o(x)$ трех целевых функций, определяемых следующим образом:

Для транспортных расходов:

$$\mu_o(x)=\begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<200 \\ \dfrac{(350-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij})}{150}, & 200\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases}\tag{4.14}$$

$$r_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<210 \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}-200)^2}{19600}, & 210\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases}\tag{4.15}$$

$$\upsilon_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<150 \\ \dfrac{(350-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij})}{200}, & 200\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases}\tag{4.16}$$

Для скорости износа:

$$\mu_o(x)=\begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<200 \\ \dfrac{(350-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij})}{150}, & 200\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases}\tag{4.17}$$

$$r_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<155 \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}-155)^2}{38025}, & 155\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\upsilon_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<150 \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}-155)^2}{40000}, & 150\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 350 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>350 \end{cases} \tag{4.19}$$

Неиспользуемая мощность:

$$\mu_o(x)=\begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<100 \\ \dfrac{(350-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij})}{200}, & 100\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 400 \\ 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>400 \end{cases} \tag{4.20}$$

$$r_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<150 \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}-155)^2}{90000}, & 150\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 400 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>4000 \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\upsilon_o(x)=\begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}<100 \\ \dfrac{(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}-100)^2}{40000}, & 100\le\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}\le 400 \\ 1, & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}>400 \end{cases} \tag{4.22}$$

Данная задача сначала записывается в виде сформулированная модель, Модель 4 как:

$$\text{Минимизировать } Z_1=\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{o}\sum_{h=1}^{p}C_{ijh}^{q}X_{ijh}^{q}, \tag{4.23}$$

$$\text{Минимизировать } Z_2=\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{o}\sum_{h=1}^{p}R_{ijh}^{q}X_{ijh}^{q}, \tag{4.24}$$

$$\text{Минимизировать } Z_3=\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{o}\sum_{h=1}^{p}U_{ijh}^{q}X_{ijh}^{q}\ , \tag{4.25}$$

$$\text{При условии } \sum_{j}\sum_{h}X_{ijh}^{q}\ge S_{iq},\ \forall\ i,q\ , \tag{4.26}$$

$$\sum_{i}\sum_{h}X_{ijh}^{q}\ge D_{jq},\ \forall\ i,q\ , \tag{4.27}$$

$$X_{ijh}^{q}\ge 0. \tag{4.28}$$

где q = тип сырья; m= количество сырья;

n = количество источников;

o = количество мест назначения;

h = виды транспорта; p = количество видов транспорта.

X_{ijh}^{q} - количество q-го сырья, подлежащее транспортировке из i-го источника в j-е место назначения по способу транспортировки «h»;

C_{ijh}^{q} - Транспортные расходы (в миллиардах сумах на метрическую тонну) транспортировки q-го сырья от i-го источника до j-го пункта назначения по способу транспортировки «h» как нейтрософический набор;

R_{ijh}^{q} - Скорость износа (в тоннах на миллион метрических тонн) при транспортировке q-го сырья из i-го источника в j-е место назначения по способу транспортировки «h»; как нейтрософический набор;

U_{ijh}^{q} - Недоиспользованная мощность (в тоннах на тысячу метрических тонн) при транспортировке q-го сырья из i-го источника в j-е место назначения по способу транспортировки «h»; как нейтрософический набор;

S_{iq} - Поставленное количество q-го сырья из i-го источника (наличие) (в миллионах метрических тонн);

D_{iq} = спрос на q-е сырье в j-м пункте назначения (потребность) (в миллионах метрических тонн);

Z_1, Z_2, Z_3 — минимальные значения нейтрософических стоимость транспортировки, Скорость износа и Недоиспользуемая мощность.

Решение

Данная задача является нейтрософской транспортной задачей (НТП) и решается указанными выше методами.

Решение методом на основе ФЛП:

При подстановке вышеприведенных нейтрософических данных в Модель 1 получаются три разные целевые функции для каждого из уравнений (4.23), (4.24) и (4.25). Тогда задача может быть решена с помощью метода расширенного нейтрософского нечеткого программирования.

Шаг 1: Задача решена, рассматривая как единственную цель, принимая только одну целевую функцию и пренебрегая другими. Наборы решений получаются как:

$$1.Z_{11} = 419.66 \quad 2.Z_{12} = 21.43 \quad 3.Z_{13} = 166.02$$

$$4.Z_{21} = 411.94 \quad 5.Z_{22} = 76.64 \quad 6.Z_{23} = 158.32$$

$$7.Z_{31} = 326.51 \quad 8.Z_{32} = 34.66 \quad 9.Z_{33} = 229.94$$

Шаг 2: Для каждого набора решений могут быть получены значения других целевых функций. Наилучшие и наихудшие значения для каждой цели получаются как:

$$Z_{11}^L = 364.58 \quad Z_{11}^U = 828.49 \quad Z_{11}^U - Z_{11}^L = 463.91$$
$$Z_{12}^L = 21.43 \quad Z_{12}^U = 42.13 \quad Z_{12}^U - Z_{12}^L = 20.7$$
$$Z_{13}^L = 103.13 \quad Z_{13}^U = 216.79 \quad Z_{13}^U - Z_{13}^L = 113.66$$
$$Z_{21}^L = 376.66 \quad Z_{21}^U = 843.75 \quad Z_{21}^U - Z_{21}^L = 467.09$$
$$Z_{22}^L = 35.43 \quad Z_{22}^U = 85.42 \quad Z_{22}^U - Z_{22}^L = 49.99$$
$$Z_{23}^L = 64.12 \quad Z_{23}^U = 191.88 \quad Z_{23}^U - Z_{23}^L = 127.76$$
$$Z_{31}^L = 326.51 \quad Z_{31}^U = 714.85 \quad Z_{31}^U - Z_{31}^L = 388.28$$
$$Z_{32}^L = 31.22 \quad Z_{32}^U = 56.14 \quad Z_{32}^U - Z_{32}^L = 24.92$$
$$Z_{33}^L = 91.65 \quad Z_{33}^U = 255.72 \quad Z_{33}^U - Z_{33}^L = 164.07$$

Шаг 3: В соответствии с тремя целевыми функциями можно определить линейную функцию принадлежности. Тогда задача может быть решена с помощью уравнений (4.6) и (4.7) из модели 4 и окончательное решение будет получено как

$$\lambda = 0.8365686$$
$$Z_{11} = 328.75, \qquad Z_{12} = 0, \qquad Z_{13} = 75.63$$
$$Z_{21} = 284.38, \qquad Z_{22} = 35.45, \quad Z_{23} = 85$$
$$Z_{31} = 263.25, \qquad Z_{32} = 0, \qquad Z_{33} = 105.25$$

Шаг 4: Используя значения, полученные в уравнении (4.12), $Z_1 = 253{,}12,\ Z_2 = 163{,}93,\ Z_3 = 158$.

Степень принятия, неопределенности и отклонения различных целевых функций получается как

- Стоимость перевозки:

$$\mu_o = 0.65, r_o = 0.095, \upsilon_0 = 0.13$$
$$т.е.\ (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.65, 0.095, 0.13)$$

- Скорость износа:

$$\mu_o = 0.93, r_o = 0.0021, \upsilon_0 = 0.005$$
$$т.е.\ (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.93, 0.0021, 0.005)$$

- Неиспользуемая мощност:

$$\mu_o = 0.8, r_o = 0.001, \upsilon_0 = 0.037$$
$$т.е.\ (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.8, 0.001, 0.037)$$

Решение методом на основе CLP:

Подставив нейтрософические данные в уравнение (4.3) в модели 2, получим систему из трех подобных уравнений, которые образуют многокритериальную транспортную задачу и, таким образом, могут быть решены методом нечеткого программирования.

Это дает оптимальное решение для каждой целевой функции. Окончательное четкое оптимальное решение получается как

$$\lambda = 0.4075449, \quad Z_1 = 217.665 \quad Z_2 = 329.12, \quad Z_4 = 169.355$$

Степень принятия, неопределенности и отклонения различных целевых функций получается как

- Стоимость перевозки:

$$\mu_o = 0.88, r_o = 0.003, \upsilon_0 = 0.014$$

$$т.е.\ (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.88, 0.003, 0.014).$$

- Скорость износа:

$$\mu_o = 0.104, r_o = 0.7, \upsilon_0 = 0.8$$

$$т.е.\ (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.104, 0.7, 0.8).$$

- Неиспользуемая мощность:

$$\mu_o = 0.77, r_o = 0.0059, \upsilon_0 = 0.053$$

$$т.е.\ (\mu_o, r_o, \upsilon_0) = (0.77, 0.0059, 0.053).$$

Два метода представлены для нейтрософических транспортных задач и проиллюстрированы примером. Затем метод впервые применяется для реальной многокритериальной и многоиндексной нейтрософической транспортной задачи. Оптимальное решение нейтрософических транспортных задач получено двумя вышеуказанными методами, т. е. с помощью FLP и другого с помощью CLP. Четкое оптимальное решение для целевой функции стоимости данной нейтрософической нечеткой транспортной задачи в получено методом FLP с использованием линейной функции принадлежности 256,82 (тыс. решение рассчитывается как (0,62, 0,0047, 0,14). Таким образом, степень удовлетворения решения составляет 0,62, что означает, что решение является приемлемым на 62%, неопределенным на 0,4% (неизвестно) и на 76% неприемлемым.

Таблица 4.5

Решение примера с использованием линейной функции принадлежности.

●

λ	Z_1	Z_1	Z_1	Z	(μ_o, r_o, υ_0)
0.909	508.64	143.6	108.2	256.8	(0.6,0.0047,0.14)

Степень удовлетворения оптимального решения зависит от соответствующей определенной функции принадлежности, неопределенности и непринадлежности в данных задачах. Степень удовлетворения и степень неприятия не обязательно должны дополнять друг друга. Четкое оптимальное решение транспортной задачи с объективной стоимостью данной нейтрософической транспортной задачи получено методом четкого линейного программирования как 260 (тысяч долларов). Степень удовлетворения этого решения составляет 0,6, что означает, что решение приемлемо на 60%, 0,01% неопределенно (неизвестно) и 0,16% отбраковываются.

Таблица 4.6

Сравнение полученных нейтрософических растворов с использованием методов FLP и CLP

	Использование нечеткого линейного программирования	Использование линейного программирования Crisp
Z	(0.62,0.0047,0.14)	(0 .6,0.01,0.16)

Четкое оптимальное решение для различных целевых функций — стоимости перевозки, степени износа и недоиспользованной мощности данной нейрософической транспортной задачи из реальной жизни получено методом FLP с использованием линейной функции принадлежности 253,12, 163,93 и 158, как в таблице 4.8. Степень приемлемости, неопределенности и отклонения полученного решения по транспортным затратам, темпам износа и недоиспользованию мощностей рассчитывают как (0,65,0,095,0,13), (0,93,0,0021,0,005) и (0,8,0,001,0,037). Таким образом, степень удовлетворения трех решений составляет 0,65, 0,93 и 0,859, что означает, что первое решение по транспортным затратам является приемлемым на 65%, неопределенным на 9% и неприемлемым на 13%. Второе решение по степени износа является приемлемым на 93 %, неопределенным на 0,2 % и неприемлемым на 0,5 %, а третье решение по недоиспользованию емкости — приемлемым на 80 %, неопределенным на 0,1 % и недопустимым на 3,7 %.

Таблица 4.7

Решение примера из реальной жизни с использованием линейной функции принадлежности.

λ	Z_1	Z_1	Z_1	Z	(μ_o, r_o, υ_0)
0.909	508.64	143.6	108.2	256.8	(0.6,0.0047,0.14)
	284.38	35.45	85	163.9	(0.93,0.002,0.005)
	263.25	0	105.2	158	(0.8,0.001,0.04)

Четкое оптимальное решение для транспортных расходов, степени износа и недоиспользуемой мощности рассчитывается как 217,67, 329,12 и 169,355 по методу CLP. Степень удовлетворения этого решения по транспортным затратам, скорости износа и недоиспользованию мощностей рассчитывается как 0,88, 0,104 и 0,77.

Таблица 4.8

Сравнение полученных нейтрософических растворов с использованием методов FLP и CLP

	Использование нечеткого линейного программирования	Использование линейного программирования Crisp
Стоимость транспортировки	(0.65.0.095,0.13)	(0.88,0.003,0.014)
Скорость износа	(0.93,0.00 21,0.005)	(0.104,0.7,0.8)
Неиспользуемая мощность	(0.8,0.001,0.037)	(0.77,0.0059,0.053)

Таким образом, метод FLP оказывается лучшим методом, поскольку он дает более оптимальное решение по сравнению с методом четкого линейного программирования.

- В этой работе Нейтрософская Транспортная Проблема (NTP) решается двумя методами - методом FLP и методом CLP.
- Первый метод, метод FLP, дает решение как четкое, а затем как SVNS, которые представляют собой степень принятия, неопределенности и отклонения решения, полученного из определенной функции принадлежности для конкретной задачи.
- Второй метод, то есть метод CLP, дает решение только в виде четкого числа. Затем вычисляется степень принятия, неопределенности и отклонения.
- Метод FLP можно рассматривать как лучший метод, и он дает более оптимальное решение.
- Данные SVNS могут отражать неопределенности реальной жизни и, таким образом, отображать более практичные решения проблемы, поскольку они помогают определить степень принятия, неопределенности и отклонения полученного решения.
- Реальная многокритериальная и многоиндексная нейрософская транспортная задача также была решена, кроме числового примера в разделе 4, иллюстрирующего два предложенных метода. Результаты и сравнения крупномасштабной задачи показаны в Таблице 4.5, Таблице 4.6, Таблице 4.7 и Таблице 4.8. Полученные результаты сравниваются, и оказывается, что метод FLP дает лучшее решение по сравнению с методом CLP для большинства задач. обстоятельства.
- Решение, полученное с помощью предложенных подходов, не сравнивалось ни с одним из существующих подходов для НТП, так как не проводилось никаких работ для нейрософической транспортной задачи. Это новый тип проблемы.
- Применение методов к реальной многоцелевой и многоиндексной нейрософической транспортной проблеме также является новой областью.

4.2. Анализ существующих методов диагностирования слабо формализуемых процессов

Модели и алгоритмы нечеткого вывода занимают центральное место в задачах принятия решений, управления, прогнозирования, классификации, распознавания и машинного обучения в условиях неопределенности нечеткой природы. Алгоритмы нечеткого вывода реализуются системами нечеткого вывода (СНВ), ядром которых являются продукционные правила типа «Если *A*, То *B*». Эти правила формируются на основе лингвистических высказываний экспертов. В совокупности система таких правил отображает эвристическую модель исследуемых задач.

При решении прикладных задачах в условиях неопределенности нечеткой, размытой (т.е. нестохастической) природы информацию, необходимую дли построения и реализации системы принятия решений, можно разделить на две части: численную (количественную), и лингвистическую (качественную), поступающую от эксперта. Значительная часть нечетких систем использует второй вид знаний, чаще всего представляемых в форме базы нечетких правил, объединяемых в СНВ. Особенностью моделей таких задач является наличие в них нечеткой базы правил, описывающей структуру нечеткой модели задачи в целом и содержащих основные знания (экспертную информацию) о моделируемой системе, т.е. главную составляющую «интеллекта» рассматриваемой задачи. Поэтому корректное формирование нечеткой базы правил является очень важным условием эффективного решения поставленной задачи. Для решения задач такого класса широкое применение получают подходы, основанные на интеллектуальных технологиях «Soft Computing».

Для того, чтобы такая модель была адекватна реальной ситуации, количество формируемых правил в СНВ обычно должно быть равно числу элементов входного вектора - условия А правила. Чрезмерно большое их число приводит к увеличению размерности и, соответственно, сложности решаемой задачи. Кроме того, объем имеющейся доступной информации, в том числе экспертной, о моделируемой системе часто оказывается недостаточным для построения более сложной и адекватной модели. Следует также учитывать наличие объективных ограничений на точность получения исходных данных. Поэтому при их формировании и оценке в процессе построения исследуемых моделей следует использовать принцип разумной полноты и точности. Это обуславливает важность анализа исходной информации, и использования процедур разумного сокращения количества правил.

Одним из перспективных подходов к формированию нечетких правил и настройки значений их параметров, в особенности, когда в наличии имеются только численные данные, являются нечеткие нейронные сети (fuzzy-neural). При всех достоинствах основным их недостатком является длительность построения базы нечетких правил в процессе итеративного обучения нейронных сетей.

С целью устранения этого недостатка предлагается комбинированный метод построения базы нечетких правил с использованием кластеризации на основе нечетких отношений и нечетких нейронных сетей. При построении процедур классификации и кластеризации были проанализированы и систематизированы различные критерии. Достоинство этого метода заключается в его простоте и высокой эффективности. Кроме того, он позволяет объединять численную информацию, представленную в форме обучающих данных, с лингвистической информацией, имеющей вид базы правил, за счет дополнения имеющейся базы правилами, созданными на основе численных данных.

Алгоритм синтеза правил СНВ и настройки их параметров реализуется в два этапа.

На первом этапе осуществляется кластеризация (clustering) входных переменных правил. Каждый из сформированных кластеров будет объединять группу исходных входных переменных, сходных по определенным признакам. В этом случае каждый кластер может рассматриваться как обобщенное условие для соответствующего формируемого правила СНВ. Результатом этого этапа являются лингвистические правила СНВ с предварительными, грубыми значениями их параметров, описывающих математические модели функций принадлежности.

На втором этапе производится уточнение и настройка этих параметров с использованием нечетких нейронных сетей и различных процедур обучения.

Существует множество методов кластеризации, которые можно классифицировать на четкие и нечеткие. Четкие методы кластеризации разбивают исходное множество объектов X на несколько непересекающихся подмножеств. При этом любой объект из X принадлежит только одному кластеру. Нечеткие методы кластеризации позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким (или даже всем) кластерам, но с различной степенью. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более "естественна", чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров.

Методы кластеризации также классифицируются по тому, определено ли количество кластеров заранее или нет. В последнем случае количество кластеров определяется в ходе выполнения алгоритма на основе распределения исходных данных.

Кластеризация – это разбиение элементов некоторого множества на группы на основе их схожести. Задача кластеризации состоит в разбиении объектов из X на несколько подмножеств (кластеров), в которых объекты более схожи между собой, чем с объектами из других кластеров. В метрическом пространстве «схожесть» обычно определяют через расстояние.

Алгоритмы кластеризации оперируют с объектами. Каждому объекту X отождествляется вектор характеристик $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Компоненты x_i, $i = 1, \ldots, d$ являются отдельными характеристиками объекта. Количество характеристик d определяет размерность пространства характеристик.

Множество, состоящее из всех векторов характеристик, обозначается $M = (X_1, \ldots, X_n)$, где $X_i = (x_{i1}, \ldots, x_{id})$.

Кластер представляет собой подмножество «близких друг к другу» объектов из M. Расстояние $D(X_i, X_j)$ между объектами X_i и X_j определяется на основе выбранной метрики в пространстве характеристик.

Четкая (непересекающаяся) кластеризация – кластеризация, в которой каждый объект X_i из М относится только к одному кластеру.

При анализе результатов кластеризации необходимо учитывать особенности использованных алгоритмов.

В некоторых алгоритмах кластеризации при отнесении объекта к очередному кластеру используются интегральные характеристики кластеров. Примером таких методов является итеративный алгоритм *k*-средних**.** В алгоритме *k*-средних вводится понятие центра кластера. Под расстоянием между объектом и кластером понимается расстояние между объектом и центром кластера. Классифицируемый объект относится к тому кластеру, расстояние до которого минимально. Обычно под расстоянием понимается евклидово расстояние, то есть объекты рассматриваются как точки евклидова пространства.

По отношению к обычному алгоритму k-средних главное изменение состоит во введении в формулу расчета расстояния между векторами масштабирующей матрицы A. В качестве масштабирующей обычно применяется симметричная положительно определенная матрица, т.е. матрица, у которой все собственные значения являются действительными и положительными.

Алгоритм Густафсона-Кесселя использует адаптивную норму для каждого кластера, т.е. для каждого j-го кластера существует своя норм-порождающая матрица. В этом алгоритме при кластеризации оптимизируются не только координаты центров кластеров и матрица нечеткого разбиения, но также и норм-порождающие матрицы для всех кластеров. Это позволяет выделять кластера различной геометрической формы.

GK – простой нечеткий алгоритм кластеризации, позволяющий обнаружить кластеры эллипсоидальной формы. В комбинации с алгоритмом нечетких k – средних он часто используется, чтобы инициализировать другие нечеткие алгоритмы кластеризации (Таблица 4.9).

Таблица 4.9

Сравнительный анализ базовый алгоритм нечетких k-средних и Алгоритм Густафсона-Кесселя

Базовый алгоритм нечетких k-средних	Алгоритм Густафсона-Кесселя
Шаг-1. Создать параметры алгоритма: c – количество кластеров; m – экспоненциальный вес; ε - параметр остановки алгоритма. Шаг – 2. Случайным образом сгенерировать матрицу нечеткого разбиения.	
Шаг – 3. Рассчитать центра кластеров:	

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(u_{ij}\right)^m \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} \left(u_{ij}\right)^m}$$	
Шаг – 4. Рассчитать расстояния между объектами из X и центрами кластиров: $D_{ij} = \sqrt{\left\| x_i - c_j \right\|^2}$	Шаг – 4. Вычисляем матрицу ковариации для j – ого кластера: $A_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(u_{ij}\right)^m \cdot \left(x_i - c_j\right)^T \cdot \left(x_i - c_j\right)}{\sum_{i=1}^{N} \left(u_{ij}\right)^m}$
Шаг – 5. Пересчитать элементы матрицы нечеткого разбиения: если $D_{ij} > 0$ $u_{ij} = \frac{1}{\left(D_{ij}^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{D_{ik}^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}$ если: $D_{ij} = 0$ $u_{ik} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases} \quad k = \overline{1,K}$	Шаг – 5. Рассчитать расстояния между объектами из X и центрами кластеров: $D_{A_j} = \left(x_i - c_j\right) \cdot \left[\left(\det\left(A_j\right)\right)^{\frac{1}{N}} \cdot A_j^{-1}\right] \cdot \left(x_i - c_j\right)^T$
Шаг – 6. Проверить условие $\left\| U - U^* \right\|^2 < \varepsilon,$ где U^*- матрица нечеткого разбиения на предыдущей итерации алгоритма. Если “да”, то перейти к шагу 7, иначе – к шагу 3.	Шаг – 6. Пересчитать элементы матрицы нечеткого разбиения: если $D_{ij} > 0$ $u_{ij} = \frac{1}{\left(D_{ij}^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{D_{ik}^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}$ если: $D_{ij} = 0$ $u_{ik} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases} \quad k = \overline{1,K}$
Шаг – 7. Конец.	Шаг – 7. Проверить условие $\left\| U - U^* \right\|^2 < \varepsilon,$ где U^*- матрица нечеткого разбиения на предыдущей итерации алгоритма. Если “да”, то перейти к шагу 8, иначе – к шагу 3.
	Шаг – 8. Конец.

Метод горной кластеризации предложен Р. Ягером и Д. Филевым в 1993 г. Кластеризация по горному методу не является нечеткой, однако, ее часто используют при синтезе нечетких правил из данных. Особенностью метода является отсутствие необходимости задания количества кластеров до начала работы алгоритма.

На первом шаге горной кластеризации определяют точки, которые могут быть центрами кластеров. На втором шаге для каждой такой точки рассчитывается значение потенциала, показывающего возможность формирования кластера в ее окрестности. Чем плотнее расположены объекты в окрестности потенциального центра кластера, тем выше значение его потенциала. После этого итерационно выбираются центры кластеров среди точек с максимальными потенциалами.

Метод опорных векторов (SVM — support vector machines) — это набор схожих алгоритмов вида «обучение с учителем», использующихся для задач классификации и регрессионного анализа. Этот метод принадлежит к семейству линейных классификаторов. Он может также рассматриваться как специальный случай регуляризации по А. Н. Тихонову. Особым свойством метода опорных векторов является непрерывное уменьшение эмпирической ошибки классификации и увеличение зазора. Поэтому этот метод также известен как метод классификатора с максимальным зазором.

Основная идея метода опорных векторов — перевод исходных векторов в пространство более высокой размерности и поиск разделяющей гиперплоскости с максимальным зазором в этом пространстве. Две параллельных гиперплоскости строятся по обеим сторонам гиперплоскости, разделяющей наши классы. Разделяющей гиперплоскостью будет гиперплоскость, максимизирующая расстояние до двух параллельных гиперплоскостей. Алгоритм работает в предположении, что чем больше разница или расстояние между этими параллельными гиперплоскостями, тем меньше будет средняя ошибка классификатора.

Алгоритм построения оптимальной разделяющей гиперплоскости, предложенный в 1963 году Владимиром Вапником — алгоритм линейной классификации. Однако в 1992 году Бернхард Босер, Изабель Гийон и Вапник предложили способ создания нелинейного классификатора, в основе которого лежит переход от скалярных произведений к произвольным ядрам, так называемый kernel trick (предложенный впервые М.А. Айзерманом, Э.М. Броверманом и Л.В. Розоноэром для метода потенциальных функций), позволяющий строить нелинейные разделители. Результирующий алгоритм крайне похож на алгоритм линейной классификации, с той лишь разницей, что каждое скалярное произведение в приведённых выше формулах заменяется нелинейной функцией ядра (скалярным произведением в пространстве с большей размерностью). В этом пространстве уже может существовать оптимальная разделяющая гиперплоскость. Так как размерность получаемого пространства может быть больше размерности исходного, то преобразование, сопоставляющее скалярные произведения, будет нелинейным, а значит функция, соответствующая в исходном пространстве оптимальной разделяющей гиперплоскости, будет также нелинейной.

Алгоритм K-ближайших соседей (KNN - K-nearest neighbour) является частью той науки, которая используется во многих приложениях в области глубинного анализа данных, статистического распознавания образов и т.д.

Задача поиска ближайшего соседа заключается в отыскании среди множества элементов, расположенных в многомерном метрическом пространстве, элементов близких к заданному, согласно некоторой функции близости.

Объект классифицируется большинством голосов своих соседей. "K" всегда является положительным целым числом. Соседи отбираются из набора объектов, для которых известна верная классификация.

Также можно использовать Евклидово расстояние и другие меры, такие как расстояние Манхэттена.

Плюсы и минусы алгоритма.

+ Важным преимуществом этого алгоритма является то, что обучение заключается в запоминании обучающей выборки.

+ Простота реализации и возможность вводить дополнительные параметры настройки.

+ Прецедентная логика работы алгоритма хорошо понятна экспертам в предметных областях(медицина, биометрия, юриспруденция).

- Приходиться хранить обучающую выборку целиком. Не эффективный расход памяти.
- Большое количество операций при классификации образов. Как следствие работа с большими выборками занимает намного больше времени, в сравнении с традиционными НС.

Гравитация основе классификации (GBC – gravitation based classification) – алгоритм использует эвристический подобрать начальных центров кластеров и использует центр расчетов кластера тяжести в целях достижения Оптимальное решение кластеризации. Хотя оба они в большей степени сосредоточены на проблемах кластеризации, оба метода был вдохновлен концепции физического тяготения. В качестве одного из природа вдохновила алгоритмов, новых алгоритмов оптимизации на основе закона всемирного тяготения, а именно гравитационное Алгоритм поиска (GSA) предлагается [1-5].

Большую популярность в последнее время получили нечеткие алгоритмы, среди которых особенно широко известен алгоритм под названием «нечетких средних» – FCMA (Fuzzy C-Means Algorithm). Следует отметить, что главным недостатком алгоритмов *k*- и *c*-средних является необходимость априорного задания требуемого числа кластеров, а также других численных параметров, от величины которых существенно зависят результаты кластеризации. Из этого следует что, при использовании алгоритмов кластеризации необходимо иметь дополнительные критерии качества разделения объектов на кластеры, позволяющие численно оценить результат применения тех или иных параметров.

В настоящее время ИНС все чаще используются для классификации и кластеризации объектов различного типа. Особенностью ИНС-алгоритмов является высокое требование, предъявляемое к быстродействию и оперативной памяти компьютеров в процессе обучения ИНС.

При построении систем классификации объектов, характеризующихся разнотипными (количественными и качественными) признаками, наибольшее распространение получили следующие методы:

- логические, использующие методы бинарной (четкой) логики;
- логические, использующие методы нечеткой или размытой логики;

- нейросетевые.

Наряду с известными достоинствами все эти методы имеют определенные недостатки. Так, логические бинарные алгоритмы классификации отличаются очень длительной, не всегда сходящейся процедурой обучения, нейросетевые не учитывают имеющуюся априорную информацию и, как правило, требуют очень большую обучающую выборку. Алгоритмы, использующие аппарат нечеткой логики, существенным образом зависят от параметров, полноты и непротиворечивости исходного набора постулируемых нечетких правил, формулируемых экспертом человеком и т.д.

Весьма перспективными в этом аспекте являются гибридные или комбинированные нейро-нечеткие методы [1,2], один из которых изложен ниже.

Для конкретизации задачи исследования уточним прежде всего объем имеющейся предварительной (априорной) информации.

1. Будем полагать, что часть признаков объекта носит количественный характер, а часть качественный; данные признаки, вообще говоря, изменяются от объекта к объекту, даже при принадлежности объектов к одному классу, но о вероятностной природе этих признаков сказать ничего нельзя. Области значений x_i всех переменных полагаются известными. Кроме этого, предполагается заданной следующая априорная информация.

2. Известно общее число распознаваемых образов S, но априорные вероятности принадлежности объекта к тому или иному образу неизвестны.

3. Приблизительные соотношения между переменными (признаками) в форме высказываний "если-то", позволяющие относить (ориентировочно) объект с произвольным вектором признаков x к одному из классов.

4. Имеется обучающая выборка данных.

Основную идею предлагаемого метода поясним следующим образом.

В случае S образов можно предложить следующее решающее правило

$$\ddot{I}\ :\bar{o}\in s_{i^*},\ \text{если}\ L_{i^*}(\bar{o})=\max_i L_i(k), \tag{4.29}$$

где $L_{i^*}(\bar{o})$ – линейные формы вида

$$L_{i^*}(\bar{o}) = r_{i0} + r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \ldots + r_{ij}k_j + \ldots + r_{im1}k_{m1},\ i = \overline{1,S},\ \ j = \overline{1,m}. \qquad (4.30)$$

Теперь предположим, что признаки являются качественными, и их значения для конкретных условий можно отразить значениями принадлежности $\mu_j(k_j)$ к некоторым нечетким множествам. Возвращаясь к примеру с n=2 и используя вместо операции умножения логическую операцию $\wedge$ (определения минимума, *min*), а вместо операции сложения – $\vee$ (определение максимума, *max*), для принадлежности переменной вывода можно записать:

$$\gamma = [r_1 \wedge \mu_1(k_1)] \vee [r_2 \wedge \mu_2(k_2)] = \max[\min(r_1, \mu_1(k_1)), \min(r_2, \mu_2(k_2))], \quad (4.31)$$

где, очевидно, необходимо выполнение ограничений

$$0 \le r_1 \le 1,\ 0 \le r_2 \le 1. \qquad (4.32)$$

Решающее правило в этом случае принимает вид:

$$\ddot{I}\ :\ \text{если } \gamma \ge 0.5, \text{ то } \bar{o} \in s_1,$$
$$\text{иначе } \bar{o} \in s_2. \qquad (4.33)$$

В общем случае априорная информация должна быть представлена в форме:

$$\gamma_1 = V^V[(r_{11} \wedge \mu_{11}(k_1)), (r_{12} \wedge \mu_{12}(k_2)), \ldots, (r_{1m} \wedge \mu_{1m}(k_m))],$$
$$\gamma_2 = V^V[(r_{21} \wedge \mu_{21}(k_1)), (r_{22} \wedge \mu_{22}(k_2)), \ldots, (r_{2m} \wedge \mu_{2m}(k_m))],$$
$$\cdots$$
$$\gamma_s = V^V[(r_{s1} \wedge \mu_{s1}(k_1)), (r_{s2} \wedge \mu_{s2}(k_2)), \ldots, (r_{sm} \wedge \mu_{sm}(k_m))],$$

или в более сокращенной записи:

$$\gamma_i = \underset{j}{V}[r_{ij} \wedge \mu_{ij}(k_j)],$$
$$i = \overline{1,S},\ j = \overline{1,m}\ \ 0 \le r_{ij} \le 1, \qquad (4.34)$$

при этом правило классификации описывается выражением

$$\ddot{I}\ : \bar{o} \in S_{x^*},\ \text{если } \gamma_{i^*} = \max_i \gamma_i. \qquad (4.35)$$

Очевидно, здесь γ_i следует трактовать как уровень принадлежности предъявленного объекта классу S_i, r_{ij} – некоторые постоянные коэффициенты, а смысловое значение $\mu_{ij}(k_{ij})$ было пояснено ранее.

Между тем, используя понятия нечеткого отношения и max-min композиции нечетких отношений [1,2], запись (4.34) может быть представлена как векторно-матричное соотношение:

$$\Gamma = R \cdot M, \qquad (4.36)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_S \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \ldots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} \ldots r_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ r_{S1} & r_{S2} \ldots r_{Sn} \end{bmatrix}, \tag{4.38}$$

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11}(k_1) & \mu_{21}(k_1) \ldots \mu_{S1}(k_1) \\ \mu_{12}(k_2) & \mu_{22}(k_2) \ldots \mu_{S2}(k_2) \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ \mu_{1n}(k_n) & \mu_{2n}(k_n) \ldots \mu_{Sn}(k_n) \end{bmatrix}, \tag{4.39}$$

а "$\cdot$" – символ max-min композиции (max-min свертки) нечетких выводов, при этом коэффициенты r_{ij} будут характеризовать некоторые причинные отношения

$$r_{ij} : k_j \to S_i, \tag{4.40}$$

отражающие знания эксперта.

Нетрудно видеть, что приведенные выкладки справедливы и в случае, если часть переменных-признаков носит количественный характер, достаточно лишь определить для них соответствующие функции принадлежности $\mu_{ij}(k_j)$ (и необходимым образом сформулировать матрицу R).

С учетом введенных обозначений решающее правило можно записать так:

$$\ddot{I}\ : \bar{o} \in S_{x^*},\ \text{если}\ \gamma_{i^*} = \max_i \gamma_i \,/\, \tilde{A} = R \cdot M \tag{4.41}$$

(матричное соотношение после косой черты указывает на условие, накладываемое на вектор Г).

Приведенные переменных-признаков, считаются заданными априори (на основании знания экспертов) и их дальнейшая корректировка не предполагается.

Как представляется, еще большими возможностями будет обладать реализация метода классификации на базе гибридной (нечеткой) нейронной сети, содержащей как нечеткие, так и "четкие" нейроны с сигмоидальной активационной функцией.

Структура системы классификации на основе гибридной нейронной сети приведена на рисунке 4.1.

Здесь гибридные нейроны скрытого слоя описываются соотношениями

$$\beta_i = \frac{1}{1+e^{-x_i}}, \tag{4.42}$$

$$z_i = \bigwedge_j \left[r_{ij} \vee \mu_{ij}\left(k_{ij}\right)\right] \tag{4.43}$$

или

$$z_i = \bigwedge_j \left[r_{ij} \vee \mu_{ij}\left(k_{ij}\right)\right], \; i=\overline{1,Q},\; j=\overline{1,m}, \tag{4.44}$$

а четкие нейроны выходного слоя – соотношениями

$$\gamma_m = \frac{1}{1+e^{-w_m^x b}},\; m=\overline{1,S}, \tag{4.45}$$

где $w_m = \left(w_{1m}, w_{2m}, ..., w_{Qm}\right)^T$ – вектор весовых коэффициентов m-го выходного нейрона; $b=\left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_Q\right)^T$ – вектор выходов нечетких нейронов скрытого слоя.

Таким образом, в нейронах как скрытого, так и выходного слоя используются сигмоидальные (логистические) функции активации [2] с областью значений, принадлежащих отрезку [0,1].

Решение об отнесении предъявленного объекта к какому-либо классу выглядит

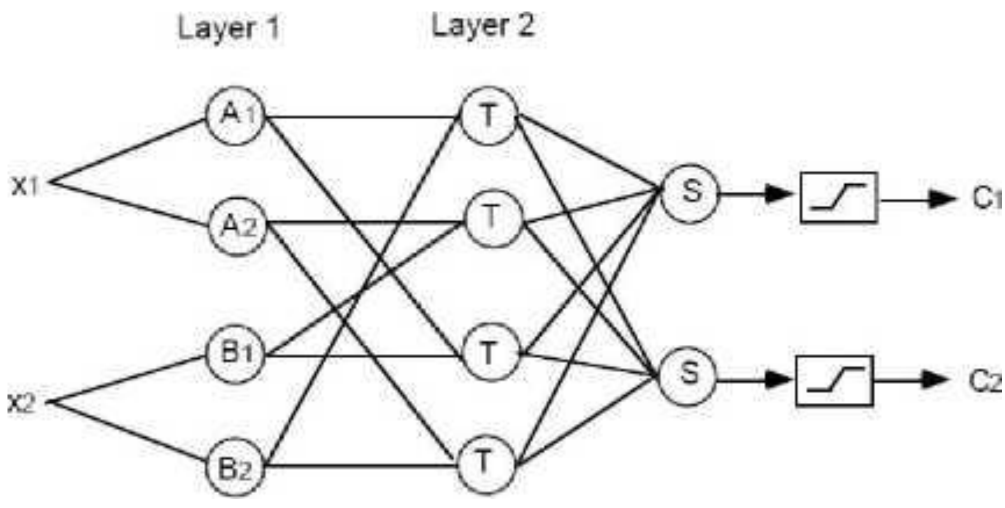


Рис. 4.1. Структура системы классификации

аналогично ранее приведенному (4.35), а процедура определения весов r^i, w^m основывается на следующих выкладках и предположениях:

1) начальные значения векторов r^i устанавливаются с учетом имеющейся априорной информации;

2) в качестве начальных значений элементов векторов w^m задаются малые (много меньше единицы) случайные величины;

3) коррекция элементов r^i и w^m осуществляется методом обратного распространения [2].

В качестве функции ошибки для *k*-го предъявленного объекта примем величину

$$E^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{S}\left(y_m^k - \gamma_m^k\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.46)$$

Соответственно, суммарная функция ошибки по всем примерам обучающей выборки

$$E = \sum_{k=1}^{N} E^k. \qquad (4.47)$$

Очевидно, как E^k, так и E являются функциями векторов весов сети r^i, w^m. Задача обучения сети сводится в данном случае к подбору таких векторов r^i и w^m $\left(i = \overline{1,m},\ m = \overline{1,S}\right)$, при котором достигается минимум E.

Данную задачу будем решать градиентным методом, используя соотношения

$$w^m := w^m - h - \partial E^k / \partial w^m, \qquad (4.48)$$

$$r^i := r^i - h - \partial E^k / \partial r^i, \qquad (4.49)$$

где “:=” – символ оператора присвоения; $\partial E^k / \partial w^m$ и $\partial E^k / \partial r^i$ – обозначения векторов-градиентов; h – коэффициент скорости обучения ($0<h<1$).

Полагая константу h заданной, для детализации правых частей (4.48), (4.49) найдем выражения для векторов-градиентов. Очевидно, на основании (4.46) имеем:

$$\partial E^k / \partial w^m = -\frac{1}{2} - 2\left(y_m^k - \gamma_m^k\right) - \partial \gamma_m^k / \partial w^m. \qquad (4.50)$$

Используя далее формулу (4.45) и известное соотношение для производной сигмоидальной логистической функции, получим

$$\partial \gamma_m^k / \partial w^m = \gamma_m^k\left(1 - \gamma_m^k\right) - b^k \qquad (4.51)$$

и окончательно

$$\partial E^k / \partial w^m = -2\left(y_m^k - \gamma_m^k\right) - \gamma_m^k\left(1 - \gamma_m^k\right) - b^k. \quad (4.52)$$

Поступая аналогично для нахождения $\partial E^k / \partial r^i$ и используя соотношения (4.46), (4.44), (4.42), свойство производной сигмоидальной функции и цепное правило дифференцирования для сложной функции, будем иметь:

$$\partial E^k / \partial r^i = -\left(y_m^k - \gamma_m^k\right) - \frac{\partial \gamma_m^k}{\partial \beta_i^k} - \frac{\partial \beta_i^k}{\partial z_i^k} - \frac{\partial z_i^k}{\partial r_i}. \quad (4.53)$$

В данном случае

$$\frac{\partial \gamma_m^k}{\partial \beta_i^k} = \gamma_m^k - \left(1 - \gamma_m^k\right) - w_{im}, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \beta_i^k}{\partial z_i^k} = \beta_i^k - \left(1 - \beta_i^k\right). \quad (4.55)$$

Полученные выкладки позволяют теперь описать весь алгоритм построения и обучения системы классификации на базе гибридной нейронной сети.

1. Определяется совокупность $k_1 ... k_n$ признаков классифицируемых объектов и множество имен $S_1 ... S_S$ рассматриваемых классов.

2. Формируется обучающая выборка вида.

3. Экспертным путем определяются (задаются) элементы матрицы M – то есть функции принадлежности $\mu_{ij}\left(k_{ij}\right)$ для количественных признаков и правила нахождения степеней принадлежности для качественных признаков.

4. Экспертным путем на основании продукционных правил ЕСЛИ-ТО задаются начальные значения r_{ij} элементов матрицы R. Если соответствующая априорная информация отсутствует, элементы данной матрицы инициируются небольшими случайными положительными значениями (меньшими единицы).

5. Задаются начальные значения (малые случайные числа) элементов векторов w_m.

6. На вход системы подается один из входных векторов k^k обучающей выборки и в соответствии с соотношениями (4.42), (4.43) (или (4.44)), (4.45), (4.46) рассчитывается выход системы. Если выход правильный, то осуществляется переход к шагу 7 алгоритма. Иначе – осуществляется коррекция весов сети:

$$w_m := w_m + h - \left(y_m^k - \gamma_m^k\right) - \gamma_m^k\left(1 - \gamma_m^k\right) r^{-k}, \quad (4.56)$$

$$r_i := r_i + h - \left(y_m^k - \gamma_m^k\right) - \gamma_m^k\left(1-\gamma_m^k\right) - w_m - \beta_i^k - \left(1-\beta_i^k\right)\frac{\partial z_i^k}{\partial r_i}, \tag{4.57}$$

$$0 \le r_{ij} \le 1,$$

где вектор-градиент $\partial z_i^k / \partial r_i$ определяется одним из соотношений – (4.53) или (4.54) – в зависимости от условий (4.50), (4.41) (или (4.55), (4.42)).

7. Организуется цикл с шага 6 до выполнения правила останова обучения. В качестве такого правила может быть использовано, например, выполнение неравенства (4.32).

Важной характеристикой алгоритма нечетких с - средних является то, что в результате его применения формируются нечеткие кластеры. При этом степень принадлежности объекта кластеру описывается с помощью функции принадлежности.

К сожалению, алгоритмы нечетких средних отсутствуют во многих популярных пакетах кластеризации и классификации.

Параметрическая идентификация сводится к задаче оптимизации, где требуются:

для модели Мамдани нахождение вектора (I,O) так, чтобы

$$\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(Y_r - F\left(I,O,X_r\right)\right)^2 \to \min;$$

для модели Сугэно нахождение вектора (I,B) так, чтобы

$$\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(Y_r - F\left(I,B,X_r\right)\right)^2 \to \min.$$

Как известно, концептуальный анализ задачи многокритериальной оптимизации был дан итальянским экономистом Парето. Им было показано, что указанные задачи относятся к классу некорректных задач, т.к. достижение экстримума нескольких функций одновременно в общем случае невозможно, поскольку увеличение значения одного из критериев приводит к уменьшению значений других критериев. Решением таких задач в общем случае является некоторое множество X^p, называемое множеством Парето. Получение единственного решения X^*, необходимо на практике, возможно только на основе некоторой схемы компромисса. Различные прагматические методы решения подобных задач реализуют определенную схему компромисса.

Прагматические аспекты многокритериальной оптимизации исследовались многими авторами. Анализ указанных работ позволил провести определенную классификацию и разбить все методы многокритериальной оптимизации на четыре группы:

- методы главного критерия (Global Criteria Method);
- методы свертывания критериев в один критерий (Weights Method);
- методы «идеальное точки» (Goal Programming Method);
- интерактивные (Interactive Method).

Методы главного критерия исследовались Салуквадзе, Hwong и Masud. Суть метода состоит в том, что один из критериев признается как главный доминирующий, остальные переводятся в состав ограничений.

Таким образом, многокритериальная задача преобразуется в однокритериальную и может быть решена известными методами.

Методы свертывания критериев были исследованы Hwong и Masud, Sakawa. Идея метода состоит в агрегировании критериев путем линейной свертки $\sum_{i=1}^{k} w_i f_i$, где w_i - весовые коэффициенты выражают важность соответствующего критерия $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$. При этом априори предполагается независимость критериев.

Метод «идеальной» точки был исследован Iqnizio. «Идеальная» или «недостижимая» точка – это точка в пространстве критериев, где каждая координата представляет собой оптимальные значения по соответствующим критериям. Суть метода состоит в поиске решения наиболее «близкого» в смысле определенной метрики к «идеальному» решению. Интерактивные методы, включающие в себя целую группу методов, также были исследованы Ignizio , Quaddus и Holzman, Hwang Masud, Zionts и Wallenus. В этих методах (Лицо Принимающих Решений) ЛПР активно участвует в процессе выбора параметров модели.

Нечеткие версии указанных методов реализуют механизм преобразования нечеткой многокритериальной задачи в четкий эквивалент, т.е. четкую задачу большой размерности. Суть преобразования состоит в том, что ЛПР определяет уровень доверия α, в соответствии с которым значение каждого параметра С заменяется парой значений C^L и C^R.

Эффективность функционирования достаточно сложных реальных объектов или процессов, как правило, характеризуется совокупностью частных критериев, находящихся зачастую во взаимном противоречии друг с другом, когда улучшение по одному из показателей ведет к ухудшению по другому и наоборот, и удовлетворение требованиям всех критериев невозможно. Кроме того, критерии, а также ограничения, обычно сформулированы весьма неточно. В этих условиях отыскание эффективных решений невозможно без учета неточной, качественной информации о предпочтениях различных критериев, о желаемом характере процессов – росте или уменьшении параметров качества, о диапазоне их изменения. По мере усложнения задачи роль такого рода неточной качественной информации возрастает и во многих случаях становится определяющей [1]. Как указывается в [2], при наличии всего лишь двух критериев в задачах оптимизации неизбежно присутствуют субъективные факторы, связанные, например, с ранжированием частных критериев. В определенной степени подобные трудности могут быть устранены путем упрощения постановки задачи. Например, можно выделить какой-либо один главный критерий качества, а остальные рассматривать как ограничения. Другим путем является использование метода последовательных уступок [2]. Однако такие подходы ведут к огрублению исходной задачи и не устраняют качественные, субъективные элементы, перенося их из постановки задачи на этап анализа результатов. Потребность количественного ранжирования частных критериев и неопределенность при их описании в задачах многокритериальной оптимизации объективно являются источниками субъективизма, неопределенности. Необходимость использования информации качественного характера признается многими исследователями, и предложены различные пути формализации и решения этой проблемы. Для описания частных критериев и ограничений им было предложено использование функций желательности. Последние принимают значения, непрерывно возрастающие от 0 до 1 при изменении соответствующего параметров качества от наименее к наиболее желательным значениям. Конкретный вид функций желательности задается лицом, принимающим решения (ЛПР), исходя из его субъективных представлений. Путем свертки частных функций желательности строится глобальный критерий качества процесса, максимизация которого доставляет оптимум. Этот метод получил широкое распространение в планировании экспериментов при поиске оптимальных условий [3].

Он успешно применялся при решении задач оптимизации процессов химической технологии, обработки материалов, в металлургии и в других отраслях[4-6]. Из определения функций желательности следует, что при решении задач оптимизации они как по форме, так и своему смысловому содержанию фактически эквивалентны функциям принадлежности нечетких множеств. Другой подход к методам формализации описания нечетких, качественных характеристик был предложен Л.А.Заде [7].

Теория нечетких множеств, особенно ее концептуальная основа и математический аппарат для работы с объектами лингвистической природы, оказались плодотворными, эффективными средствами постановки и решения задач многокритериальной оптимизации при наличии неопределенностей нестатистического характера. При этом следует отметить, что существует чрезвычайно большое многообразие такого рода задач, и поэтому не существует единой универсальной методики их решения [8]. Основные результаты, достижения и проблемы в области нечеткой многокритериальной оптимизации и принятия решений изложены в литературе обзорного [9-11] и постановочного характера [12-14]. В работах [15-18] для построения моделей принятия решений в условиях неопределенности используется лингвистический подход, позволяющий формализовать задачу при наличии критериев и ограничений, описанных на естественном языке. В [19-22] задачи нечеткой многокритериальной оптимизации решены при наличии нечетких коэффициентов относительной важности критериев.

В статьях [22, 23] предложен подход, основанный на теории возможностей, развитой Л.А.Заде на базе теории нечетких множеств, в [24] рассматриваются задачи многокритериального принятия решений при наличии неопределенностей как нечеткого, так и вероятностного типов.

Сформулируем основные особенности многокритериальных задач при наличии нечетко заданных критериев.

В настоящее время большинством исследователей отмечается, что ключевыми чертами постановки этих задач являются [8],:

а) существование множества альтернатив;

б) наличие множества ограничений, которые необходимо учитывать при выборе альтернативных решений;

в) существование (в явной или неявной форме) функции предпочтительности, ставящей каждой альтернативе в соответствие выигрыш (или проигрыш), который будет получен при выборе этой альтернативы.

Специфической чертой нечетких задач также является симметрия между целями и ограничениями, которая устраняет различия между ними с точки зрения их вклада в постановку и решение задач. Сформулируем это положение в конструктивной форме.

Конструктивным, достаточно полно отражающим качественный характер задания предпочтений в многокритериальной задаче является подход, предложенный Р.Ягером, основанный на обобщении понятий концентрирования и растяжения [82].

При этом одной из важнейших проблем является формирование глобального критерия. Процедура свертки не может быть до конца формализована и определяется спецификой задачи, целями, опытом и интуицией исследователя. В работе [119] показано, что различные способы свертки критериев могут приводить к существенно отличающимся итоговым результатам, что свидетельствует об определяющем значении этапа формирования глобального критерия при решении многокритериальных задач. Поэтому, несмотря на отсутствие общей теории, целесообразно рассмотреть некоторые узловые моменты процесса формирования свертки частных критериев, провести сравнительный анализ наиболее часто употребляемых способов построения обобщенного показателя качества при описании частных критериев функциями принадлежности.

Как отмечалось ранее, при решении задач многокритериальной оценки и оптимизации необходимо учитывать неравнозначность частных критериев качества. В случае большого числа критериев задача непосредственного определения рангов критериев оказывается весьма трудной и даже неразрешимой для экспертов в силу ограниченности психико-физиологических возможностей человека. При этом в случае сравнения двух альтернатив эксперт обычно способен адекватно определить, у какой из них рассматриваемый признак (важность) выражен сильнее, а также качественно (вербально) оценить, насколько велика разница между наблюдаемыми у двух альтернатив признаками.

Если при рассмотрении конкретной проблемы решены все вопросы, связанные с формализацией и ранжировкой частных критериев, а также выбран способ построения глобального критерия, то задача оптимизации может быть в принципе решена одним из методов поиска экстремума глобального критерия в пространстве нескольких переменных. Обычно при этом возникают новые проблемы, связанные с возможным наличием нескольких локальных оптимумов, различной чувствительностью глобального критерия к варьируемым факторам, статистической ненадежностью найденного оптимума и т.д. Решение этих вопросов в рамках разработанной в [114] методики основано на применении элементов теории нечетких множеств и теории возможностей.

Первым этапом оценки качества решения в найденной точке локального или глобального оптимума является анализ чувствительности. Он проводится в следующих целях:

1. Отыскиваются входные переменные, наиболее сильно влияющие на оптимальное решение, к точности задания которых следует предъявлять наиболее жесткие требования.

2. Определяется влияние на систему в окрестности оптимума неточно заданных параметров, значения которых зачастую известны со значительной погрешностью.

3. Выявляется возможная реакция системы на неуправляющие внешние воздействия.

Информация такого рода очень важна для практической реализации оптимальных решений, и детальный анализ чувствительности во многих случаях может оказаться даже полезнее, чем отыскание самого оптимального решения [82].

Нахождение оптимального решения и дальнейший анализ чувствительности требуют многократного обращения к модели. При использовании полных достаточно сложных имитационных моделей последнее может привести к недопустимо большим затратам машинного времени. В таких ситуациях целесообразно использовать различные варианты двухэтапных методов моделирования [83, 84]. Их основная идея заключается в получении с помощью исходной модели поверхности отклика, для которой решается оптимизационная задача. После отыскания такой приближенной оценки область поиска в окрестности оптимума сужается, поверхность отклика уточняется, и процесс повторяется до тех пор, пока разность между двумя последовательными решениями не станет достаточно малой.

Основной недостаток этих методов заключается в необходимости повторения дорогостоящей процедуры численных экспериментов всякий раз заново при изменении ранжировки или состава частных критериев, способа формирования глобального критерия.

В общем случае многоэкстремальность является очень распространенным свойством задач оптимизации [3]. Естественному, на первый взгляд, стремлению получить глобальный максимум, обладающий наибольшим значением на практике противодействуют два обстоятельства. Во-первых, в настоящее время отсутствуют общие конструктивные методы, гарантирующие получение глобального экстремума. Во-вторых, значение в точке глобального оптимума может оказаться неустойчивым.

При использовании двухэтапных методов оптимизации очень полезным оказывается практический прием, позволяющий существенно сгладить неустойчивые экстремумы [85].

Многокритериальная задача нечеткого линейного программирования, соответствующая задаче нечеткого линейного программирования, определяется следующим образом:

«максимизировать» $\tilde{c}_{k1}\tilde{x}_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_{kn}x_n,\ k \in K,$

при ограничениях
$$(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} .. + \tilde{a}_{in}x_n)\,\tilde{R}_i\tilde{b}_i,\ i \in M,$$
$$x_j \geq 0,\ j \in N, \tag{4.58}$$

где $K = \{1,2, \ldots, q\}$ - множество нечетких критериев, а $\mu_{\tilde{c}_{kj}}: \mathrm{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}}: \mathrm{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{b}_i}: \mathrm{R} \to [0, 1]$, $k \in K, i \in M, j \in N,$ - функции принадлежности нечетких параметров $\tilde{c}_{kj}, \tilde{a}_{ij}$ и $\tilde{b}_i$, соответственно.

Чтобы «максимизировать» целевые функции, можно использовать понятия «оптимального решения», аналогичные

1) идею удовлетворяющего решения,

2) идею α - эффективного решения.

Для каждого критерия

$$\tilde{f}_k(x, \tilde{c}_k) = \tilde{c}_{k1} x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_{kn} x_n, \quad k \in K, \tag{4.59}$$

мы допускаем существование заданной дополнительной цели $\tilde{\lambda}_k \in F$ (R) - некоторого нечеткого множества на вещественной оси. Определение цели может быть существенным для качества «оптимального» решения. Его смысл зависит, однако, от природы критериев, будучи в некотором смысле идеальными значениями соответствующих критериев. Нечеткое значение $\tilde{f}(x, \tilde{c}_k)$ функции критерия сравнивается с целью $\tilde{\lambda}_k$ с помощью некоторого нечеткого отношения S_k, также заданного извне. Тогда нечеткие критерии обрабатываются как ограничения $\tilde{f}(x, \tilde{c}_k) \tilde{S}_k\ \tilde{\lambda}_k$.

Пусть f_k, $k \in K$, - линейные функции (4.59). Пусть $\mu_{\tilde{c}_{kj}}$: R $\to$ [0, 1] - функции принадлежности нечетких параметров $\tilde{c}_{kj}$, и пусть $\tilde{\lambda}_k \in F$ (R) - нечеткие подмножества R, называемые нечеткими целями, $k \in K$,, $j \in N$. Кроме того, пусть $\tilde{S}_k, k \in K$, - нечеткие отношения, задаваемые функциями принадлежности $\mu_{\tilde{S}_k}$: $F(R) \times F(R) \to [0, 1]$, и пусть G_F - оператор агрегирования.

Нечеткое подмножество $\tilde{F}$ в R^n, заданное функцией принадлежности $\mu_{\tilde{F}}$ для всех $x \in R^n$, которая определяется как

$$\mu_{\tilde{F}}(x) = G_F\left(\mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_1(x, \tilde{c}_1), \tilde{\lambda}_1\right), \ldots, \mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_k(x, \tilde{c}_k), \tilde{\lambda}_k\right)\right), \tag{4.60}$$

называется критериальным нечетким множеством многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (4.58).

Для $k \in K$, мы будем через $\tilde{F}_k$ обозначать нечеткое множество, заданное функцией принадлежности $\mu_{\tilde{F}_k}$, которая определяется для всех $x \in R^{\mathrm{n}}$ как

$$\mu_{\tilde{F}_k}(x) = \mu_{\tilde{S}_k}\left(\tilde{f}_k(x, \tilde{c}_k), \tilde{d}_k\right).$$

Заметим, что в случае задачи с одним критерием (т.е. когда $q=1$), оператор агрегирования G_F является тождественным оператором, и функция принадлежности критериального нечеткого множества равна $\mu_{\tilde{F}_k}(x) = \mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_1(x, \tilde{c}_1), \tilde{\lambda}_1\right)$для всех $x \in R^{\mathrm{n}}$.

Пусть f_k, $k \in K$, g_i, $i \in M$, - некоторые функции, $\widetilde{c}_{k_j}, \widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i$ - нечеткие параметры, и $\widetilde{\lambda}_k \in F(\mathrm{R})$ - нечеткие цели. Кроме того, пусть $\widetilde{R}_i$ и $\widetilde{S}_k$ - нечеткие отношения. Пусть G_X, G_F и G - операторы агрегирования.

Нечеткое множество $\widetilde{X}^*$, задаваемое для всех $x \in \mathrm{R}^n$ функцией принадлежности $\mu^*_{\widetilde{X}}$, определяемой как

$$\mu^*_{\widetilde{X}}(x) = G(\mu_{\widetilde{X}}(x),\ \mu_{\widetilde{F}}(x)),$$

называется компромиссным решением многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (1), где $\mu_{\widetilde{F}}$ и $\mu_{\widetilde{X}}$ являются функциями принадлежности критериального нечеткого множества и допустимого решения, соответственно.

Для $\alpha \in (0,1]$ вектор $x \in [\widetilde{X}^*]_\alpha$ называется α-компромиссным решением многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (4.58). Вектор $x^* \in \mathrm{R}^n$, обладающий свойством $\mu^*_{\widetilde{X}}(x^*) = Hgt(\widetilde{X}^*)$, называется max - компромиссным решением.

Заметим, что компромиссное решение $\widetilde{X}^*$ многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования является нечетким подмножеством R^n. Кроме того, $\widetilde{X}^* \subseteq \widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ — допустимое решение.

С другой стороны, α - компромиссное решение является вектором, также как и *max* - компромиссное решение, которое является α -компромиссным решением при $\alpha = Hgt(\widetilde{X}^*)$.

Выше рассматривались три оператора агрегирования G_X, G_F и G. Первый оператор G_X использовался для объединения отдельных ограничений в допустимое решение; второй – G_F - применялся для агрегирования отдельных критериев, а с помощью третьего оператора G объединялись критерии и ограничения. Иногда может оказаться трудным или даже невозможным выбрать подходящий агрегирующий оператор для комбинирования критериев и ограничений. В этом случае можно применить хорошо известную идею Парето - оптимального решения, адаптированную к «новым критериям», представленным функциями принадлежности $\mu_{\widetilde{X}}$ и $\mu_{\widetilde{F}}$.

Пусть $\mu_{\widetilde{X}}$ и $\mu_{\widetilde{F}}$ - функции принадлежности критериального нечеткого множества.

Говорим, что вектор $x^p \in R^n$ является Парето - оптимальным решением многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования, если не существует ни одного вектора $x \in R^n$, такого что [86]

$$\mu_{\tilde{X}}(x^p) \le \mu_{\tilde{X}}(x) \quad и \quad \mu_{\tilde{F}}(x^p) < \mu_{\tilde{F}}(x)$$

или

$$\mu_{\tilde{X}}(x^p) < \mu_{\tilde{X}}(x) \quad и \quad \mu_{\tilde{F}}(x^p) \le \mu_{\tilde{F}}(x) \ .$$

Отметим, что Парето - оптимальное решение x^p задачи (4.58) является четким вектором.

Поскольку задача (4.58) является задачей максимизации (т.е. поиска оптимума по принципу «чем больше значение критерия, тем лучше»), функции принадлежности $\mu_{\tilde{\lambda}_k}$ нечетких целей $\tilde{\lambda}_k$ должны быть возрастающими или неубывающими. По этой же причине нечеткие отношения $\tilde{s}_k$, используемые для сравнения $\tilde{f}_k(x, \tilde{c}_k)$ и $\tilde{\lambda}_k$, должны быть типа «больше или равно». Здесь отношения $\tilde{S}_k$ рассматриваются как T-нечеткие расширения обычной бинарной операции сравнения « $\ge$ », где T - t-норма.

Нетрудно показать, что *max* - компромиссное решение в случае задачи с одним критерием и четкими векторами параметров c_1, a_i и b, совпадает с оптимальным решением задачи классического линейного программирования при условии возрастания $\tilde{\lambda}_1$. Кроме того, если $\tilde{X}^{*'}$ - компромиссное решение многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования (4.58) с параметрами $\tilde{c}_1'$, $\tilde{a}_i'$, *и* $\tilde{b}'$ а $\tilde{X}^{*''}$ - компромиссное решение подобной задачи с параметрами $\tilde{c}_1''$, $\tilde{a}_i''$, *и* $\tilde{b}''$, такими что $\tilde{c}_1' \subseteq \tilde{c}_1''$, $\tilde{a}_i' \subseteq \tilde{a}_i''$ *и* $\tilde{b}' \subseteq \tilde{b}''$, для всех $i \in M$, *то* $\tilde{X}^{*'} \subseteq \tilde{X}^{*''}$. *В* частности, в случае четкого оптимального решения x задачи линейного программирования с одним критерием и параметрами в виде четких чисел степень принадлежности компромиссного решения x соответствующей многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования с нечеткими параметрами равна единице. Этот факт делает возможным естественное вложение класса четких многокритериальных задач линейного программирования в класс многокритериальных задач нечеткого линейного программирования.

4.3. Решение задачи многокритериальной маршрутизации в телекоммуникационных сетях

4.3.1.Задача маршрутизации в телекоммуникационных сетях

Телекоммуникационная сеть состоит из узлового сетевого оборудования и каналов связи. В качестве сетевого оборудования могут выступать маршрутизаторы, антенны, коммутаторы и другие устройства. Каналы связи – это кабели или, в случае радиорелейной сети, направление в пространстве.

Телекоммуникационную сеть можно представить в виде графа (N, A), где
$N = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ обозначает конечное множество сетевого оборудования (узлов).

$A = \{a_{12}, a_{23}, a_{34}, \ldots\}$ обозначает множество соединений (дуг) сети. Каждая дуга a_{ij} соответствует паре (i, j) для некоторых точек i, j из N ($A \subset N \times N$).
Для двух произвольных точек сети $k \in N$ и $t \in N$ путь $\boldsymbol{p}$ от k до точки t есть последовательность дуг.

Каждый узел и дуга имеют свои сетевые характеристики, на основе которых выбирается путь **p**. При выборе маршрута трафика учитываются следующие параметры: стоимость пропускания трафика по каналу, величина полосы пропускания, величина временной задержки, коэффициент надёжности, а также количество промежуточных сетевых узлов.

В зависимости от типа трафика, для которого строится путь, важность того или иного параметра пути может изменяться. Так, для голосового трафика наиболее критичной характеристикой является временная задержка передачи пакетов, а для потока видео, напротив, самой важной характеристикой является ширина полосы пропускания.

Введём следующие обозначения:

c_{ij} – стоимость соединения между узлами сети i и j. В неё входят стоимость аренды места, по которому проложен кабель, стоимость аренды места на крыше или вышке в случае радиорелейного соединения, стоимость ежегодного обслуживания этого соединения и др.

b_{ij} – доступная полоса пропускания между узлами i и j. Величина вычисляется путём вычитания уже зарезервированного объёма трафика другими сервисами из номинального значения полосы пропускания, которая является характеристикой физического соединения (i, j).

b_t – полоса пропускания, необходимая для предоставления услуги типа Т.

b^{cur}_{ij} – текущая загрузка канала между узлами i и j.

b^{max}_{ij} – максимально допустимая загрузка канала между узлами i и j.

d_{ij} – величина временной задержки. Величина, характеризующая среднее время обработки единицы трафика (пакет в случае IP сетей) на концевых устройствах i и j. Является характеристикой этих устройств и при увеличении нагрузки на оборудование, время обработки падает.

r_{ij} – коэффициент надёжности соединения между узлами i и j. Зависит от свойств оборудования (точки i, j). Величина определяется во время функционирования сети путём сбора статистики о количестве потерянных пакетов на единицу переданных данных.

Также введём степень загрузки L каждого элемента сети (N, A) как отношение текущей загрузки к максимальной:

$L(i) = \dfrac{V(i)}{V_{max}(i)}$, где $V(i)$ – текущая загрузка элемента i (Mb/s), $V_{max}(i)$ – максимально допустимая загрузка элемента сети (Mb/s).

Решается задача построения пути прохождения трафика по сети (N, A).

В зависимости от типа трафика (голосовой, видео и др.) на искомый путь накладывается ряд ограничений: обеспечение требуемой ширины полосы пропускания, величины временной задержки. При этих ограничениях путь должен минимизировать стоимость прохождения трафика по сети и загрузку сетевых элементов – каналов связи – и максимизировать коэффициент надежности.

Путь **p** состоит из набора дуг сети

$$p = \langle a_{si}, a_{ij}, \ldots a_{mt} \rangle, \text{ где}$$

$$i \equiv v_1 \text{ и } j \equiv v_l,$$

$$v_k \in N \ \forall k \in \{1,2,\ldots,l\},$$

$$a_k \equiv (v_k, v_{k+1}) \in A \forall k \in \{1,\ldots,l\}.$$

Используя значения параметров каждой дуги, можно вычислить характеристики пути р.

Пусть *C(p,T), B(p), D(p), R(p)* и *L(p,T)* – функции, которые определяют стоимость прохождения трафика Т по пути р, значение доступной полосы пропускания, величину задержки, коэффициент надежности и коэффициент загрузки для каждого пути *p* соответственно. Эти функции имеют вид:

$C(p,T)=\sum\limits_{(i,j):a_{ij}\in p} c_{ij}\cdot\frac{b_T}{b_{ij}^{\max}}$ - стоимость резервирования канала р для пропускания трафика типа Т. (4.61)

$L(p,T)=\max\limits_{(i,j):a_{ij}\in p}\frac{b_T+b_{ij}^{cup}}{b_{ij}^{\max}}$ - коэффициент загрузки канала. (4.62)

$B(p)=\min\limits_{(i,j):a_{ij}\in p}\{b_{ij}\}$-ширина полосы пропускания канала. (4.63)

$D(p)=\sum\limits_{(i,j):a_{ij}\in p} d_{ij}$ - суммарная величина временных задержек на пути. (4.64)

$R(p)=\min\limits_{(i,j):a_{ij}\in p}\{r_{ij}\}$ - коэффициент надёжности канала (4.65)

Также каждый тип услуги Т имеет ряд требований к каналу *p*:

$B(p) > \Delta_{bandwidth}(T)$ – полоса пропускания канала должна быть больше некоторой заданной величины $\Delta_{bandwidth}(T)$, зависящей от типа сервиса *T*.

$D(p) < \Delta_{delay}(T)$ – время задержек должно быть меньше заданной величины $\Delta_{delay}(T)$, зависящей от типа сервиса *T*.

Задача поиска пути принимает вид:

$$p^{\bullet}=\arg\{\min_{p\in(N,A)}(C(p,T),L(p,T));\max_{p\in(N,A)}R(p)\}, \quad (4.66)$$

$$B(p) > \Delta_{bandwidth}(T), \quad (4.67)$$

$$D(p) < \Delta_{delay}(T). \quad (4.68)$$

Для обеспечения требуемого качества обслуживания может применяться технология разделения трафика. Идея метода состоит в том, чтобы расщепить трафик на отдельные составляющие (в зависимости от типа сервиса) и осуществить его транспортировку по сетям связи, удовлетворяющим требованиям сервиса к ресурсам. Этот метод часто применяется для маршрутизации голосовых пакетов на магистральных сетях.

Метод разделения трафика является одним из лучших методов решения задачи маршрутизации с технической точки зрения.

Заметим, однако, что при наличии в сети нескольких альтернативных маршрутов равной стоимости (метрики), трафик делится между ними, и нагрузка на маршрутизаторы и каналы связи распределяется более сбалансировано. Но когда стоимость альтернативных маршрутов даже незначительно хуже, чем у кратчайшего маршрута, этот инструмент не работает.

Вторым недостатком маршрутизации IP является то, что маршруты рассчитываются с учетом локальной оптимизации. В рамках всей сети такой выбор может оказаться неоптимальным. Чтобы оптимизировать использование ресурсов в масштабах всей сети, решение о маршрутизации должно приниматься с учетом назначения всей сети и общего представления о ней.

Третьим недостатком традиционных методов маршрутизации трафика в сетях IP является то, что пути выбираются без учета текущей загрузки ресурсов сети. Если кратчайший путь уже перегружен, то пакеты все равно будут посылаться по нему. Современные протоколы маршрутизации при расчёте метрики учитывают такие параметры сети, как:

- Число маршрутизаторов, входящих в маршрут.
- Пропускная ширина канала.
- Время задержек.
- Процент потерянных пакетов и др.

Например, протокол IGRP (Interior Gateway Routing Protocol) использует следующую формулу для подсчёта метрики, на основании которой выбирается маршрут:

$$m = \left[\frac{K_1}{b \cdot (1-o)} + (K_2 \cdot d) \right] \cdot r, \qquad (4.69)$$

где

d – коэффициент, характеризующий временные задержки при движении пути по маршруту пакетов,

b – ширина пропускания канала в самом узком сегменте пути,

o – коэффициент, характеризующий загрузку канала,

r – коэффициент надежности маршрута,

K_1, K_2 – константы.

Вид функции и значения коэффициентов K_1, K_2 заданы априори. Этот протокол учитывает множество параметров сети, необходимые для расчёта пути: полоса пропускания, задержки, текущая загрузка. Но он неэффективен для трафика разных типа сервисов, когда сам вид функции для расчёта метрики и константы зависят от конкретного типа сервиса. Помимо технической стороны вопроса, этот протокол никак не учитывает экономическую составляющую при выборе маршрута. Как уже говорилось выше, каждое соединение имеет эксплуатационную стоимость и без учета этого параметра при выборе маршрута нельзя построить экономически оптимальную сеть связи.

Выше были рассмотрены современные методы решения задачи маршрутизации. Все они имеют свои недостатки для работы в мультисервисных сетях связи, т.к. создавались в первую очередь для решения задачи передачи данных в сетях с одним типом сервиса. Также ни метод фильтрации, ни современные протоколы передачи данных не учитывают стоимость пропускание трафика при выборе маршрута.

В настоящей работе предлагается многокритериальный подход, который решает задачу маршрутизации в мультисервисных сетях связи и который учитывает не только технические требования к ресурсам, но и экономическую составляющую.

Многокритериальный анализ имеет ряд преимуществ перед однопараметрической оптимизацией и, поэтому, в последнее время широко применяется в разных технических задачах (см., например [80], [83]). Однако этот подход практически не используется в задачах телекоммуникации. Это объясняется тем, что методы решения многокритериальных задач широко не известны исследователям, работающим в области связи, а также тем, что многие задачи телекоммуникации всё еще эффективно решаются с помощью мощных современных компьютеров. Многокритериальный подход к решению задачи представляет собой последовательную оптимизацию каждого критерия, поэтому он не мог применяться для больших сетей в прошлом, когда оптимизация одного критерия могла занимать многие часы. На сегодняшний день существуют лишь несколько попыток применения многокритериального анализа в области телекоммуникации. С появлением всё большего числа сервисов (услуг) число аспектов или критериев, которые должны учитываться при решении задач в современных телекоммуникационных сетях, увеличивается и, тем самым, возникает необходимость применения многокритериального анализа.

Приведём несколько примеров задач, для решения которых может применяться многокритериальный анализ:

- Планировка сети связи

- Развитие сети связи
- Задача маршрутизации и др.

Планирование и развитие телекоммуникационной сети является сложным и важным процессом. Применение различных моделей и методологий анализа могут значительно увеличивают качество построения и надежность сети связи, снизить операционные расходы, увеличить экономическую отдачу.

Перейдём к рассмотрению задачи маршрутизации с точки зрения многокритериального анализа.

Математическую модель для анализа многокритериальных задач принятия решения можно представить следующим набором:

$$< S, K_1, \dots, K_m, X, P, I > , \tag{4.70}$$

где

S – множество вариантов решений,

$K_1, \dots, K_m$ – критерии,

X – множество векторных оценок,

P, I – соотношения предпочтения и безразличия, соответственно.

Поясним содержание модели.

Каждый вариант s из множества всех имеющихся (заданных) вариантов S характеризуется значениями $m \geq 2$ критериев K_i. Под критерием K_i понимается функция, определенная на S и принимающая значения из множества X_i, называемого шкалой (а также множеством оценок, градаций, значений критерия). По существу, критерий K_i служит для измерения интенсивности соответствующего признака, и оценка $K_i(s)$ есть результат измерения для решения s.

$$K_i: S \to X_i.$$

В общем случае множества X_i может иметь произвольную природу: оценки могут быть числовыми, словесными и т.п.

Таким образом, каждый вариант s характеризуется значениями $K_i(s)$ всех критериев, образующих векторную оценку этого варианта $x(s) = (K_1(s), \dots, K_m(s))$. Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок есть $X = X_1 \times \dots \times X_m$.

По своему характеру критерии делятся на количественные и качественные. Критерии называются количественными, когда его значения (оценки) имеет смысл сравнивать, указывая, «на сколько» или «во сколько» раз одна оценка больше другой. Примером количественного критерия является вес объекта. Если объект a имеет вес K(a), а объект b имеет вес K(b), то a тяжелее b в K(a)/K(b) раз. Если изменить масштаб (единицу) измерения веса, то в новых единицах веса объектов будут равными соответственно kK(a) и kK(b) (где $k>0$), но соотношение kK(a)/kK(b) останется равным прежней величине K(a)/K(b). Понятно, однако, что всякое другое преобразование функции K (не являющееся умножением на постоянную положительную константу) может привести к изменению исходного соотношения. Например, если K(a) ≠ K(b), то $K^2(a)/K^2(b) \neq K(a)/K(b)$.

В разобранном примере допустимым преобразованием критерия K является умножение на положительное число, и только такое преобразование. В общем случае функцию φ называют допустимым преобразованием критерия K, если функция φ(K) вновь оказывается критерием, измеряющим (задающим) тот же признак. Обычно для каждого критерия K можно указать множество всех допустимых преобразований Φ. В этом случае говорят, что критерий имеет шкалу типа Φ.

В вышеизложенном примере $\Phi=\{\varphi(x)= kx,\ k>0\}$. Шкала такого типа называет шкалой отношений, так как сохраняется величина отношения.

Примерами критериев, имеющих шкалы отношений, служат стоимость установки нового оборудования, загрузка канала связи и т.д.

Другой распространённым случаем являются измерения в шкале типа

$$\Phi_и = \{\varphi(x)= kx+l,\ k>0\}.$$

Такая шкала называется *шкалой интервалов*. Это название объясняется свойством сохранения отношения интервалов:

$$\frac{K(a)-K(b)}{K(c)-K(d)}=\frac{(kK(a)+l)-(kK(b)+l)}{(kK(c)+l)-(kK(d)+l)}=const\,.$$

Шкала считается тем более совершенной, чем уже множество Φ допустимых преобразований. Самой совершенной является абсолютная шкала, для которой единственным допустимым преобразованием является тождественное преобразование: $\Phi_a=\{\varphi(x)\equiv x\}$. Примерами критериев с абсолютной шкалой являются количество пользователей, количество устройств сети и т.п. Абсолютные шкалы могут получить критерии, образованные путем соответствующих преобразований исходных критериев, имевших менее совершенные шкалы. Например, если K имеет шкалу отношений, то у нормированного критерий K/K^o, где K^o - некоторое “эталонное” значение K, шкала оказывается абсолютной.

Критерии, имеющие шкалу, не менее совершенную, чем шкала интервалов, относятся к количественным.

Номинальная (или классификационная) шкала характеризуется тем, что соответствующее множество допустимых преобразований $Ф_a$ состоит из всех взаимно-однозначных функций. Номинальная шкала – наименее совершенная, и измерение а такой шкале – самый слабый вид измерений: указывается только, одинаковы или нет объекты с точки зрения измеряемого признака. Признаки, измеряемые в такой шкале, на практике встречаются довольно часто. Более совершенной, чем номинальная, является порядковая шкала, для которой множество Ф состоит из всех монотонно возрастающих функций. Оценки, полученные в порядковой шкале, имеют смысл сравнивать только по отношению “больше-меньше”: оно сохраняется при монотонных преобразованиях. Длины интервалов между оценками сравнивать бессмысленно.

Критерий K с порядковой шкалой естественным образом формируется на основе ранжирования объектов: под K(a) можно понимать ранг объекта a. Понятно, что если ранг объекта a есть 4, а объекта b – 2, то это вовсе не значит, что объект b в два раза менее предпочтителен, чем объект a: вопрос о количественном соотношении ранговых оценок является бессмысленным. Эти оценки служат только для указания упорядоченности объектов. Поэтому для задания упорядоченности объектов можно вместо K использовать с тем же успехом функцию (критерий) $\varphi(K)$, где φ – любая монотонно возрастающая функция. Примером критерия с порядковой шкалой может служить место объекта рассмотрения в некотором рейтинге.

Таким образом, критерии могут иметь шкалы различных типов. Критерии, имеющие шкалу интервалов или более совершенную, называются количественными. Качественными называются критерии, имеющие порядковую шкалу.

Независимо от способа формирования набор критериев должен удовлетворять следующим свойствам:

а) Соответствие. Набор критериев должен соответствовать смыслу (существу) задачи.

b) Полнота. Набор из m критериев считается полным, если каждый исход ясно и четко характеризуется совокупностью соответствующих значений критериев. Введение дополнительных критериев в полный набор не должен приводить к изменению решения задачи.

c) Минимальность. Набор должен содержать как можно меньшее число критериев. Следовательно, различные критерии не должны характеризовать одно и тоже свойство исходов.

d) Операциональность. Каждый критерий должен иметь понятную для принимающего решения формулировку, характеризовать вполне определенное свойство исходов.

e) Измеримость. Каждый критерий должен допускать получение оценки (количественной или хотя бы качественной) интенсивности характеризуемого им свойства.

Сравнение вариантов решения многокритериальной задачи осуществляется при помощи модели предпочтений. Первоначально предпочтения моделируются на множестве векторных оценок X, а затем уже – на множестве вариантов S – именно для этого и вводится представление (характеристика) вариантов при помощи критериев. Для моделирования чаще всего используют функции ценности и бинарные отношения предпочтения.

Функцией ценности (полезности) v_X называется функция $X \to Re$, обладающая следующим свойством: для любых двух векторных оценок y, z

$v_X(y) > v_X(z) \Leftrightarrow$ y предпочтительнее, чем z,

$v_X(y) = v_X(z) \Leftrightarrow$ y и z одинаковы по предпочтительности.

Другим способом моделирования предпочтения служат следующие бинарные отношения:

- Отношение (строгого) предпочтения P: x’*P*x” означает, что векторная оценка x’ предпочтительнее (лучше), чем x”;
- Отношение безразличия I: x’*I*x” означает, что x’ и x” одинаковы по предпочтению;
- Отношение нестрогого предпочтения R: x’*R*x” означает, что векторная оценка x’ не менее предпочтительна, чем x”.

Введенные отношения должны обладать следующими свойствами:

- *P* иррефлексивно (т.е. y*P*y не выполняется) и ассиметрично (если верно y*P*z, то z*P*y не выполняется);

- I рефлексивно (т.е. уIу выполняется) и симметрично (если верно уIz, то справедливо и zIу);
- R рефлексивно;
- P и I не пересекаются (не может одновременно быть уPz и уIz).

Воспользуемся вышеописанной моделью для решения задачи маршрутизации.

Лицом, принимающей решение, является инженер телекоммуникационных сетей.

Множеством вариантов решений S служат всевозможные пути в сети между двумя точками, для которых строится маршрут. Пути должны удовлетворять ограничениям (4.67) – (4.68).

Каждый вариант $s_i \in S$ характеризуется тремя критериями:

- K_1 - стоимость резервирования канала s_i для пропускания (4.71) трафика типа T;
- K_2 - загрузка канала s_i; (4.72)
- K_3 - коэффициент надёжности канала s_i. (4.73)

Шкалы X_i, $i = 1, 2, 3$ для каждого критерия различны:

Множество значений критерия K_1 принадлежат $[0, +\infty)$,

Множество значений критерия K_2 принадлежат отрезку [0,1],

Множество значений критерия K_3 принадлежат отрезку [0,1].

Разнообразие возможных способов получения и ормализации информации о предпочтениях предопределило появление большого количества различных подходов и методов решения многокритериальных задач.

Большинство известных методов предусматривает использование в той или иной форме информации о важности критериев. Одним из наиболее известных методов такого рода является метод обобщенного критерия, который состоит в следующем. Вначале все исходные критерии K_i приводят к сопоставимому безразмерному виду $\overset{o}{K}_i$ (“нормализуют”). Для этого можно использовать, например, следующие преобразования: $\overset{o}{K}_i = K_i / a_i^0$, $\overset{o}{K}_i = (K_i - a_{i0})/(a_i^0 - a_{i0})$, где a_i^0- некоторые “эталонные” (напр., максимально возможные и т.п.), а a_{i0} - минимально допустимые значения критериев K_i. Далее все критерии $\overset{o}{K}_i$ “сворачивают” в одну функцию – обобщенный критерий Ф(α_1,

$\overset{o}{K}_1\,\overset{o}{K}_1$, …, α_m, $\overset{o}{K}_m$), учитывая их относительную важность при помощи специальных положительных чисел α_i, называемых коэффициентами важности. Обычно требуют еще, чтобы $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$. В итоге исходная многокритериальная задача сводится к обычной задаче оптимизации по одному критерию Ф.

Самыми распространенными являются обобщенные критерии, построенные на средневзвешенной степенной $\Phi^{(s)}=\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \overset{o}{K}_i^{\,s}\right)^{\frac{1}{s}}$, и особенно взвешенная сумма критериев $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \overset{o}{K}_i$. Одним из самых сложных этапов построения обобщенных критериев является определение коэффициентов важности. В некоторых случаях эти коэффициенты можно назначить в результате анализа модели операции, но обычно эти значения устанавливает ЛПР из собственных соображений.

Метод обобщенного критерия содержит ряд недостатков. Один из них состоит в том, что этот метод допускает компенсацию низкой оценки по одному критерию высокой оценкой по другому. Такое поведение можно допустить не для всех задач. В задаче маршрутизации в мультисервисных сетях маленькая величина загрузки канала (критерий K_2) не компенсирует потерю большого количества пакетов (критерий K_3) трафика при предоставлении услуги “IP телефонии”.

В связи с этим для решения задачи маршрутизации был выбран метод количественной важности критериев, в основе которого лежат точные определения понятий типа “Критерий K_1 и K_2 равноценны”, “Критерии K_1 и K_2 (в совокупности) важнее, чем критерий K_3” и т.п.

Метод количественных оценок важности критериев опирается на строгое определение понятия “один критерий важнее другого во столько то раз”. Однако указать точные значения оцениваемых величин достаточно сложно, и вследствие этого в количественной информации часто содержатся неточности или ошибки. Поэтому более надежной информацией являются не точные, а интервальные оценки коэффициентов важности.

Метод интервальных оценок также предполагает однородность всех критериев.

Пусть информация о важности представлена m интервалами, ограничивающими возможные значения коэффициентов важности:

$$l_i \le \lambda_i \le r_i,\ i = 1,...,m, \qquad (4.74)$$

где все $l_i > 0$, $r_i < 1$. Чтобы информация (4.71) была внутренне непротиворечивой, должны выполняться условия: $l_1 + \ldots + l_m \le 1$.

Понятно, что если для векторных оценок x и y при любом векторе коэффициентов важности $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, компоненты которого удовлетворяют (4.74), справедливо $xR(\lambda)y$, то следует считать, что векторная оценка x не менее предпочтительна, чем y. Указанное решающее правило, задающее отношение $R(\lambda^{[\ ]})$, можно представить следующим образом.

Неравенства (4.73) перепишем в виде:

$$a_{k1}\lambda_1 + \ldots + a_{km}\lambda_m \ge 0,\ k = 2, \ldots, m, \qquad (4.75)$$

где каждый коэффициент a_{ki} есть -1, 0 или 1.

Условие выполнения (4.74) при любых λ_i, удовлетворяющих условию (4.74), можно записать так:

$$\mu_k \ge 0,\ k=2, \ldots, m,$$

где μ_k – наименьшее значение левой части соответствующего неравенства из (4.75).

Задача отыскания μ_k есть задача минимизации левой части (4.75) при ограничениях (4.73) и $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Таким образом задача проверки выполнения $xR(\lambda^{[\ ]})y$ свелась к ряду задач линейного программирования (которые, в свою очередь, можно свести к одной задаче). Однако, учитывая простую структуру (4.75) и ограничений, можно указать более простой путь.

Неравенства (4.75) можно разбить на три группы:

- заведомо (при любых допустимых значениях λ_i) верные: все m коэффициентов a_{ki} неотрицательны;
- заведомо неверные: нет положительных a_{ki} и есть хотя бы один отрицательный;
- сомнительные: есть и положительные, и отрицательные a_{ki}.

Перепишем ограничения (4.74) следующим образом:

$$l_i \le \lambda_i \le l_i + \varepsilon_i,\ i = 1,...,m, \qquad (4.76)$$

где $\varepsilon_i = r_i - l_i$. Суммируя эти неравенства, получим

$$\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m \le \Delta,$$

где

$$\Delta = 1 - (l_1 + \ldots + l_m).$$

Теперь значения λ_i можно представить в виде:

$$\lambda_i = l_i + \delta_i,\ 0 \le \delta_i \le \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots,m, \qquad (4.77)$$

и переписать (4.74) так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ki} l_i + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}\delta_i \ge 0,\ k = 2,\ldots,m.$$

Величина μ_k для сомнительного неравенства вычисляется следующим образом. Вначале поочередно (в любом порядке) назначаем максимально возможные (согласно (4.77)) значения δ_i с такими номерами i, при которых a_{ki}=-1, до тех пор, пока сумма назначенных δ_i не достигнет Δ. Если все такие номера исчерпаны, а "запас" Δ не полностью истрачен, то поочередно (в любом порядке) назначаем максимально возможные значения δ_i для всех номеров i, при которых a_{ki} = 0, до тех пор, пока сумма всех назначенных δ_i не достигнет Δ. Если и после этого некоторый "запас" все еще остается, назначаем поочередно (в любом порядке) максимально возможные значения δ_i для оставшихся номеров i. На любом этапе назначения величин δ_i после исчерпания "запаса" Δ все оставшиеся δ_i полагаются равными нулю.

Получили следующую формулировку решающего правила: $xR(\lambda^{[]})y$ выполняется тогда и только тогда, когда среди q-1 неравенств (4.75) нет заведомо неверных и для всех сомнительных неравенств вычисленные указанным выше способом величины $\mu_k \ge 0$.

Каждое соединение характеризуется следующими параметрами:

- Стоимость (Cost);
- Загруженность (Utilization);
- Коэффициент ошибок (Error);
- Доступная полоса пропускания (Bandwidth);
- Коэффициент задержек (Delay).

Модуль поиска маршрута минимизирует указанные критерии cost, utilization и error используя или метод количественных или интервальных оценок важности критериев. Метод выбирается на основании того, какая информация о соотношениях между критериями была получена на входе.

Далее рассмотрим алгоритм решения задачи маршрутизации методами количественных или интервальных оценок важности критериев на примере сети связи.

Максимальное значение критерия Cost - 46 («p3-pointTarget»). Примем $\Delta_{max} = 5$, тогда $B_{cost} = 10$.

Максимальное значение критерия Utilization – 0,6. Примем $\Delta_{max} = 0{,}1$, тогда $B_{util} = 6$

Максимальное значение критерия Error – 9. Примем $\Delta_{max} = 1$, тогда $B_{error} = 10$.

Верхняя граница шкалы B = 10.

Цель оператора связи – «получать больше, вкладывать меньше».

Для этого постоянно необходимо:

- повышать скорость и качество внедрения новых услуг и сервисов;
- повышать активность бизнеса (включая финансы, маркетинг, партнерство, новые бизнес-модели работы на рынке);
- сокращать эксплуатационные расходы;
- повышать качество обслуживания клиентов и, как следствие, их лояльность.

В данной работе представлен один из методов решения задачи многокритериальной маршрутизации в мультисервисных телекоммуникационных сетях связи. К особенностям предложенного метода можно отнести использование при поиске маршрута таких критериев, как стоимость резервирования канала связи, его загрузка и надежность. К ограничениям, накладываемым на маршрут – пропускную способность и временную задержку передачи данных в канале. Этот подход позволяет строить оптимальный маршрут практически для любого типа сервиса.

В результате работы создан объектно-ориентированный расширяемый программный комплекс, который решает поставленную задачу.

Предложенный метод решения задачи автоматической маршрутизации может быть использован в системах операционной поддержки (OSS), т.к. такие системы хранят в себе информацию об инфраструктуре всей сети связи. Также метод может применяться при решении задачи проектирования телекоммуникационных сетей, при расчёте надежности в работе сервисов.

На основании предложенного метода создана аппроксимирующая модель оценки и прогноза риска в нечетких условиях с проверкой и без проверки решения задачи на устойчивость (рис. 4.2, 4.3). Ошибка прогноза по первой модели составила 0,05-3,5% , а по второй - 5,5 -50,33% .

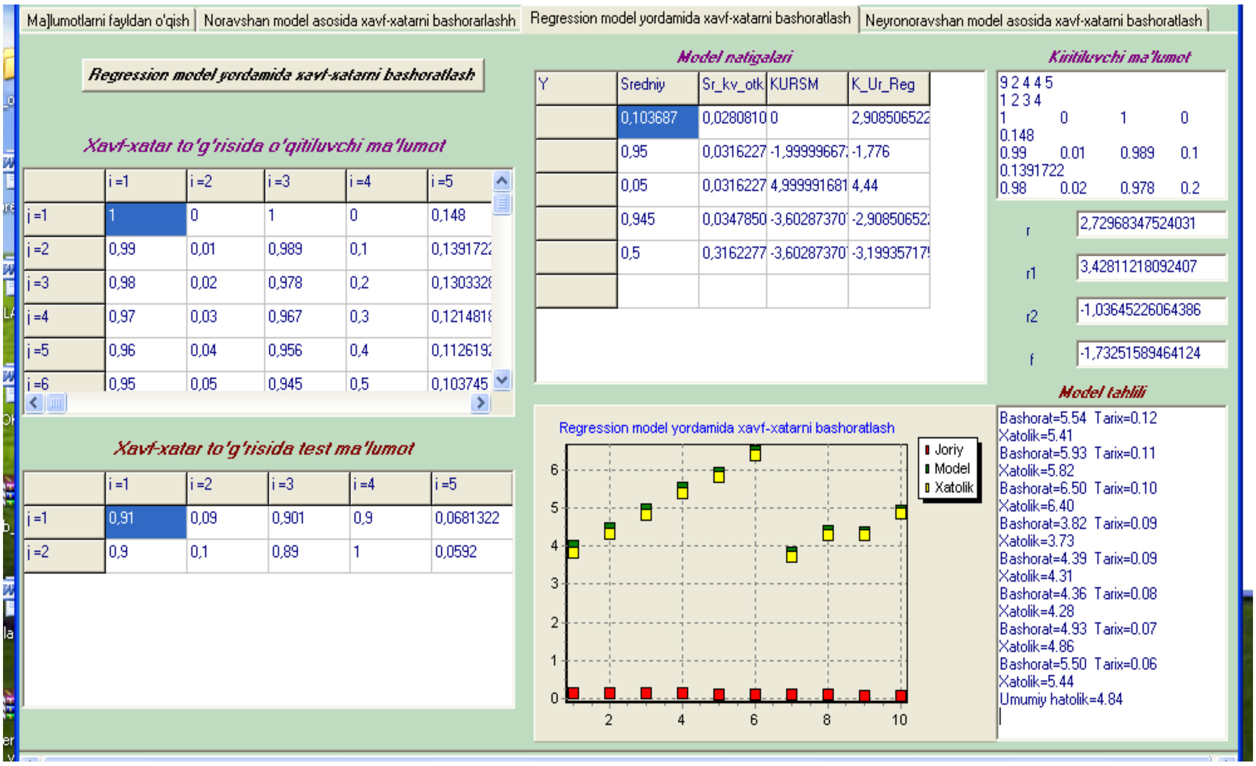


Рис.4.2. Результат без проверки на устойчивость

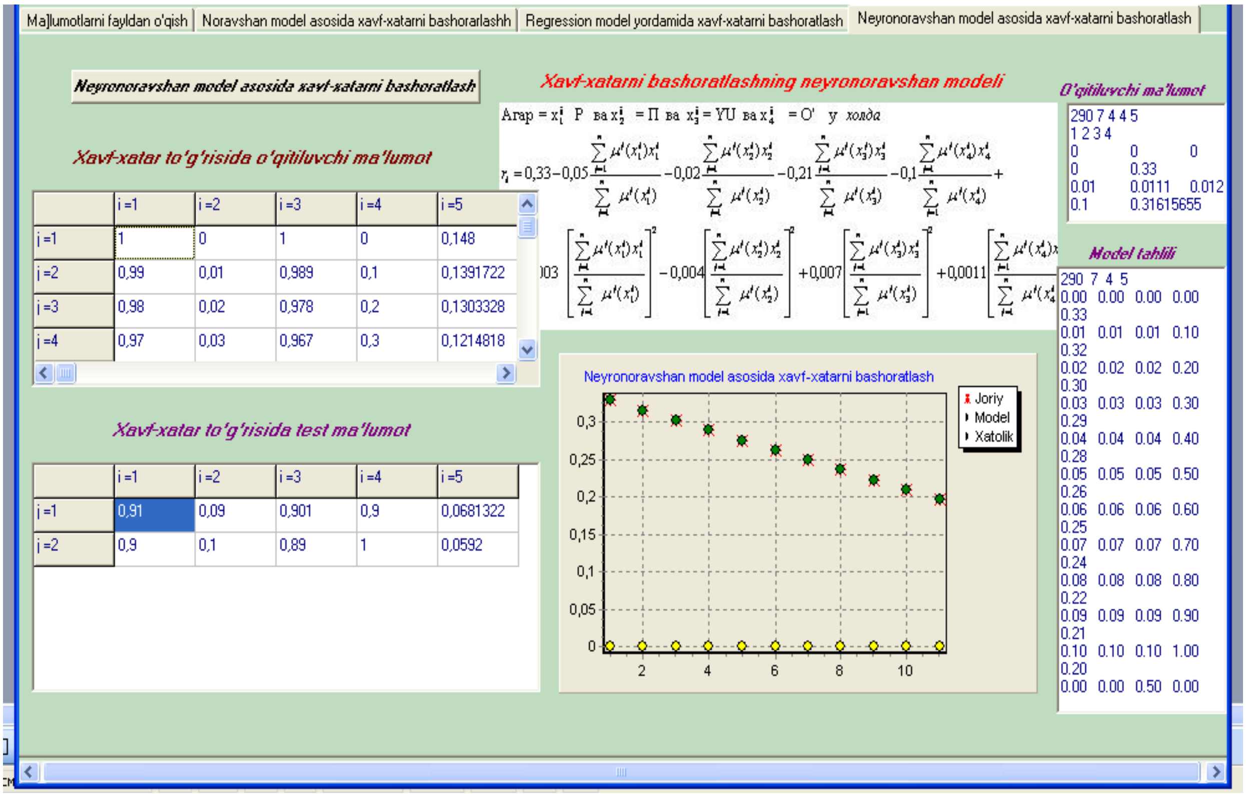


Рис.4.3. Результат с проверкой на устойчивость

Разработан алгоритм решения задачи параметрического программирования на основе нечеткой текущей информации.

Проведен вычислительный эксперимент для решения задачи математического программирования в следующей постановки.

Пусть задана оптимизационная модель размещения инвестиций в зонах рискованного земледелия при нечеткой исходной информации:

максимизировать по $x = \{x_i\}$ функцию

$$f(x) = \sum_i \theta_j x_i \to \max$$

и минимизировать риск

$$r \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_i m_{ij}\theta_i x_i - r\mu_j \sum_i \theta_i x_i \subset K_j^1, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$\sum_i l_{ij} x_i - r\lambda_j \sum_i x_i \subset K_j^2, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$\sum_i c_i x_i - I \subset K_j^3; \quad 0 \le x_i \le b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь x_i – засеянная площадь в регионе i; c_i – стоимость выращивания культуры на единице площади в регионе i; θ_i – урожайность культуры в регионе i при нормальных условиях; l_{ij} – экспертно определяемый коэффициент потерь посевных площадей в регионе i при катастрофическом сценарии j; m_{ij} – опытный коэффициент потерь урожайности в регионе i при катастрофическом сценарии j; b_j – максимальная засеваемая площадь в регионе i; λ_j – допустимые потери в долях посевных площадей для сценария j; μ_j – допустимые потери в долях общего урожая для сценария j; r – коэффициент риска; I – общий объем инвестиций.

Для решения задач оценки, прогнозирования риска и принятия решений в слабоформализуемых системах создана программа в (рис.4.4) и получены результаты решения задачи многокритериальной оптимизации.

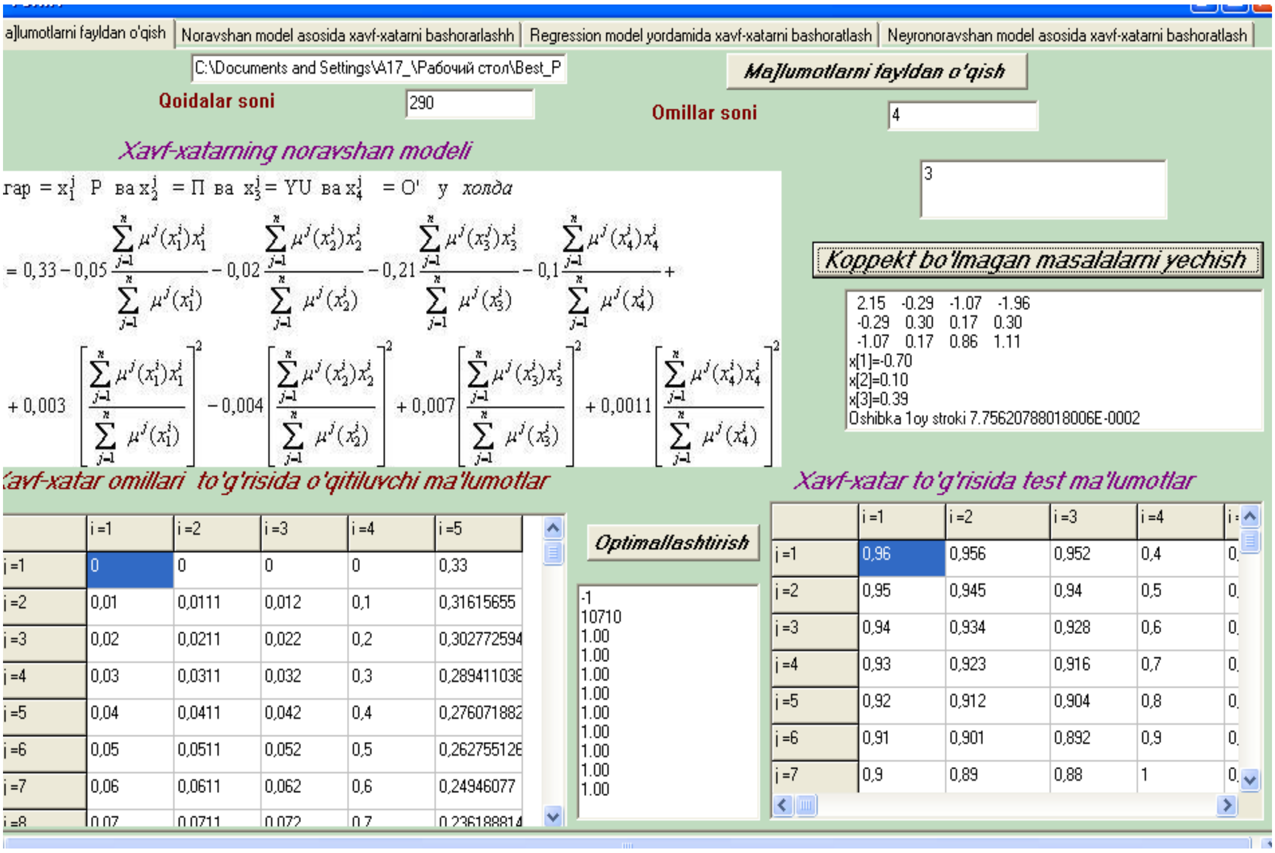


Рис.4.4. Результат вычислительного эксперимента для решения задач многокритериальной оптимизации

Разработано программное обеспечение для решения практических задач прогнозирования и принятия решений по оценке риска в слабо формализуемых системах и получены результаты оптимизационной задачи (табл.4.10).

Если коэффициенты и их оценки принимают нечеткие значения «Низкий», «Средний», «Высокий», тогда при *m=2, n=2* задача принимает следующий вид.

Пусть целевая функция

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{J} \mu_{c_1}(c_1) c_1^j}{\sum_{j=1}^{J} \mu_{c_2}(c_2)} x_1 + \frac{\sum_{j=1}^{J} \mu_{c_2}(c_2) c_2^j}{\sum_{j=1}^{J} \mu_{c_2}(c_2)} x_2 \to \max \tag{4.78}$$

максимизируется во множестве $D \subseteq X$, определяемом системой ограничений

Таблица 4.10

Результаты оптимизационной задачи

	Оптимизационные расчёты на 2017 год (прибыль – **max,** риск **- min**)		Оптимизационные расчёты на 2022 год (прибыль – **max,** риск **- min**)	
	Функция принад-лежности посевной площади	Функция принад-лежности валового сбора	Функция принад-лежности посевной площади	Функция принад-лежности валового сбора
	3	4	5	6
I. Виды продукции				
1.1. Пшеница	$exp[-(x-350)^{2}/45]$	$exp[-(x-6637)^{2}/45]$	$exp[-(x-300)^{2}/45]$	$exp[-(x-500)^{2}/45]$
1.2. Овощи	$exp[-(x-224)^{2}/45]$	$exp[-(x-5703)^{2}/45]$	$exp[-(x-205)^{2}/45]$	$exp[-(x-355)^{2}/45]$
1.3. Картофель.	$exp[-(x-86)^{2}/5]$	$exp[-(x-1713)^{2}/45]$	$exp[-(x-102)^{2}/25]$	$exp[-(x-265)^{2}/45]$
1.4. Бахчи	$exp[-(x-56)^{2}/5]$	$exp[-(x-1071)^{2}/45]$	$exp[-(x-50)^{2}/5]$	$exp[-(x-125)^{2}/45]$
1.5. Плоды и ягоды	$exp[-(x-176)^{2}/25]$	$exp[-(x-1542)^{2}/45]$	$exp[-(x-227)^{2}/45]$	$exp[-(x-138)^{2}/45]$
1.6.Виноград	$exp[-(x-105)^{2}/15]$	$exp[-(x-899)^{2}/45]$	$exp[-(x-111)^{2}/15]$	$exp[-(x-054)^{2}/45]$
1.7. Хлопок	$exp[-(x-185)^{2}/45]$	$exp[- (x-999)^{2}/45]$	$exp[-(x-037)^{2}/45]$	$exp[-(x-800)^{2}/45]$
Итого:	$exp[-(x-192)^{2}/45]$	$exp[-(x-568)^{2}/550]$	$exp[-(x-033)^{2}/45]$	$exp[-(x-238)^{2}/45]$
II. Сводные индикаторы				
2.1. Затраты (млн.сум)	$exp[-(x-244)^{2}/45]$		$exp[-(x-166)^{2}/45]$	
2.2.Чистая прибыль (млн.сум)	$exp[-(x-094)^{2}/45]$		$exp[-(x-118)^{2}/45]$	
2.3. Занятость (тыс.чел)	$exp[-(x-600)^{2}/45]$		$exp[-(x-595)^{2}/45]$	
2.4. Потребность воды (млн. м3)	$exp[-(x-412)^{2}/45]$		$exp[-(x-268)^{2}/45]$	

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{11}}(a_{11})a_{11}^{j}}{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{11}}(a_{11})}x_1+\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{12}}(a_{12})a_{12}^{j}}{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{12}}(a_{12})}x_2\subset K_1,\\
\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{21}}(a_{21})a_{21}^{j}}{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{21}}(a_{21})}x_1-\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{22}}(a_{22})a_{22}^{j}}{\sum\limits_{j=1}^{J}\mu_{a_{22}}(a_{22})}x_2\subset K_2.
\end{cases}
\tag{4.79}
$$

Для решения этой задачи используем систему возможностных ограничений. Переходим к нечеткой постановке задачи максимизации целевой функции (3.3.9), определяемой во множестве $D\subseteq X$ через следующую систему:

$$
\begin{cases}
\mu\{a_{11}(\gamma)x_1+a_{12}(\gamma)x_2=0\}\geq\alpha,\\
\mu\{a_{21}(\gamma)x_1+a_{22}(\gamma)x_2=0\}\geq\alpha,
\end{cases}
$$

где a_{12}, a_{21} = $N(1, b)$, a_{11}, a_{22} = $N(-1, b)$, α и b - параметры нечеткости.

Рассмотрим отношения

$$f_i(x,\gamma)=a_{i1}(\gamma)x_1+a_{i2}(\gamma)x_2,\ i=1,2.$$

Здесь

$$f_1(x,\gamma)=N(-x_1+x_2,\ b(x_1+x_2)),\ \ f_2(x,\gamma)=N(x_1-x_2,b(x_1+x_2)).$$

Функция принадлежности $f_j(x,\gamma)$ определяется следующим образом:

$$\mu_{f_i(x,\gamma)}(0)=\exp\left(-\frac{1}{b^2}\frac{(x_1-x_2)^2}{(x_1+x_2)^2}\right).$$

Задаем ε окрестность текущих нечетких параметров. Тогда вместо задачи (4.78), (4.79) получаем задачу оптимизации (4.78) во множестве D^{ε}:

$$
\begin{cases}
\mu\{a_{11}(\gamma)x_1+a_{12}^{\varepsilon}(\gamma)x_2=0\}\geq\alpha,\\
\mu\{a_{21}^{\varepsilon}(\gamma)x_1+a_{22}(\gamma)x_2=0\}\geq\alpha,
\end{cases}
\tag{4.80}
$$

где $a_{12}^{\varepsilon},a_{21}^{\varepsilon}=N(1+\varepsilon,b),\ a_{11},a_{22}=N(-1,b)$.

В таком случае функция распределения возможностей точек $x \in X$ во множестве решений D^{ε} имеет следующий вид:

$$\mu_{D^{\varepsilon}}(x) = \min_i \{\mu_{f_i^{\varepsilon}(x,\gamma)}(0)\} = \exp\left(-\frac{((1+\varepsilon)\max\{x_1, x_2\} - \min\{x_1, x_2\}^2}{b^2(x_1 + x_2)^2} \right).$$

Графики функций принадлежности $\mu_{D^{\varepsilon}}(x)$, описывающие действие каждого ограничения в ε окрестности, приведены на рис.4.5, 4.6 соответственно для следующих значений параметров: b=0.5, ε=0.3 и b=0.5, ε=0.9.

Увеличения ошибок параметров ограничений понижают возможность принадлежности точек $x \in X$ множеству D^{ε}.

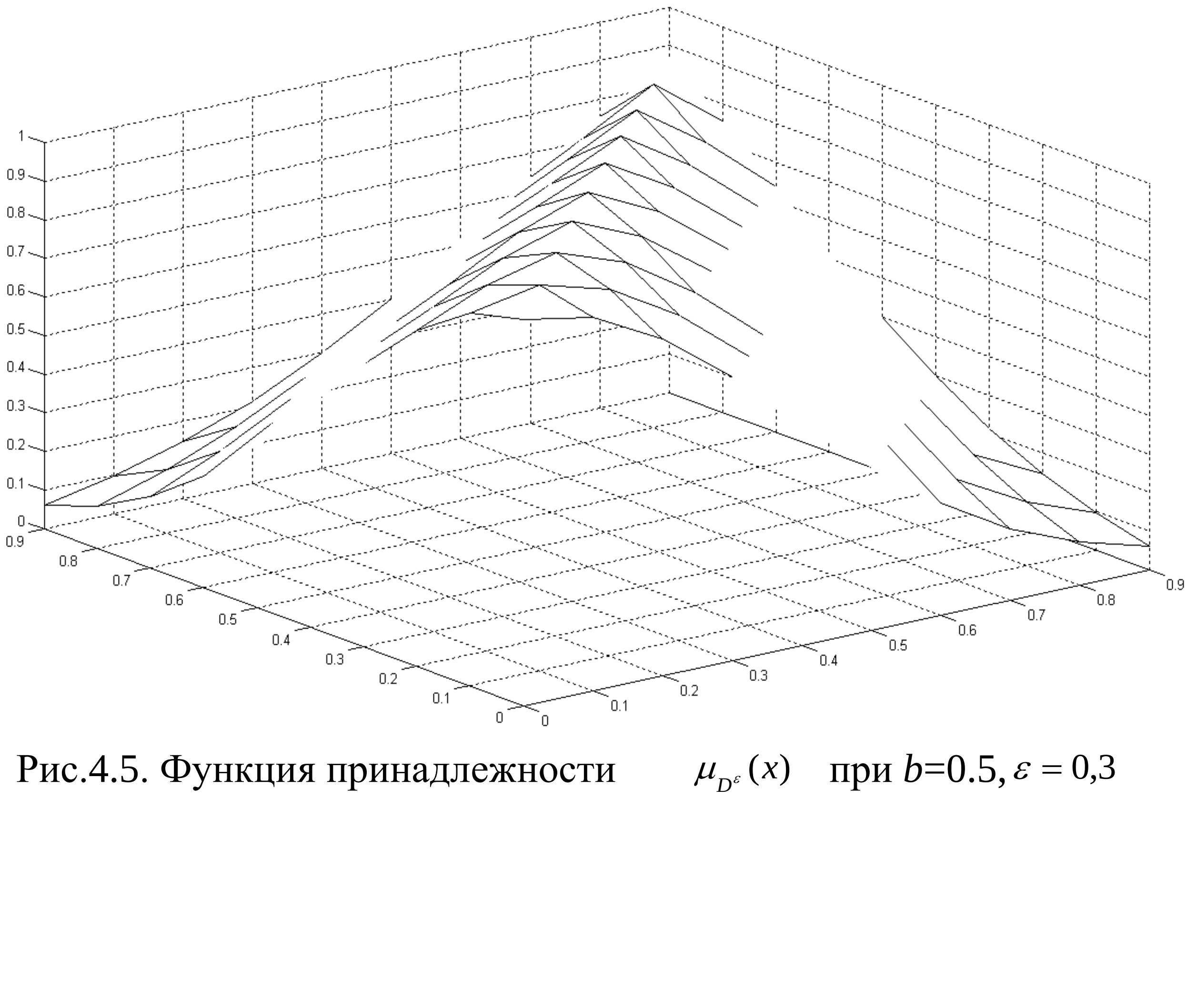


Рис.4.5. Функция принадлежности $\mu_{D^{\varepsilon}}(x)$ при b=0.5, $\varepsilon = 0{,}3$

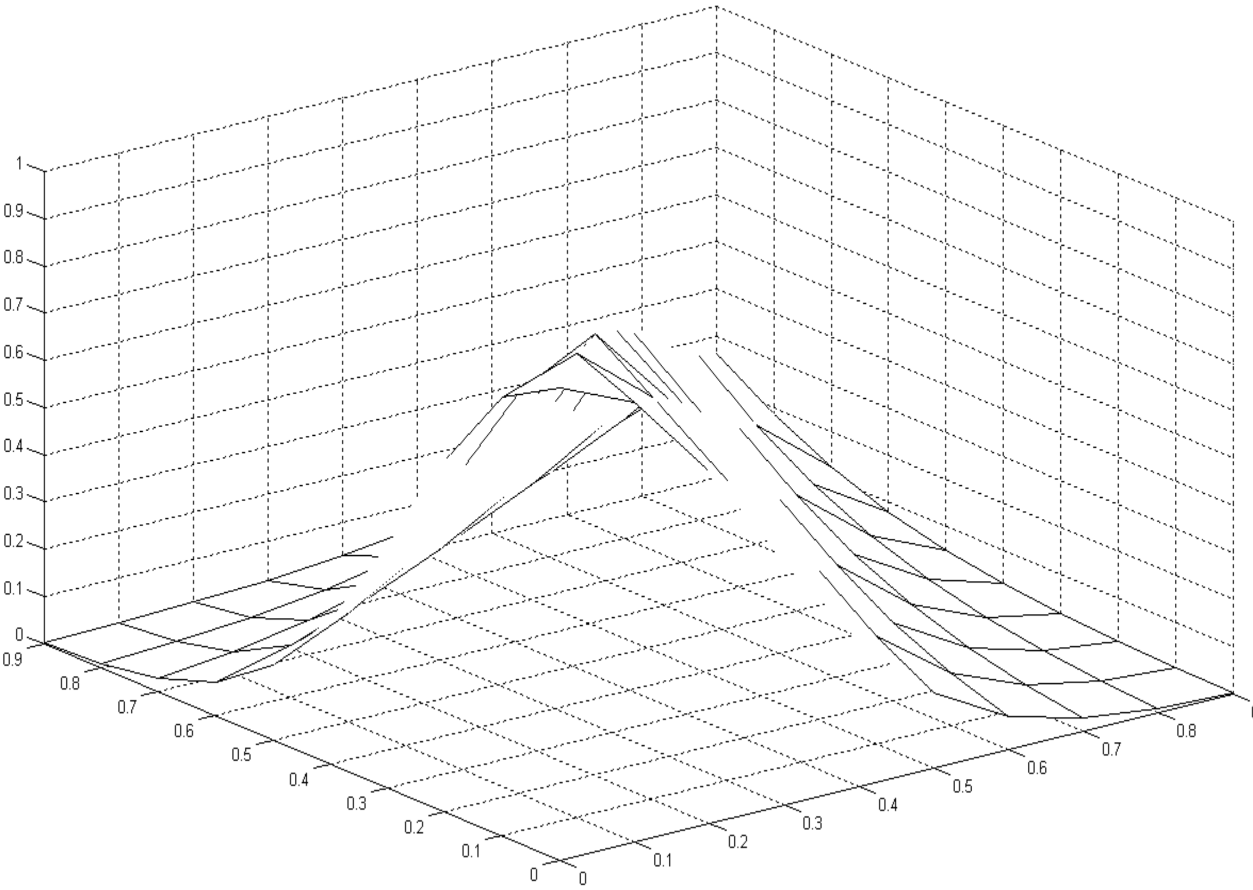


Рис.4.6. Функция принадлежности $\mu_{D^{\varepsilon}}(x)$ при b=0.5, $\varepsilon = 0{,}9$

Подход, основанный на экспертном определении моделей задач нелинейной оптимизации в виде нечетких величин, позволяет человеку, принимающему решения, понимать смысл целевой функции и ограничений (семантику) задачи оптимизации слабоформализуемых процессов.

4.4. Решение нечеткой задачи транспортировки

Математическое моделирование является наиболее совершенным и вместе с тем наиболее эффективным методом моделирования. Именно этот путь моделирования открывает возможности для применения средств математического анализа. Естественно, результаты исследования модели будут иметь практический интерес, если сама модель достаточно адекватна рассматриваемому явлению, то есть достаточно хорошо отображает реальную ситуацию [161]. Для более точного описания действительности приходится строить несколько моделей, учитывающих различные стороны рассматриваемого явления, т.е. порой целесообразнее построить несколько моделей одного и того же объекта или явления, чем пытаться построить одну, наиболее полно описывающую этот процесс модель. В дальнейшем на этапе поиска алгоритма решения модели такой подход вдвойне оправдан. Степень совершенства математических моделей, применяемых в той или иной науке, математический аппарат, используемый для их исследования, в известной мере характеризуют уровень развития науки. Адекватность модели является в какой-то мере условным понятием, т.к. полного соответствия модели реальному объекту быть не может. Чаще имеется в виду не просто адекватность, а только лишь соответствие модели оригиналу по тем свойствам, которые считаются существенными для исследования рассматриваемого явления. Главная задача всех математических моделей – заглянуть в будущее. Заглянуть в то время, когда моделируемого объекта еще нет, либо создать условия, в которых этот объект еще не был. Среди всего разнообразия математических моделей, практически применяемых на сегодняшний день для анализа транспортных сетей городов и регионов, можно выделить три основные группы моделей [162]:

1) прогнозные;
2) имитационные;
3) оптимизационные модели.

В свою очередь каждой группе моделей можно поставить в соответствие определенный круг решаемых задач. В нашем случае это будут задачи [163]:

– транспортного планирования;
– организации дорожного движения;

– оптимизации перевозочного процесса.

Также каждая группа имеет свой объект исследования и соответствующий этому объекту набор степеней свободы. Соответственно, в этом случае в качестве таких объектов будут выступать [164]:

– транспортный поток;

– транспортное средство;

– пассажиропоток;

– формализованный параметр оптимизации (цель).

Моделирование дает возможность наглядно изобразить комплексные процессы деятельности транспорта, прогнозировать перераспределение транспортных потоков в результате внешних воздействий на участки улично- дорожной сети, таких как [165]:

– строительство новых участков сети;

– реконструкция (расширение) участков сети;

– закрытие отдельных участков сети;

– изменения условий движения в сети;

– изменение маршрутной сети и расписаний движения общественного транспорта.

Прогнозные модели предназначены для моделирования объемов транспортной работы в сетях при известном размещении потокообразующих объектов города. При помощи прогнозных моделей можно прогнозировать последствия изменений в транспортной сети города, происходящие либо в процессе изменения транспортного спроса, либо в процессе изменения транспортного предложения. Модели этого типа применяются для поддержки решений в области транспортного планирования города, для анализа последствий тех или иных альтернативных проектов развития транспортной сети и др. Прогнозные модели в свою очередь можно разделить также на две группы по основным задачам прогнозирования: – прогнозирование во времени; – прогнозирование в пространстве. Группы моделей подчиненно связаны друг с другом. Прогнозы интенсивности движения транспорта являются исходными данными для последующей имитации этого движения во времени. Имитация, в свою очередь, порождает видимую потребность в оптимизации того или иного транспортного процесса. Такая связь моделей различных групп и назначений позволяет говорить о некоторой модельной основе, так или иначе необходимой при создании каждой из них и объединяющей их одним термином – транспортная модель города [166].

Прогнозные и имитационные модели в своих алгоритмах уже учитывают основные определяющие предпочтения всех участников дорожного движения при выборе маршрутов движения по сети. Задача прогноза загрузки транспортной сети обычно состоит в расчете усредненных характеристик движения, таких как объемы межрайонных передвижений, интенсивность потока, распределение автомобилей и пассажиров по путям движения и др. В отличие от этого имитационное моделирование ставит своей целью воспроизведение всех деталей движения, включая развитие процесса во времени. При этом усредненные параметры транспортных потоков и их распределение по различным путям движения считаются известными и служат исходными данными для этих моделей. Таким образом, прогноз интенсивности и имитационное моделирование являются дополняющими друг друга направлениями. Имитационные модели позволяют оценить скорости движения, задержки на перекрестках, длины и динамику образования «очередей» или «заторов» и другие характеристики движения. Применение таких моделей целесообразно при разработке проектов организации дорожного движения, оптимизации светофорных циклов регулирования и т.п. Решая задачу совершенствования организации дорожного движения в отдельном элементе улично-дорожной сети города, нельзя ориентироваться только на существующие объемы движения в этом элементе. Изменения в транспортном предложении неминуемо повлекут изменение спроса на этот участок сети у других участников дорожного движения. Для решения задачи организации дорожного движения на отдельном элементе или узле может быть использована имитационная модель[165].

Таким образом, возникает задача получения нового прогноза распределения транспортных потоков по городу, которое установится после проведения данного мероприятия. И эта задача реализуется уже при помощи оптимизационных моделей. А далее новое распределение транспортного движения по сети и изменившиеся нагрузки и объемы движения на этом конкретном участке также потребуют корректировок организации дорожного движения, настройки работы светофорных объектов [166].

К настоящему времени созданы транспортные модели всех крупных городов мира. В США созданы модели всех городов с населением более 1 млн. жителей. В Германии и Нидерландах свои транспортные модели имеет каждый город с населением более 100 тыс. человек. С помощью коммерческих программных комплексов построены транспортные модели в таких городах, как Нью-Йорк, Лос-Анджелес, Лондон, Париж, Милан и другие. Построена модель транспортной сети почти всей Европы от границ СНГ до Атлантического океана. Самой подробной (с наибольшим количеством элементов) транспортной моделью в мире является транспортная модель Германии. Кроме того, разработана транспортная модель Швейцарии , включающая также соседние страны Европы в качестве внешних районов [164-166].

Решение нечеткой задачи транспортировки. Транспортные модели находят широкое применение в логистике и цепочках поставок для снижения затрат. Когда коэффициенты затрат и количества спроса и предложения известны точно, было разработано множество алгоритмов для решения транспортной задачи. Но в реальном мире во многих случаях коэффициенты затрат и количества спроса и предложения являются нечеткими величинами. Проблема нечеткой транспортировки - это проблема транспортировки, в которой транспортные расходы, объемы спроса и предложения являются нечеткими величинами [167-168].

Определение 4.1. Треугольное нечеткое число A - это нечеткое число, полностью заданное кортежами из 3 (a, b, c), такими, что a <b <c, с функцией принадлежности, определенной как [167]

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & if \quad a \le x \le b, \\ \dfrac{x-c}{c-b} & if \quad b \le x \le c, \\ 0 & if \quad x \ge c. \end{cases}$$

Определение 4.2. Гармоническое среднее H положительных действительных чисел $x_1, x_2 \dots, x_n$ определяется как [7]

$$H = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dots + \dfrac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}.$$

Математически нечеткую транспортную задачу можно сформулировать следующим образом [168-170]:

Минимизировать

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij}.$$

С учетом ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{a}_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{b}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где m: общее количество источников,

n:общее количество пунктов назначения.

$\tilde{a}_i$:нечеткое предложение общественного транспорта.

b_j :нечеткий спрос на общественный транспорт в *j*- пункте назначения.

c_{ij} : нечеткие транспортные расходы на единицу перевозки от *i*-го источника до *j*-го места назначения.

x_{ij} :нечеткое количество, транспортируемое из *i*-го источника в *j*-й пункт назначения (или нечеткие переменные решения), чтобы минимизировать общую нечеткую транспортировку [157-159].

Алгоритм решения и вычислительный эксперимент.

1.Строим таблицу, в которой в клетки пересечения пункта отправления A_i и пункта потребления B_j записываем затраты в условных единицах на перевозку груза из соответствующего пункта отправления в соответствующий пункт потребления. Получилась следующая таблица:

Таблица 4.11

Условие транспортной задачи

Пункт отправления	Пункт назначения				Предложение
	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	
*A*1	(1,2,3)	(4,5,6)	(5,6,7)	(3,4,5)	(30,40,50)
*A*2	(1,2,3)	(3,4,5)	(4,5,6)	(1,2,3)	(50,60,70)
*A*3	(1,2,3)	(2,3,4)	(3,4,5)	(0,1,2)	(90,100,110)
Спрос	(25,35,45)	(25,35,45)	(70,80,90)	(40,50,60)	

2.Строим первоначальный план перевозок, применяя правило минимального элемента.

2.1. Из всех клеток таблицы выбираем клетку с минимальной стоимостью перевозок. Это клетка A_3B_4. Ей соответствует стоимость c_{34} = R(0,1,2). Это клетка, соответствующая пункту отправления A_3 и пункту потребления B_4. Запас груза в пункте A_3 равен R(90,100,110) единицам, а потребность в грузе в пункте B_4 – R(40,50,60) единицам.

2.2. Удовлетворим потребность пункта B_4 за счёт пункта A_3: впишем в правый нижний угол клетки A_3B_4 число R(40,50,60), а стоимость, равную R(0,1,2), возьмём в кружок.

2.3. Теперь по правилу минимального элемента следующую клетку с минимальным элементом следует искать или в столбце, или в строке, в которой находится пройденная клетка A_3B_4. В нашем случае в пункте отправления A_3 осталилось неизрасходовано R(40,50,60) единиц груза. Поэтому следующую клетку с минимальной стоимстью ищем в строке, соответствующей пункту отправления A_3. Это клетка A_3B_1 с минимальной стоимостью c_{31} = R(1,2,3). Пункту потребления B_1 требуются R(25,35,45) единиц груза. Удовлетворим потребность пункта B_1 за счёт пункта A_3: впишем в правый нижний угол клетки A_3B_1 число R(25,35,45), а стоимость R(1,2,3) возьмём в кружок.

2.4. Далее следует двигаться или по столбцу, или по строке, в которой находится кретка A_3B_1. В пункте отправления A_3 осталось неизрасходовано R(5,15,25) единиц груза. Поэтому вновь движемся по строке и находим клетку A_3B_2 с минимальной стоимостью c_{32} = R(2,3,4). Оставшиеся в пункте A_3 R(5,15,25) единиц отправляем в пункт потребления B_2, в правый нижний угол клетки A_3B_2 впишем число R(5,15,25), а стоимость R(2,3,4) возьмём в кружок.

2.5. Вновь нам предстоит двигаться или по столбцу, или по строке, в которой находится пройденная клетка. В пройденной клетке A_3B_2 запасы груза в пункте отправления A_3 были израсходованы, поэтому дальше двигаемся уже по столбцу. Приходим на строку, соответствующую пункту отправления A_2, в клетку A_2B_2, с минимальной в данном столбце стоимостью перевозок c_{32} = R(3,4,5). У пункта потребления B_2 остались неудовлетворённые потребности в R(10,20,30) единицах. Удовлетворим эти потребности за счёт пункта отправления A_2: в правый нижний угол клетки A_2B_2 вписываем число R(10,20,30), а стоимость R(3,4,5) возьмём в кружок.

2.6. В пункте отправления A_2 остались неизрасходованы R(30,40,50) единиц. Попадаем в клетку A_2B_3. Потребности пунктов потребления B_1, B_2 и B_4 уже удовлетворены, поэтому R(30,40,50) единиц, требующиеся пункту потребления B_3, направим в этот пункт, в правый нижний угол клетки A_2B_3 вписываем число R(30,40,50), а стоимость R(4,5,6) берём в кружок.

2.7. Все запасы, находившиеся в пункте отправления A_2, израсходованы, поэтому дальше двигаемся по столбцу и попадаем в клетку A_1B_3, соответствующую пункту отправления A_1. Запасы груза в этом пункте составляют R(30,40,50) единиц, а неудовлетворённые потребности в грузе в пункте потребления B_3 - также R(30,40,50) единиц. Удовлетворим потребности пункта B_3 за счёт пункта A_1, впишем в правый нижний угол клетки A_1B_3 число R(30,40,50), а стоимость перевозки R(5,6,7) возьмём в кружок.

На этом потребности во всех пунктах потребления удовлетворены, а запасы во всех пунктах отправления израсходованы.

3.Найдём значение линейной формы, соответствующей первоначальному плану перевозок:

$$z(x) = R(5,6,7)\cdot R(30,40,50) + R(3,4,5)\cdot R(10,20,30) + R(4,5,6)\cdot R(30,40,50) + R(1,2,3)\cdot R(25,35,45) + R(2,3,4)\cdot R(5,15,25) + R(0,1,2)\cdot R(40,50,60) = R(640,685,710).$$

Клетки таблицы, содержащие кружочки, будем называть "занятыми местами", а клетки, не содержащие кружочков - "свободными местами". Первоначальный план перевозок составлен.

Транспортные модели находят широкое применение в логистике и цепочке спроса и предложения для снижения затрат. В этой работе мы получили оптимальное решение нечеткой транспортной задачи с использованием треугольного нечеткого числа. Для получения оптимального решения используются арифметические операции над треугольными нечеткими числами.

4.5. Применение генетического алгоритма для решения задач оптимизации размещения и чередования культур в хлопковом севообороте

Оптимальная организация территории севооборотных полей и массивов позволяет провести целесообразное размещение культур по полям севооборота и организовать их чередование в период ротации. При этом решаются две взаимосвязанные задачи. Первая - по размещению хлопчатника и других культур по полям севооборота. Реализация позволяет определить - на каком поле следует высевать ту или иную культуру. Такая задача рассматривается как статическая и ее модель разрабатывается с зачетом основных природно-экономических условий хозяйства. Вторая задача рассматривается как динамическая Она позволяет определить в какие годы ротации на каком поле следует высевать ту или иную культуру. Разработка модели задачи основывается на информации, получаемой от статической задачи и из таблицы чередования культур в севообороте.

Для рационального размещения хлопчатника и кормовых культур с их сочетанием по полям севооборота определяется несколько показателей, характеризующих пригодность полей к посеву той или иной культуры. Главным из них, по нашему мнению, является урожайность севооборотной культуры на том или ином поле. Поэтому прогноз урожайности культур по севооборотам полей занимает особое место в системе задач оптимизации севооборота [171]. Такая задача реализуется в два этапа. На первом этапе определяется потенциальная урожайность севооборотных культур на каждом поле севооборота. Расчет выполняется по модели множественной корреляции по типам почв с предварительной оценкой пригодности почвы для посева данного вида культуры. При этом в модель включается комплекс природных и экономических факторов, характеризующих состояние почвы и других условий производства. Результаты прогноза служат основной информацией для статической модели размещения культур по полям севооборота [172]. На втором этапе решается задача по прогнозу урожайности культур севооборотных полей с учетом чередования хлопчатника и его предшественников на период ротации. Опыт ученых и практика освоения севооборотов в хозяйствах показывают, что в первые годы посева хлопчатника после распашки люцерны на севооборотных полях получают высокие урожаи, начиная с 3 и 4 годов посева продуктивность полей снижается, соответственно уменьшается и урожайность хлопчатника [173]. Это должно учитываться в модели как основное явление, происходящее при чередовании культур в севообороте. Таким образом, динамика урожайности культур по годам служит основной информацией при определении чередования культур.

Учитывая изложенное, нами разработаны статическая и линейно- динамическая модели задачи размещения культур по полям севооборотов и их чередования в период ротации [174].

Для математической формализации модели задач введем дополнительные обозначения:

P_r^k - размер r-го севооборотного поля в K-схеме севооборота;

u_{rj}^k-урожайность j-й культуры на r-м поле севооборота при K-схеме севооборота;

t_{jz}^k-трудовые затратына I га j-й культуры; c_{jk}^k- стоимость валовой продукции с I га j-й культуры;

Z_{1j}^k- производственные затраты на I га j-й культуры;

$\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k$- количество полей в K-й схеме севооборота;

T^{**}- трудовые ресурсы;

V_1- общий объем производственных затрат;

Q_i- необходимый объем производства i-го вида сельскохозяйственной продукции; x_{zj} коэффициент, определяющий долю r-го поля в K-й схеме севооборота для посева j-й культуры;

$J \in J_1, J_2, J_3$ - множество индексов переменных по севооборотным культурам.

С учетом принятых обозначений статическая модель задачи оптимизации размещения культур по полям севооборота выглядит следующим образом.

Требуется найти оптимальный план размещения культур по полям севооборота, позволяющий получить наибольший размер чистого дохода, выражаемый в виде линейной функции:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{K=1}^{K} P_r^K \left(c_{1j} - Z_{1j}\right) x_j^k \to \max$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{r=1}^{R} x_{rj}^k = 1, \qquad (4.81)$$

$$x_{rj}^{k} = \begin{cases} 1, \text{ если j} - \text{я культура высевается на r-м поле в К-й схеме севооборота;} \\ \qquad 0, \text{ в противном случай;} \end{cases}$$

$$\sum_{j=\gamma+1}^{J_1} \sum_{r=1}^{R} u_{rj}^{K} x_{j}^{k} \ge \alpha_1^K u_j^K \left(\min_j\right), \gamma = 0, 3, 6, 9, ... \qquad (4.82)$$

$$\sum_{j=\gamma+2}^{J_2} \sum_{r=1}^{R} u_{rj}^{K} x_{j}^{k} \le \alpha_2^K u_j^K \left(\max_j\right), \qquad (4.83)$$

$$\sum_{j=\gamma+3}^{J_3} \sum_{r=1}^{R} u_{rj}^{K} x_{j}^{k} \le \alpha_3^K u_j^K \left(\max_j\right), \qquad (4.84)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{r=1}^{R} P_r^k \cdot h_{rj}^k \right) \cdot x_j^k \le T^{**}, \qquad (4.85)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{r=1}^{R} P_r^k c_{rj}^K \right) \cdot x_j^k \ge 0, \qquad (4.86)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{r=1}^{R} P_r^k З_{rj}^K \right) \cdot x_j^k \le V_1, \qquad (4.87)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{k=1}^{K} \sum_{r=1}^{R} P_r^k u_{rj}^K \right) \cdot x_j^k \ge Q, \qquad (4.88)$$

$$x_{rj}^k \ge 0. \qquad (4.89)$$

Содержание отдельных ограничении и условий следующее. Равенство (4.81) отражает условия выбора одного и только одного поля севооборота под посев данной культуры. Неравенства (4.82) – (4.84) реализует условие, при котором каждая культура должна быть весляна там, где от нее получается максимальный урожай. Такое ограничение вводится по каждому виду культур, которые можно условно разделить на три группы: первая - хлопчатник, вторая --кормовые культуры, третья - кукуруза, пшеница и ячмень.

Неравенства (4.85), (4.86) и (4.87) позволяют оценить размещаемые культуры и севообороты с точки зрения их трудоемкости (4.85), производственных затрат (4.87) и возможности получения валовой продукции (4.86) на севооборотном поле.

Неравенство (4.88) реализует требования обязательного выполнения плана заготовок сельхозпродуктов, соотношение (4.89) - условия по неотрицательности переменных.

Решение задачи по данной модели позволяет определить, на каких полях следует размещать тот или другой вид культур. Такой расчет является основой для планирования чередования культур в севообороте. Для решения этой задачи оптимизации используется генетический алгоритм. В общем случае процедура оптимизации на основе обычного последовательного комплекса-метода выглядит следующим образом: требуется отыскать максимум некоторой функции F(x)при выполнении условий (4.81)-(4.89).

Работа такого алгоритма образована последовательностью следующих шагов:

- создание начальной популяции;
- операция скрещивание с увеличением популяции;
- операция мутации;
- первая селекция (определение наихудших особей) без сокращения популяции;
- операция выбора, заменяется значения наилучшему во всей популяции;

При решении задач по статической модели определены номера и размеры полей севооборота, на которых возможно размещение той или иной культуры по выбранным схемам. Основными условиями, включенными в модель, были величины урожайности культур на одном и том же поле, объем производства хлопка, производственные, трудовые затраты и условно чистый доход. Критерием оптимальности задачи служили минимизация производственных затрат и максимизация условного чистого дохода, исчисляемого как разность между стоимостью валовой продукции с I га и производственными затратами на I га. Все исходные данные рассчитывались исходя из многолетних данных. Информация подготавливалась по каждой схеме севооборота. Это дало возможность оценить все севооборотные схемы и поля в комплексе с учетом основных показателей производства. Задачи решались по двум указанным выше критериям оптимальности. Путем сопоставительного анализа итоговых результатов и их эффективности для дальнейшего исследования выбран второй вариант результатов, полученных при критерии минимизации производственных затрат. Основные результаты этого варианта приведены в табл.4.12. При выбранном размещении культур по полям севооборота объем производства хлопка составит 32,5 тыс ц,

Таблица 4.12

Размещение культур по полям севооборота

Севооборотное поле	Схема севооборота			
	1:2:7	1:4:1:4	2:4:1:3	2:8
	Х	Х	Х	Х
I	26,0	36,2	21,5	34,6
	К + К	Х	Л + Я	Х
	24,0	38,0	21; 7	35,4
	Х	Х	Л + Я	Х
III	24,6	38,2	22,0	32,1
	Х	Х	Х	Х
IV	24,0	36,2	22,0	32,3
	Л + Я	Х	Х	Х
V	22,5	38,9	22,4	35,6
	Х	К + К	Х	Х
VI	25,0	37,2	22,2	34,4
	Х	К	К + К	Х
VII	25,6	37,8	22, 6	31,5
	Х	Х	Х	Л + Я
VIII	24,0	37,3	22,6	34,8
IX	Х	Х	Х	Л + Я
	24,0	37,5	22,0	35,8
X	Л + П	Х	Х	Х
	24,6	35,2	22,0	34,2

В числителе - вид севооборотной культуры, в знаменателе - размер севооборотного поля.

Здесь: Х - хлопок; К - кукуруза; Кп - корнеплоды;

I - люцерна; Я - ячмень; П – пшеница

Урожайность культур по схемам севооборота в среднем представлен в таблице 4.13.

Таблица 4.13

Севооборотные культуры	Вид продукции	Урожайность культур по схемам			
		2:8	2:4:1:3	1:4:1:4	1:2:7
Люцерна+ячмень	Сено	76,0	74,5	—	74,5
	Зерно	32,0	31,6	—	31,6
	Солома	32,0	31,6	—	31,6
Люцерна (2 года)	Сено	157,0	152,0	—	152,0
Лгоцерна+пшеница	Сено	75,2	74,5	—	74,5
	Зерно	32,0	30,0	-	30,2
	Солома	32,0	30,2	—	30,2
Люцерна (2 года)	Сено	157,0	152,0	—	152,0
Кукуруза	Зерно	—	90,0	93,0	90,0
	Силос	—	492,8	492,8	492,8
Кукуруз а+корнепло-ды	Зерно	—	87,5	87,5	87,5
	Силос	-	482,2	482,2	482,2
	Зел.корм	—	490,0	490,0	490,0
	Свекла	—	411,0	411,0	411,0
Кукуруз а+люцерна	Зел.корм	—	390,0	390,0	390,0
Хлопчатник	Хлопок	35,8	37,0	35,0	37,15

При выбранном размещении культур по полям севооборота объем производства хлопка составит 32,5 тыс ц,сено люцерны - 11,3 тыс ц, зерно кукурузы - 10,2 тыс ц. Урожайности культур, при которых достигается такой объем производства, приведены в таблице 2. Как показывают данные табл. 4.12, на 10 полях по указанным схемам высеваются кормовые культуры в сочетании с зерновыми, на остальных 30 полях - хлопчатник. Так, по схеме 1:2:7 хлопчатник в первый год ротации высевается на I, III IV, VI-IX полях. Такое размещение культур по полям севооборота позволяет по всем схемам перейти к организации чередования культур на перспективу. Результаты статической задачи (номера полей и их размеры) служат исходной информацией и отправной точкой для решения задачи размещения и чередования культур на весь период ротации. Такая задача решается с применением линейно-динамической модели.

Статическая модель может быть разработана на основе транспортной задачи линейного программирования. Однако при этом невозможно учитывать различные варианты высева культур на том или ином поле с условием выполнения планов заготовок. В работе [176] описана модель размещения хлопчатника и кормовых культур по полям севооборота с учетом их перспективного чередования. Модель задачи позволяет в статике определить размещение культур по полям севооборота без учета потенциальной урожайности. полей. В работе [176] автор отмечает: "... для каждого периода ротации составляет отдельная матрица задачи, которая решается самостоятельно". Как известно, при таком подходе нарушается зависимость чередования хлопчатника от предшественников и возникает многократное решение одной и той же задачи. При этом сопоставление результатов одного года ротации с другим несколько затруднительно и нарушается комплексность расчета.

Применение новых подходов на основе эволюционных методов для оптимизации нечетких баз правил позволит значительно снизить время формирования решения и повысить достоверность его принятия в интеллектуальных системах.

Решена задача оптимизации размещения и чередования культур в хлопковом севообороте на основе использования генетического алгоритма с искусственным отбором и создана программное обеспечение для решения данной поставленной задачи на основе использования генетического алгоритма с искусственным отбором. Сложившееся состояние землепользования и размещение объектов позволяют внести некоторую корректировку в систему введения севооборотов (исходя из оптимальных их схем) и организовать территории полей севооборотов.

4.6. Построение модели нечеткого логического вывода на основе использования генетического алгоритма с искусственном отбором

В работе рассматриваются проблемы, связанные с обработкой неполной, неточной и недостоверной информации в системах искусственного интеллекта. Применение новых подходов на основе эволюционных методов для оптимизации нечетких баз правил позволит значительно снизить время формирования решения и повысить достоверность его принятия в интеллектуальных системах. Решена задача создания модели нечеткого логического вывода на основе использования генетического алгоритма с искусственным отбором и создана программное обеспечение для решения данной поставленной задачи на основе использования генетического алгоритма с искусственным отбором.

Объединяя введенную модификацию комплекса-метода с Холландовской генетической процедурой, приходим к алгоритму, реализующему идею искусственного отбора, состоящую в данном случае в том, что из популяции не только удаляются наихудшие особи, но и одновременно создаются их «антиподы», обладающие улучшенными свойствами [41-47].

На основе предлагаемого алгоритма лежит синтез обычного эволюционного генетического подхода с идеями адаптационной оптимизации [48] и, прежде всего, последовательного комплекс-метода отыскания экстремума функций многих переменных [48-50]. При этом в каждый момент времени текущая популяция отождествляется с популяцией - комплексом точек в пространстве поиска, а кроме традиционных генетических операторов мутации, скрещивания и селекции дополнительно вводятся операторы комплекса-поиска такие, как выбор, отражение, растяжение и сжатие. При этом в отличие от традиционного комплекс-метода предлагается отражать не одну наихудшую вершину комплекса, а целое множество наихудших особей популяции.

Пусть задана выборка нечетких экспериментальных данных (X_r, y_r), $r = \overline{1, M}$; здесь $X_r = (x_{r1}, x_{r2}, ..., x_{rn})$- входной n-мерный вектор и $y_r = (y_1, y_2, ..., y_M)$- соответствующий ему выходной вектор.

В общем виде требуется построить модель, основанную на нечетких правилах вывода:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j}\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i = a_{i,jp} - \text{с весом}\, w_{jp}\right) \to y_j = b_{m0} + b_{m1}x_1^j + \ldots + b_{mn}x_n^j.$$

В процессе построения модели нужно найти такие значения коэффициентов правил

$$B = (b_{ij}), i = \overline{1,m},\; j = \overline{0,n}$$

при, которых достигается минимум следующего выражения:

$$\sum_{r=1}^{M}\left(y_r - y_r^f\right) \to \min\ , \tag{4.90}$$

где y_r^f - результат нечетких правил вывода с параметром B в r-й строке выборки (X_r).

Входной матрице X_r соответствует следующий результат нечеткого вывода:

$$y_r^f = \frac{\sum_{i=1}^{m}\mu_{d_i}(X_r)\cdot d_i}{\sum_{i=1}^{m}\mu_{d_i}(X_r)}; \tag{4.91}$$

здесь $d_i = b_{i0} + b_{i1}x_{r1} + b_{i2}x_{r2} + \ldots + b_{in}x_{rn}$ - выход i-правила; $\mu_{d_i}(X_r)$ - функция принадлежности, соответствующая каждой экспериментальной информации:

$$\mu_{d_j}(X_r) = \mu_{i1}(x_{r1})\cdot\mu_{i1}(x_{r2})\cdot\mu_{i1}(x_{r3})\cdot\ldots\cdot\mu_{i1}(x_{rn})\vee$$
$$\vee\,\mu_{i2}(x_{r1})\cdot\mu_{i2}(x_{r2})\cdot\mu_{i2}(x_{r3})\cdot\ldots\cdot\mu_{i2}(x_{rn})\vee$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vee\,\mu_{im}(x_{r1})\cdot\mu_{im}(x_{r2})\cdot\mu_{im}(x_{r3})\cdot\ldots\cdot\mu_{im}(x_{rn}),$$

$$\beta_{ir} = \frac{\mu_{d_i}(X_r)\cdot d_i}{\sum_{i=}^{m}\mu_{d_i}(X_r)}.$$

Тогда (4.91) перепишем в следующем виде:

$$y_r^f = \sum_{i=1}^{m}\beta_{ir}d_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\beta_{ir}\cdot b_{i0} + \beta_{ir}\cdot b_{i1}\cdot x_{r1} + \beta_{ir}\cdot b_{i2}\cdot x_{r2} + \ldots + \beta_{ir}\cdot b_{in}\cdot x_{rn}\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$Y^f = \left(y_1^f, y_2^f, \ldots, y_M^f\right)^T,$$
$$Y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_M\right)^T,$$

.

Тогда задачу (4.90) перепишем в следующем матричном виде: найти такой решение, чтобы выполнялось условие

$$E = (Y - Y^f)^T\cdot(Y - Y^f) \to \min\ . \tag{4.92}$$

Для решения задачи (4.92) используем генетический алгоритм с искусственным отбором[43].

В общем случае процедура оптимизации на основе обычного последовательного комплекса-метода выглядит следующим образом: требуется отыскать минимум некоторой функции

$$E(x)=\sum_{r=1}^{M}\left(y_r-y_r^f\right)^2\to\min$$

достаточно общего вида, при этом о характере этой функции не делается практически никаких априорных предложений. Работа алгоритма начинается с формирования начального комплекса

$$x_i(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_N(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}(0) & x_{12}(0) & \dots & x_{1n}(0)\\ x_{21}(0) & x_{22}(0) & \dots & x_{2n}(0)\\ \vdots & & & \\ x_{N1}(0) & x_{N2}(0) & \dots & x_{Nn}(0)\end{pmatrix}\qquad i=\overline{1,N}\geq n+1$$

представляющего собой популяцию хромосом, достаточно произвольно расположенных в n-мерном пространстве поиска. С начало выполняется операции селекции, затем скрещивания и мутация. От этого получается новая популяция хромосом $x_i(1)$.

После этого производится операция выбора. На этом этапе вычисляется значение функции во всех хромосом и находится средняя годность популяции

$$E_{сред}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(x_i(k)\right).$$

Затем хромосомы с годностью меньше средней по всей популяции заменяется на «наилучшей» хромосому.

Если $E_{сред}<E(x_i(k))$ то будет $x_i(k+1)=x_i(k)$, который дает $\min\limits_{i=1,N}\left(E(x_i(k))\right)$.

Среди множества этих хромосом находится «наихудшая» $x_i(1)$, в которой значение функции $E(x_H(1))$ максимально, после чего эта точка отражается через центр тяжести всех остальных вершин-точек, формируя новый комплекс $x_i(1), i=\overline{1,N}$. Такое отражение вместе с растяжением и сжатием обеспечивают движение комплекса к экстремуму функции $E(x)$, при этом, благодаря достаточно случайному распределению хромосом в популяции, поиск имеет глобальный характер.

С формальной точки зрения рассмотрим процесс оптимизации на k-й итерации поиска, когда сформирован комплекс $x_i(k), i=1,2,\dots,N$. Среди множества $x_i(k)$ находится «наихудшая» такая, что

$$E(x_H(k)) = \min_i \{E(x_1(k)),\dots,E(x_H(k))\},$$

после чего определяется центр тяжести популяции без наихудшей точки:

$$x_{cj}(k) = (x_{1j}(k) + x_{2j}(k) + \dots + x_{Nj}(k) - x_{Hj}(k))/(N-1) \qquad j = \overline{1,n}$$

Далее $x_H(k)$ отражается через центр тяжести $x_c(k)$, формируя новую вершину комплекса $x_R(k)$, которая теоретически расположена ближе к экстремуму, чем $x_H(k)$ и $x_c(k)$, т.е.

$$E(x_R(R)) < E(x_c(k)) < E(x_H(k)).$$

Операция отражения формально имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_R(k) &= x_c(k) + \eta_R(x_c(k) - x_H(k)) = \\ &= \frac{1}{N-1}x_1(k) + \dots + \frac{1}{N-1}x_{N-1}(k) + \frac{\eta_R}{N-1}x_1(k) + \dots \\ &+ \frac{\eta_R}{N-1}x_{N-1}(k) - \eta_R x_H(k) = X(k)R, \end{aligned}$$

где η_R - параметр шага отражения, часто полагаемый равным единице, $X(k) = (x_H(k), x_1(k), \dots, x_{N-1}(k))$ - $(n \times N)$-матрица координат вершин комплекса, $R = \left(-\eta_R, \frac{1+\eta_R}{N-1}, \dots, \frac{1+\eta_R}{N-1}\right)^T$ – $(N \times 1)$-вектор.

В случае, если отражения вершина $x_R(k)$окажется «наилучшей» среди всех остальных популяции хромосом, т.е.

$$E(x_R(k)) < E(x_i(k)) < E(x_H(k)), \qquad i = 1,2,\dots,N-1,$$

производится операция растяжения комплекса в направлении от центра тяжести $x_C(k)$ до $x_R(k)$ согласно выражению

$$x_E(k) = x_C(k) + \eta_E(x_R(k) - x_C(k)) = X(k)E,$$

где η_E – параметр шага растяжения, часто полагаемый равным двум,

$$E = \left(-\eta_E, \eta_R, \frac{1-\eta_E(1-\eta_R)}{N-1}, \dots, \frac{1-\eta_E(1-\eta_R)}{N-1}\right)^T.$$

Если же $x_R(k)$ окажется наихудшей среди всех $x_i(k)$, комплекс сжимается согласно соотношению

$$x_S(k) = x_C(k) + \eta_S(x_R(k) - x_C(k)) = X(k)S,$$

где η_S – параметр шага сжатия, обычно полагаемый равным 0,5,

$$S = \left(-\eta_S, \eta_R, \frac{1-\eta_S(1-\eta_R)}{N-1}, \dots, \frac{1-\eta(1-\eta)}{N-1}\right)^T.$$

Таким образом, в процессе своего движения к экстремуму оптимизируемой функции комплекс на каждой итерации теряет одну наихудшую вершину и приобретает одну новую точку так, что на $(k+1)$-й итерации новый комплекс также имеет N точек-вершин.

В отличие от комплекса-метода, в генетических алгоритмах в результате селекции из популяции одновременно исключаются несколько особей с наихудшими (максимальными) значениями функции приспособленности. Таким образом, комплекс-метод приобретает черты генетического алгоритма, у которого в результате селекции на каждой итерации из популяции удаляется несколько наихудших особей.

В системе земледелия республики Узбекистан особое место принадлежит хлопковому севообороту. Роль хлопкового севооборота неоценима в развитии хлопководства, повышении его урожайности и борьбе с вилтом, о чем свидетельствует многолетний опыт хлопководческих хозяйств

Постановку задачи и экономико-математическую модель выбора оптимальной схемы хлопковых севооборотов можно сформулировать следующим образом [45-46].

Пусть по S-му хлопководческому хозяйству известны l - почвенные разности ($l=1,2,...,L$) и K - рекомендуемые схемы севооборотов ($K=1,2,...,K$) для l-почвы, A_l- площадь l-й почвенной разности. При $K>1$для массива l -й почвой возникает многовариантная задача по выбору для него схемы хлопкового севооборота с учетом сочетания кормовых культур. При этом должны быть соблюдены некоторые исходные условия:

ограниченность земли, трудовых затрат и ресурсов производства;

необходимость соблюдения баланса производства и использования кормов;

поголовье скота должно определяться с учетом возможного объема производства кормов из кормового клина хозяйства;

выбираемая схема и сочетание кормовых культур (тип) должны обеспечить наибольший выход хлопка и других продуктов и повышение экономической эффективности сельскохозяйственного производства хозяйства.

Изложенная постановка позволяет произвести математическую формализацию условий задачи. Модель разрабатывается на основе общей задачи линейного программирования [81-90].

Математическая модель задачи

Требуется найти экстремум линейной функции

$$F(x)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J_0}c_{lj}^{k}x_{lj}^{k}+\sum_{j\in J}\sum_{l=1}^{L}c_{lj}y_{lj}+\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=J_0+1}^{J_1}c_j^t z_j^t \to \max$$

при выполнении следующих условий (ограничений):

площадь севооборотных массивов с K-й схемой не должна превышать площади земель l-й почвой:

$$\sum_{k=1}^{k}\sum_{j\in J} x_{lj}^{k} \le A_l; \quad l=\overline{1,L},$$

площадь посева j -й культуры в севооборотных массивах должна иметь размеры предусмотренные схемой севооборота:

$$x_{lj}^{k} - \alpha_j^k x_l^k = 0,$$

площади повторных посевов в севообороте определяются соотношением

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J_0} x_{lj}^{k} - \sum_{j\in J} y_{lj} \ge 0 \quad l=\overline{1,L},$$

поголовье скота или птиц определяется соотношениями

$$z_j \le B_j; \quad j=J_0+1,\dots,J_1; \quad -\sum_{t=1}^{T} z_j^T + \beta^{\upsilon}\cdot z_j \ge 0; \quad \beta_j^{\upsilon} < 1;$$

площадь пастбищ и сенокосов, используемых на кормовые цели, не должна превышать искомой

$$\bar{x}^1 \le A^1; \quad x^z \le A^z,$$

объем производства хлопка и других видов товарной продукции растениеводства и животноводства не должен быть меньше установленного сверху

a) $\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} u_{lj}^{k} x_{lj}^{k} + \sum_{l=1}^{L} u_{lj}^{0} y_{lj} \ge Q_j; \quad j=1,2,\dots,J_0$;

b) $\sum_{t=1}^{T} u_j^t z_j^t \ge Q_j;\ j=J_0+1,\dots,J_1$

если $Q_j = 0$, то решение само определяет объем производства;

между производством (включая покупные) и использованием кормов для откармливания скота и птиц должен соблюдаться баланс:

$$\sum_{j=1}^{J_0}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} v_{lj}^{ik} x_{lj}^{k} + \sum_{j=1}^{J_0}\sum_{l=1}^{L} v_{lj}^{i} y_{lj} + \sum_{\lambda=1}^{z} \bar{v}^{\lambda}\bar{x}^{\lambda} - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=J_0+1}^{J_1} q_j^{it} z_j \ge D_i,$$

$i=\overline{1,m}$, где i- номер вида корма; используемый объем трудовых ресурсов не должен превышать их наличия, в наиболее напряженные периоды года предусматривается привлечение их со стороны:

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J_0}\sum_{l=1}^{L} h_{lj} x_{lj}^{k} + \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J_0} h_{lj}^{0} y_{lj} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=J_0+1}^{J_1} h_j^t z_j^t + \bar{h}\bar{x}^1 - W \le T^*,$$

Значение переменных не должно быть отрицательными

$$\left(\{x_{lj}^k\},\{x_l^k\},\{y_{lj}\},\{z_j\},\{z_j^t\},\{\bar{x}^1\},\{\bar{x}^2\}\right) \ge 0.$$

Принятые обозначения в модели:

$l=1,2,...,L$ - номера видов почвенных разностей; $j=1,2,...,J_0$ - номера видов товарных культур; $j=J_0+1,...,J_1$ - номера видов скота и птиц; $k=1,2,...,K$ - номера схем севооборота; $i=1,2,...,m$ - номера видов кормов или питательных веществ; $t=1,2,...,T$ -уровень продуктивности скота и птиц;

x_{lj}^k - площадь посева j-й культуры на землях с l-й почвенной разностью при K-й схеме севооборота;

x_l^k - площадь севооборота с K-й схемой, размещаемого на землях *с* l *-й* почвенной разностью;

y_{lj} - площадь повторного посева j -й культуры на землях с l -й почвенной разностью; z_j - общее поголовье j-го вида скота или птицы;

z_j^t - поголовье j -го вида скота или птицы с уровнем продуктивности t; $\bar{x}^1$ - искомаяплощадь сенокосов;

$\bar{x}^2$ - искомая площадь пастбищ;

c_{lj}^k -стоимость валовой продукции с 1 га j *-й* культуры, возделываемой на l-й почвенной разности при K-й схеме севооборота;

c_j^t -стоимость валовой продукции, получаемой от I головы скота или птицы j -го вида при уровне продуктивности t;

u_{lj}^k - урожайность j-й культуры на l-й почвенной разности при K-й схеме севооборота;

u_{lj}^0 - урожайность j-й культуры на зешшх с l-й почвенной разностью при повторном посеве;

u_j^t - продуктивность j-го вида скота **ЕЛИ** птицы уровня t;

$\bar{v}^1$ - урожайность сена с I га сенокоса;

$\bar{v}^2$ - урожайность зеленой массы с I га пастбища;

v_{lj}^{ik}, v_{lj}^k -выход кормов i-го вида (или питательных веществ i-говида) с I га посева j-й культуры на почвах l-й почвенной разности при K-й схеме севооборота или при повторном посеве;

q_j^{it} потребность одной структурной головы скота j-го вида в i-м корме или питательном веществе при уровне продуктивности t;

h_{lj} и h^0_{lj} - нормативы затрат труда в расчете на I га j-й культуры, возделываемой на l-й почвенной разности соответственно при первичном и повторном посевах;

$\overline{h}$ - затраты труда на I га сенокоса;

h^t_j - затраты труда на I га голову скота j-го вида при уровне продуктивности t;

W - количество привлекаемых трудовых ресурсов;

T^* - наличие трудовых ресурсов;

D_i - объем покупных кормов; β^v_j - доля v-й полувозрастной группы скота в общем поголовье j-го вида скота;

B_j - количество голов скота ш птиц j-го вида, обозначающее верхнюю границу роста данного поголовья;

A^l - площадь земель с l-й почвенной разностью;

A^1-наличие площади сенокосов;

A^2 - наличие площади пастбищ;

Q_j -объем необходимого выпуска продукции j-го вида.

Основным источником информации по земельным ресурсам служит агропочвенная карта, по которой устанавливаются тип и размеры земли. Схемы типа севооборотов берутся из научно-обоснованных рекомендаций.

Для решения задачи оптимизации используем генетический алгоритм с искусственным отбором [3].

Работа такого алгоритма образована последовательностью следующих шагов:

- создание начальной популяции, образованной $P(0)$ особями хромосомами – вершинами комплекса;
- операция скрещивание с увеличением популяции $P_{CR}(0) > P(0)$;
- операция мутации $P_M(0) > P_{CR}(0)$;
- первая селекция (определение наихудших особей) без сокращения популяции $P_{SEL1}(0) = P_M(0)$;
- операция выбора заменяем значения наилучшему во всей популяции;
- операция отражения с удалением P наихудших особей $P_M(0) < P_{SEL1}(0)$;

- операция растяжения без увеличения популяции $P_E(0) = P_R(0)$;
- операция сжатия без увеличения популяции $P_I(0) = P_E(0)$;

вторая селекция с удалением $P_W(0)$ наихудших особей $P_{SEL2}(0) = P_I(0) - P_W(0) = P(1)$ и формирование популяции $P(1)$следующей итерации алгоритма.

Результаты решения задачи по первому варианту показали, что наиболее эффективным для условий хозяйств области является 10- польный хлопковый севооборот со схемами 1:2:7; 2:4:1:3; 1:4:1:4; 2:8. При этом в структуре посевов хозяйств удельный вес хлопчатника будет колебаться в пределах 70-80%. В соответствии с решением, *16%* площади орошаемой пашни хлопководческих хозяйств области должны быть заняты севооборотом со схемами 1:2:7 и 2:4:1:3. На остальной части (около *80%* или около 170,0 тыс га) должен быть размещен хлопковый севооборот со схемами 2:8 и 1:4:1:4. Лишь 4$ земли или 8,5 тыс. га должны быть заняты другими севооборотами со схемами 2:4:1:3, 2:6:1:3 и 2:4.

Анализ выполнения данного условия после решения задачи показал возможность увеличения продуктивности коров от 2000 до 2200 кг при сохранении существующей структуры стада. Соответственно возрастет производство зерна и других культур, что ведет к повышению объема реализации

Заключение

Таким образом, показана целесообразность объединения метода нечеткого вывода и генетических алгоритмов в задачах с неопределенной или лингвистической информацией, а также в задачах, для которых характерны интуитивные решения. Предложенный метод позволяет существенно улучшить качество решения многокритериальных задач оптимизации с нечетко заданными параметрами и критериями. В дальнейшем планируется изучение различных гибридных методов применительно к оптимизационным задачам, а также методов автоматического формирования базы нечетких правил, что позволит перенести процесс автоматизации на новый уровень.

Список использованной литературы

1. Алиев Р.А., Либерзон М.И. Методы и алгоритмы координации в промышленных системах управления. М: Радио и связь,1987.-208с.

2. Алиев Р.А., Абдикеев Н.М., Шахназаров М.М. Производственные системы с искусственным интеллектом.- М: Радио и связь. 1990. - 264 с

3. Алиев Р.А., Церковный А.Е., Мамедова Г.А. Управление производством при нечеткой исходной информации. – М:Энергеатомиздат, 1991. –240с.

4. Алиев Р.А. Интеллектуальные роботы с нечеткими базами знаний, Радио и связь, 1995, -176с.

5. Алиев Р.А., Алиев Р.Р. Теория интеллектуальных систем и ее применение. - Баку, Изд-во Чашыоглы, 2001. – 720 С.

6. Абрамович Ф.П., Вагенкнехт М.А., Хургин Я.И. Решение нечетких систем линейных алгебраических уравнений LR-типа.-В сб.: Методы и системы принятия решений.Рига:РПИ,1987,с.35-47.

7. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.

8. Алтунин А.Е.,Востров Н.Н. Методы определения функций принадлежности в теории размытых множеств. Труды ЗапсибНИГНИ, Тюмень, вып. 154, 1980, с.62-72.

9. Алтунин А.Е., Востров Н.Н. Оптимизация многоуровневых иерархических систем на основе теории размытых множеств и методов самоорганизации. В сб.: "Проблемы нефти и газа Тюмени", Тюмень, вып. 42, 1979, с.68-72.

10. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2000. - 352 с.

11. Алексеев А.В. Проблемы разработки математического обеспечения выполнения нечетких алгоритмов. - В сб.: Модели выбора альтернатив в нечеткой среде.-Рига, 1984, с. 79-82.

12. Алексеев А.В. Применение нечеткой математики в задачах принятия решений. - В сб.: Методы и системы принятия решений. - Рига: РПИ, 1983, с. 38-42.

13. Аленфельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления М: Мир, 1987, 360с.

14. Архангельский В.И., Богаенко И.Н., Грабовский Г.Г., Рюмшин Н.А. Системы фуцци-управления. – К.: Тэхника, 1997. – 208 с.

15. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях - В сб.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М: Мир, 1976, с.172-215.

16. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.

17. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели принятия решений: дедукция, индукция, аналогия. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. - 110 с.

18. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. и др. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений.- М: Радио и связь. 1989. - 304 с.

19. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования.- Рига:Зинатне, 1990.- 184 с.

20. Борисов А.Н. и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. - Рига: Зинатне, 1982. - 256с.

21. Бокша В.В., Силов В.Б. Нечеткое целевое управление системами с заданным конечным состоянием. Автоматика, N 3, 1985, с.3-8.

22. Бочарников В.П. Fuzzy-Технология: математические основы практика моделирования в экономике. Санкт-Петербург, 2001, 328 с.

23. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике.- М: Радио и связь. 1990. - 288 с..

24. Дюбуа Д., Прад А. К анализу и синтезу нечетких отображений. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. - М: Радио и связь, 1986, с.229-240.

25. Дубенко Т.И. Идентификация и оценивание параметров в стохастических системах, описываемых уравнениями с частными производными. Автоматика и телемеханика, N 12, 1983, с.5-19.

26. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976, 165 с.

27. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений.- В кн.: Математика сегодня.- М.:Знание, 1974, с. 5-49.

28. Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе. - В сб.: Классификация и кластер. М: Мир, 1980, с.208-247.

29. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М: Наука, 1981, 203с.

30. Поспелов Д.А. Логико-лингвистические модели в системах управления.- М.:Энергоиздат, 1981.- 232 с.

31. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.

32. Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004.

33. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. // Fuzzy sets and systems. – Vol.90. – 1997. - № 2.

34. Bezdek J. C. On the relationship between neural networks, pattern recognition and intelligence. Int. J. Approximate Reasoning, 6, 1992. – p. 85 - 107.

35. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования. – М.: Физматлит, 2003.

36. Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.

37. Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. – М.: Мир, 1966.

38. Koza J.R. Genetic Programming. – Cambridge/MA: MIT Press, 1992.

39. Баранцев Р.Г. Синергетика в современном естествознании. –М.: Эдиториал УРСС, 2003.

40. Fanabashi M., Maeda A., Morooka Y., Mori K. Fuzzy and Neural Hybrid Systems: Synergetic AI // IEEE Expert. 1995 August. – p. 32 – 40.

41. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004.

42. Herrera F., Lozano M. Adaptation of genetic algorithm parameters based on fuzzy logic controllers. In: F. Herrera, J. L.

Verdegay (eds.) Genetic Algorithms and Soft Computing, Physica-Verlag, Heidelberg, 1996. - pp. 95-124.

43. Herrera F., Herrera-Viedma E., Lozano M., Verdegay J.L. Fuzzy tools to improve genetic algorithms. // In Proc. Of the European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, 1994. – p. 1532 – 1539.

44. Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L. The use of fuzzy connectives to design real-coded genetic algorithms. Mathware and Soft Computing, 1, 1995. – p. 239 - 251.

45. Herrera F., Lozano M., Verdegay J.-L. Tackling real-coded genetic algorithms: Operators and tools for behavioural analysis. Artificial Intelligence Review 12(4), 1998. – p. 265 – 319.

46. Herrera F., Lozano M., Moraga C. Hybrid Distributed Real-Coded Genetic Algorithms. // Parallel Problem Solving from Nature -- PPSN V, 1998.

47. Голубин А.В., Тарасов В.Б. Нечеткие генетические алгоритмы. // Международные научно-технические конференции AIS'05 и CAD-2005. Труды конференций. – М.: Физматлит, 2005. – с. 39 – 45.

48. Kalyanmoy D., Dhiraj J., Ashish A. Real-Coded Evolutionary Algorithms with Parent-Centric Recombination. Indian Institute of Technology, Kanpur. KanGAL Report No 2001003.

49. Lozano M., Herrera F., Krasnogor N., Molina D. Real-Coded Memetic Algorithms with Crossover Hill-Climbing. Evolutionary Computation 12(3), 2004. – p. 273 – 302.

50. Herrera F., Lozano M., Sanchez A.M. A Taxonomy for the Crossover Operator for Real-Coded Genetic Algorithms: An Experimental Study. // International Journal of Intelligent Systems, vol. 18, 2003. – p. 309 – 338.

51. Herrera F., Lozano M., Verdegay J.-L. Tackling fuzzy genetic algorithms. In Winter G., Periax J., Galan M., Guesta P. (eds) Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science. J. Wiley and Sons, 1995. – p. 167 – 189.

52. Herrera F., Lozano M. Fuzzy Genetic Algorithms: Issues and Models. // Technical Report DECSAI-98116, Dept. of Computer Science and AI, University of Granada, June 1998.

53. Herrera F., Lozano M. Fuzzy Adaptive Genetic Algorithms: design, taxonomy, and future directions. // Soft Computing 7(2003), Springer-Verlag, 2003. – p. 545 – 562.

54. Galantucci L.M., Percoco G., Spina R. Assembly and Disassembly Planning by using Fuzzy Logic & Genetic Algorithms. // International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 1, № 2, 2004. – p. 67 – 74.
55. Fayad C., Petrovic S. A Genetic Algorithm for the Real-World Fuzzy Job Shop Scheduling. School of Computer Science and Information Technology University of Nottingham, http://www.cs.nott.ac.uk/~cxf,~sxp
56. Hongbo Liu, Zhanguo Xu, Ajith Abraham. Hybrid Fuzzy-Genetic Algorithm Approach for Crew Grouping.
57. Гладков Л.А. Алгоритм выделения ядер в нечетких графах на основе моделирования эволюции. IX национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ’2004. Труды конференции. – М.: Физматлит, 2004. с. 346 - 355.
58. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие графы и гиперграфы. – М.: Научный мир, 2005.
59. Herrera F., Lozano M., Moraga C. Hierarchical Distributed Genetic Algorithms. // Parallel Problem Solving from Nature. // International Journal of of Intelligent Systems, vol. 14, 1999. – p. 1099 – 1121.
60. Шикин, Е. В. Математические методы и модели в управлении : учеб. пособие / Е. В. Шишкин, А. Г. Чхартишвили ; Академия народного хозяйства при правительстве Российской Федерации. — М. : Дело, 2009. — 440 с.
61. Smarandache F (1998) Neutrosophy: neutrosophic probability, set, and logic. American Research Press, Rehoboth p-157.
62. Wang H, Smarandache F, Zhang YQ, Sunderraman R (2005) Interval neutrosophic sets and logic: Theory and applications in computing. Hexis, Phoenix p-100.
63. Jun Ye. Exponential operations and aggregation operators of interval neutrosophic sets and their decision-making methods SpringerPlus (2016) 5:1488 DOI 10.1186/s40064-016-3143-z p 1-18.
64. Guo Y, Sengur A, Ye J (2014) A novel image thresholding algorithm based on neutrosophic similarity score. Measurement 58: 175–186.
65. Ye J (2014a) Single valued neutrosophic minimum spanning tree and its clustering method. J Intell Syst 23(3):311–324.

66. Wang H, Smarandache F, Zhang YQ, Sunderraman R (2010) Single valued neutrosophic sets. Multispace Multistructure 4:410–413.

67. Zhang HY, Wang JQ, Chen XH (2014) Interval neutrosophic sets and their application in multicriteria decision making problems. Sci World J 2014:15. doi:10.1155/2014/645953 p 1-16.

68. Liu PD, Wang YM (2016) Interval neutrosophic prioritized OWA operator and its application to multiple attribute decision making. J Syst Sci Complex 29(3):681–697.

69. Liu PD, Wang YM (2016) Interval neutrosophic prioritized OWA operator and its application to multiple attribute decision making. J Syst Sci Complex 29(3):681–697.

70. Liu PD, Chu YC, Li YW, Chen YB (2014) Some generalized neutrosophic number Hamacher aggregation operators and their application to group decision making. J Intell Fuzzy Syst 16(2):242–255.

71. Ye J (2015b) Single valued neutrosophic similarity measures based on cotangent function and their application in the fault diagnosis of steam turbine. Soft Comput. doi:10.1007/s00500-015-1818-y p 817-825.

72. Zhao AW, Du JG, Guan HJ (2015) Interval valued neutrosophic sets and multi-attribute decision-making based on generalized weighted aggregation operator. J Intell Fuzzy Syst 29(6):2697–2706.

73. Liu PD, Li HG (2015) Multiple attribute decision making method based on some normal neutrosophic Bonferroni mean operators. Neural Comput Appl. doi:10.1007/s00521-015-2048-z p 379-389.

74. Liu PD, Teng F (2015) Multiple attribute decision making method based on normal neutrosophic generalized weighted power averaging operator. Int J Mach Learn Cybern. doi:10.1007/s13042-015-0385-y p 1-22.

75. Liu PD, Tang GL (2016) Some power generalized aggregation operators based on the interval neutrosophic numbers and their application to decision making. J Intell Fuzzy Syst 30:2517–2528.

76. Gou XJ, Xu ZS, Liao HC (2015b) Exponential operations of interval-valued intuitionistic fuzzy numbers. Int J Mach Learn Cybern. doi:10.1007/s13042-015-0434 p 1-15.

77. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2000. - 352 с.

78. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М: Наука, 1981, 203с.

79. Бекмуратов Т.Ф. Систематизация интеллектуальных систем поддержки принятия решений. // Узб. журнал “Проблемы информатики и энергетики”. 2003. №4. С. 25-35.

80. Мухамедиева Д.Т. Задачи нечеткого параметрического программирования в случае зависимости от многих параметров коэффициентов целевой функции // Вопросы вычислительной и прикладной математики. –Ташкент. 2004. Вып. 114. С.81-87.

81. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Физматлит, 2010. — 560 с.

82. Заварыкин, В. М. Численные методы : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / В. М. Заварыкин, В. Г. Житомирский, М. П. Лапчик. — М. : Просвещение, 1990. — 176 с.

83. Информатика : учеб. пособие для пед. спец. высш. учеб. Заведений / А. Р. Есаян [и др.]. — М. : Просвещение, 1991. — 288 с.

84. Карманов, В. Г. Математическое программирование : учеб. Пособие В. Г. Карманов. — М. : Физматлит, 2004. — 264 с.

85. Карпелевич, Ф. И . Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский. — М. : Наука, 1967. —312 с.

86. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра : учеб. для вузов / А. И. Кострикин. — М. : Физ.-мат. литература, 2009. — 368 с.

87. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : учеб. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — М. : Дело, 2008. — 688 с.

88. Курс высшей математики для экономистов : учеб. / под ред. В. И. Ермакова. — М. : Инфра-М, 2001. — 656 с.

89. Леонтьев, В. Экономические эссе. Теория, исследования, факты и политика: пер. с анг. / В. Леонтьев. — М. : Изд. полит. литературы, 1990. — 415 с.

90. Солодовников, А. С. Математика в экономике : в 2 ч. Ч. 1 : учеб. / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М. : Финансы и статистика, 2001. — 224 с.

91. Aggarwal S ., Gupta C., Algorithm for Solving Intuitionistic Fuzzy Transportation Problem with Generalized Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Number via New Ranking Method, Available from: export.arxiv.org, 01/2014; Source: arXiv, (2014).

92. Angelov P.P., Optimization in an intuitionistic fuzzy environment.Fuzzy Sets and Systems 86, (1997) 299- 306,

93. Antony R. J. P., Savarimuthu. S.J, Pathinathan T., Method for Solving the Transportation Problem Using Triangular Intuitionistic Fuzzy Number, International Journal of Computing Algorithm, Volume: 03, February 2014, (2014)Pages: 590-605,.

94. Atanassov. K, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets Syst. 20 , (1986),87–96

95. Atanassov, K., & Gargov, G.. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 31, (1989) 343–349.

96. Atanassov ,K.. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets Syst. 64 (1994) 159- 174.

97. Bit A.K., Biswal M.P., Alam,S.S. Fuzzy Programming approach to multicriteria decision making transportation problem , Fuzzy Sets and Systems 50, (1992) 135-141,.

98. Bit A.K., Biswal M.P., Alam S.S., An additive fuzzyprogramming model for multi-objective transportation problem, Fuzzy Sets and Systems 57, (1993) 313-319,.

99. Chanas S., Kuchta D.,A concept of the optimal solution of the transportation problem with fuzzy cost coefficients ,Fuzzy Sets and Systems 82, (1996) 299-305,.

100. Chanas S., Kuchta D., Fuzzy integer transportation problem, Fuzzy Sets and Systems 98, (1998) 291-298.

101. Chanas S. ,Kolodziejczyk W., Machaj A., A fuzzy approach to the transportation problem, Fuzzy Sets and Systems 13, (1984)211-221.

102. Das S.K., Goswami A. , Alam S.S. ,Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters, European Journal of Operational Research, Volume 117, Issue 1, 16 August(1999)Pages 100-112.

103. Gani A.N., Abbas S., A new method for solving intuitionistic fuzzy transportation problem Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 28, (2013) 1357 – 1365.

104. Hitchcock F.L,The distribution of a product from several sources to numerous localities, Journal of Mathematics and Physics.20, (1941)224-230.

105. Hussain R.J ., Kumar P.S., Algorithmic approach for solving intuitionistic fuzzy transportation problem Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 80, (2012)3981 – 3989.

106. Kaur Dalbinder, Mukherjee Sathi, Basu Kajla,Multiobjective Multi-index real life transportation problem with crisp objective function and interval valued supply and destination parameters, Proceedings of International Conference on Mathematical and Computational Models, (ICMCM' 2011), Dec 19-21, 2011, Computational and Mathematical Modeling, Page: 284-291, PSG College of Technology, Coimbatore, ISBN 978-81-8487-1647, (2011).

107. Kaur Dalbinder, Mukherjee Sathi, Basu Kajla Multiobjective multi-index real life transportation problem with interval valued parameters, Proceedings of the National Seminar on Recent Advances in Mathematics and its Applications in Engineering Sciences (RAMAES 2012), March 16-17, 2012, Bengal College of Engineering and Technology, Durgapur, Page 29- 36, ISBN 978-93-5067-395-9, (2012).

108. Kaur Dalbinder, Mukherjee Sathi, Basu Kajla,Goal programming approach to multi-index real life transportation problem with crisp objective function and interval valued supply and destination parameters, Proceedings of International Conference on Optimization, Computing and Business Analytics, (ICOCBA 2012), December 20-22, 2012, Pg 30-36, ISBN 978-81-8424-8142, (2012).

109. Kaur Dalbinder, Mukherjee Sathi, Basu Kajla, Solution of a Multi-index Real Life Transportation Problem by Fuzzy Non-linear Goal Programming, Proceedings to RAMA-2013, Feb 14-16, ISM,Dhanbad, pg 148-158, 2013, ISBN 978-81-8424-821-0, (2013) .

110. Kaur Dalbinder, Mukherjee Sathi, Basu Kajla, Solution of a Multi-objective and Multi-index Real Life Transportation Problem using different Fuzzy membership functions, Journal of Optimization Theory and Applications, February 2015, Volume 164, Issue 2, (2015)pp 666-678

111. Li Lushu, Lai K.K., A fuzzy approach to the multiobjective transportation problem Computers & Operations Research, Volume 27, Issue 1, January (2000)Pages 43-57

112. Smarandache, F.. A unifying field in logics. Neutrosophy: Neutrosophic probability, set and logic. Rehoboth: American Research Press. (1999)

113. Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y. Q. & Sunderraman, R. Single valued neutrosophic sets. Multispace and Multistructure, 4, (2010). 410–413.

114. Zadeh L.A., Fuzzy sets, Inform. Control 8 , (1965)338–353,.

115. Zimmermann H.J., Description and optimization of fuzzy systems Int.J.General Systems 2, (1976)209-215,.

116. Zimmermann H.J, Fuzzy Linear Programming with several objective functions, Fuzzy Sets andSystems,1, (1978) 46-55.

117. Кнопов П. С., Марьянович Т. П. О некоторых актуальных проблемах оценки риска сложных систем в условиях недостаточной информации // Кибернетика и системный анализ. – 2003. - № 4. – С. 125-137.

118. Сергиенко И. В., Яненко В. М., Атоев К. Л. Общая концепция управления риском экологических, техногенных и социогенных катастроф // Кибернетика и системный анализ. – 1997. - № 2. – С. 65-87.

119. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. СПб: Сезам. 2002. - 181 с.

120. Lee, C. C. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller – Part 1 // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1990, vol. 20, nr 2, s. 419-435.

121. Vapnik V.N. Statistical learning theory. - New York: Wiley, 1998. - 736 p.

122. Devroyc L.,Gyorfi L., Lugosi G . A probabilistic theory of pattern recognition.- New York: Springer, 1996. - 634 p.

123. Stone C. Consistent nonparametric regression // Ann. Statistics. - 1977. - 5. - P. 595-645.

124. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. Статистические проблемы обучения. - М.: Наука, 1974. - 416 с.

125. Вапник В.Н Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. - М.: Наука, 1979. - 448 с.

126. Айзерман М. А., Браверман Э. М. Розоноэр Л. И. Метод потенциальных функций теории обучения машин – М.: Наука, 1970- 384 с.

127. Schoelkopf B., SmolaA.J. Learning with kernels. Support vector machines, regularization, optimization, and beyond. - Cambridge (MA): MIT Press, 2002. - 626 p.

128. Steinwart I., Christmann A . Support vector machines. - New York: Springer, 2008. - 602 p.

129. Boucheron S., Bousquet O., Lugosi G . Theory of classification. A survey of some recent advances // ESAIM: Probability and Statistics. - 2005. - 9. - P. 323-375.

130. Шлезингер М., Главач В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. - Киев: Наук, думка, 2004. - 536 с.

131. Gyorfi L., Kohler M., Krzyzak A., Walk H. A distribution free theory of nonparametric regression. - New York, Berlin; Heidelberg: Springer, 2002. - 647 p.

132. Гупал А. М., Пашко С. В., Сергиенко И. В. Эффективность байесовской процедуры классификации объектов // Кибернетика и системный анализ. - 1995. - № 4. - С 76-89.

133. Сергиенко И. В., Гупал А. М. Оптимальные процедуры распознавания и их применение // Там же. - 2007. - № 6. - С. 41-54.

134. Гупал А.М., Сергиенко И. В . Оптимальные процедуры распознавания. - Киев: Наук, думка, 2008. - 232 с.

135. Poggio T., Smale S. The mathematics of learning: Dealing with data // Notices Amer. Math. Soc. - 2003. - 50, N 5. - P. 537-544.

136. Koenker R., Bassett G. W. Regression quantiles//Econometrica. - 1978.- 46. -P. 33-50.

137. Koenker R. Quantile regression. - Cambridge; New York: Cambridge Univ. Press, 2005. - 366 p.

138. Ермольев Ю.М., Ястремский А. И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. - М.: Наука, 1979 - 254 с.

139. Ermoliev Y. M., Leonardi G. Some proposals for stochastic facility location models // Math. Modelling. - 1982. - 3. - P. 407 - 420.

140. Ruszczynski A., Shapiro A. (Eds.) Stochastic programming// Handbooks in OR & MS. - Amsterdam: Elsevicr, 2003. - 10. - 682 p.

141. Cucker F., Smale S. On the mathematical foundations of learning // Bull Amer. Math. Soc. - 2001. - 89, N1. - P. 1-49.

142. Ароншайн Н. Теория воспроизводящих ядер // Математика (Период, сб. перевод, иностр. статей). - М.: Изд-во иностр. лит., 1963. - 7, № 2. - С. 67-130.

143. Berlinet A., Thomas-Agnan C. Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics. - Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2004. - 355 p.

144. Тихонов А. Н., Арсении В.Я. Методы решения некорректных задач. - Изд. 3-е, испр. - М.: Наука, 1986. - 288 с.

145. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

146. Wahba G. Spline models for observational data // CBMS-NSF Reg. Conf. Series in Applied Mathematics. - Philadelphia (PA): SIAM, 1990. - 59. - 169 p.

147. Keyzer MA. Rule-based and support vector (SV-) regression/classification algorithms for joint processing of census, map, survey and district data: (Working Paper) / Centre for World Food Studies. - WP-05-01. - Amsterdam, 2005. - 88 p. (http://www.sow.vu.nl/pdf/wp05.01.pdf)

148. RockafellarR.T., Wets R ,J . -B . Variational analysis. - Berlin: Springer, 1998- 733 p.

149. Bousquet O., ElisseeffA. Stability and generalization // Mach. Learn Res. - 2002. - 2. - P. 499-526.

150. Smale S ., Zhou D.X. Shannon sampling II: Connections to learning theory // Appl. Comput. Harmon. Anal. - 2005. - 19, N 3. - P. 285-302.

151. De Vito E., Caponnetto A., Rosasco L. Model selection for regularized least-squares algorithm in learning theory // Found. Comput. Math. - 2005. - 5, N1. - P. 59-85.

152. Norkin V. 1., Keyzer M.A. On convergence of kernel learning estimators // Proc. of 20 th EURO Mini Conf. «Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies» (EUROPT-2008) /L. Sakala-uskas, O.W. Weber and E.K. Zavadskas (Eds). - Vilnius: Inst. of Math, and Inform., 2008. - P. 306-310.

153. Норкин В.И., Кайзер М. А. Об асимптотической эффективности ядерного метода опорных векторов (SVM) // Кибернетика и системный анализ. - 2009. - № 4. - С. 81-97.

154. Норкин. В.И. Об измерении и профилировании катастрофических рисков. ISSN 0023-1274. Кибернетика и системный анализ, 2006, № 6.

155. Yu. M. Ermoliev, T. Yu. Ermolieva. Catastrophic risk management: flood and seismic risks case studies // Applications of

stochastic programming / S.W. Wallace and W.T.Ziemba, Eds. – Philadelphia: MPS-SIAM, 2005. – P. 425-444.

156. Михалевич В.С., Кнопов П.С., Голодников А. Н. Математические модели и методы оценки риска на экологически опасных производствах // Кибернетика и системный анализ. – 1994. - № 2. – С. 121-138.

157. Juraev Z Sh, Muhamediyeva D T and Sotvoldiev D M 2020 IOP Conf. Journal of Physics: Conf. Series 1546(1)012083

158. Muhamediyeva D., Sotvoldiyev D., Mirzaraxmedova S., Fozilova M. Approaches to handwriting recognition // International Conference on Information Science and Communications Technologies, ICISCT 2020, 2020, 9351505. 4-6 november. DOI: 10.1109/ICISCT50599.2020.9351505

159. Farmonov SH.R, Bekmuratov T.F, Muhamedieva D.T. About the dodges plans of the continuous selective control // International Conference on Information Science and Communications Technologies, ICISCT 2020, 2020, 9351415. 4-6 november. DOI: 10.1109/ICISCT50599.2020.9351415

160. Mirzayan K., Dilnoz M., Barno S. (2021) The Problem of Classifying and Managing Risk Situations in Poorly Formed Processes. // In: Aliev R.A., Yusupbekov N.R., Kacprzyk J., Pedrycz W., Sadikoglu F.M. (eds) 11th World Conference “Intelligent System for Industrial Automation” (WCIS-2020). WCIS 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1323. Springer, Cham. Pp 280-286. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6_36

161. Швецов В.И. Математическое моделирование загрузки транспортных сетей / В.И. Швецов, А.С. Алиев. – М.: URSS, 2003. 64 с.

162. Киселев А.Б., Кокорева А.В., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н. Математическое моделирование движения двухполосного автотранспортного потока, регулируемого светофором / А.Б. Киселев, А.В. Кокорева [и др.] // Вестник Моск.ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. – 2006. – № 4. – С. 35–40.

163. Математическое моделирование автотранспортных потоков на регулируемых дорогах / А.Б. Киселев, А.В. Кокорева [и др.] // Прикл. матем. и механ.(ПММ). – 2004. – Т. 68. – Вып. 6. – С. 1047–1054.

164. Lohse D. Grundlagen der Straßenverkehrstechnik und der Verkehrsplanung, Band 2: Verkehrsplanung, 2. Aufgabe, Berlin, Verlag für Bauwesen GMbH, 1997. 326 с.

165. Якимов М.Р. Общий алгоритм работы четырехшаговой транспортной модели // Вестник Иркутского государственного технического университета. –2011. – № 1 (48). С. 132–138.

166. Ortuzar J.D., Willumsen L.G. Modeling Transport. John Wiley & Sons Ltd,2001. 594 p.

167. Bellman R, Zadeh L.A. (1970), 'Decision making in a fuzzy environment', Management science, vol. 17, pp. 141 - 164

168. Roseline, S. S., &Amirtharaj, E. H. (2013). A new ranking of intuitionistic fuzzy numbers with distance method based on the circumcenter of centroids. International Journal of Applied Mathematics&Statistical Sciences (IJAMSS), 2(4), 37-44.

169. Mukhamedieva D T 2020 Journal of Physics: Conference Series1546(1) 012091

170. Muxamediyeva D K 2019 IOP Conf.Journal of Physics: Conf. Series 1210.

171. Романов, В.Н. Влияние приемов основной обработки почвы в севообороте на динамику влажности и агрофизические свойства чернозема выщелоченного / В.Н. Романов, В.К. Ивченко, И.О. Ильченко, М.В. Луганцева. // Достижения науки и техники АПК. – 2018. – № 5. – С. 32-34.

172. Ниязалиев, Б.И. Влияние органо-минеральных компостов на продуктивность хлопчатника. / Б.И. Ниязалиев // Аграрная наука. – 2016. – № 2. – С. 5-6.

173. Hulugalle, N. R. Soil properties under cotton-corn rotations in australian cotton farms / N. R. Hulugalle, , B. McCorkell, V. F. Heimoana, L. A. Finlay // Journal of Cotton Science. – 2016. – Vol. 20. – Is. 4. – P. 294-298.

174. Naqvi R. Z., Transcriptomics reveals multiple resistance mechanisms against cotton leaf curl disease in a naturally immune cotton species, Gossypium arboreum / R. Z. Naqvi, S. S. E. A. Zaidi, K. P. Akhtar, et al. // Scientific reports. – 2017. – Vol. 7. – Art. Number 15880.

175. Kazemeini, S. A. Effect of nitrogen and wheat residue on cotton (Gossypium hirsutum L.) yield and weed control / S. A. Kazemeini, R. Moradi Talebbeigi, M. Valizade // Archives of Agronomy and Soil Science. – 2016. – Vol. 62. – Is. 3. – P. 395-412.

176. Locke, M. A. Conservation management improves runoff water quality: Implications for environmental sustainability in a glyphosate-resistant cotton production system / M. A. Locke, L. J. Krutz, Steinriede R.W., S. Testa // Soil Science Society of America Journal. – 2015. – Vol. 79. – Is. 2. – P. 660-671.

177. Zhang, D. M. Lint yield and nitrogen use efficiency of field-grown cotton vary with soil salinity and nitrogen application rate / D. M. Zhang, W. J. Li, C. S. Xin et al. // Field crops research. – 2012. – Vol. 138. – P. 63-70.

178. Lofton, J. Utilization of poultry litter, tillage, and cover crops for cotton production on highly degraded soils in northeast Louisiana / J. Lofton, B. Haggard, D. Fromme, B. Tubana // Journal of Cotton Science. – 2014. – Vol. 18. – Is. 3. – P. 376-384.

179. Pettigrew, W. T. Growth and agronomic performance of cotton when grown in rotation with soybean / W. T. Pettigrew, H. A. Bruns, K. N. Reddy // Journal of Cotton Science. – 2016. – Vol. 20. – Is. 4. – P. 299-308.

180. Zhang H. Root Development of Transplanted Cotton and Simulation of Soil Water Movement under Different Irrigation Methods / H. Zhang, H. Liu, C Sun et al. // Water. – 2017. – Vol. 9. – Is. 7. – Art. Number 503.

181. Yang, G.Z., Tang, H.Y., Nie Y.C. Responses of cotton growth, yield, and biomass to nitrogen split application ratio / G. Z. Yang, H. Y. Tang, Y. C. Nie // European journal of agronomy. 2011. Vol. 35. Is. 3. P. 164-170.