

ГИДРОДИНАМИКА

- **Гидродинамика** (от гидро- и динамика), раздел гидравлики, в котором изучаются движение несжимаемых жидкостей и взаимодействие их с твёрдыми телами.
- **Кинематика** жидкости обычно в гидравлике рассматривается совместно с динамикой и отличается от нее изучением видов и кинематических характеристик движения жидкости без учета сил, под действием которых происходит движение, тогда как динамика жидкости изучает законы движения жидкости в зависимости от приложенных к ней сил.

- **Гидродинамическое давление (p)** – это внутреннее давление развивающееся при движении жидкости.
- **Скорость движения жидкости в данной точке (u)** – это скорость перемещения находящейся в данной точке частицы жидкости, определяемая длиной пути l , пройденного этой частицей за единицу времени t .

- Существует два способа изучения движения жидкости - Лагранжа и Л. Эйлера.
- **Способ Лагранжа** заключается в рассмотрении движения каждой частицы жидкости, т. е. *траектории их движения*. В начальный момент времени положение частицы определено начальными координатами ее полюса x_0, y_0, z_0 . При движении частица перемещается и ее координаты изменяются, Движение жидкости определено, если для каждой частицы можно указать координаты x, y и z как функции начального положения (x_0, y_0, z_0) и времени t :
 - $x=x(x_0, y_0, z_0, t)$;
 - $y=y(x_0, y_0, z_0, t)$;
 - $z=z(x_0, y_0, z_0, t)$.
- Переменные x_0, y_0, z_0 и t называют **переменными Лагранжа**.

- **Способ Эйлера** заключается в рассмотрении движения жидкости в различных точках пространства в данный момент времени.
- Метод позволяет определить скорость движения жидкости в любой точке пространства в любой момент времени, т. е. характеризуется построением *поля скоростей* и поэтому широко применяется при изучении движения жидкости.
- В данный момент времени в каждой точке этой области, определяемой координатами x, y, z находится частица жидкости, имеющая некоторую скорость u , которая называется ***мгновенной местной скоростью***.
- Совокупность *мгновенных местных скоростей* представляет векторное поле, называемое ***полем скоростей***.
- *Поле скоростей* может изменяться во времени и по координатам:
 - $u_x = u_x(x, y, z, t)$;
 - $u_y = u_y(x, y, z, t)$;
 - $u_z = u_z(x, y, z, t)$.
- Переменные x, y, z и t называют ***переменными Эйлера***.
- Векторными линиями поля скоростей являются линии тока.

- По характеру изменения поля скоростей во времени движения жидкости делятся на *установившиеся, неуставившиеся и квазистационарное.*
- ***Установившееся движение*** – движение, при котором, в любой точке потока жидкости скорость (и давление) с течением времени не изменяется, т. е. зависят только от координат точки
- $u_x = u_x(x, y, z).$
- ***Неуставившееся движение*** – движение, при котором в любой точке потока жидкости скорость с течением времени изменяется, т. е.
- $u_x = u_x(x, y, z, t).$
- ***Квазистационарное движение*** – движение, при котором изменчивость характеристик движения жидкости в течение выбранного промежутка времени не является существенной, т.е. ее влияние лежит в пределах допустимой точности решения, и его можно рассматривать как установившееся.

- Установившееся движение жидкости подразделяется на **равномерное и неравномерное**.
- **Равномерным** называется установившееся движение, при котором живые сечения вдоль потока не изменяются: в этом случае $w = \bar{v}$, средние скорости по длине потока также не изменяются, т.е.

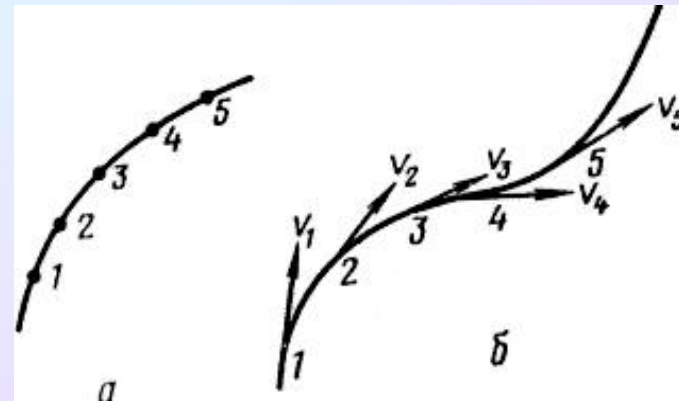
$$v = const$$

- Установившееся движение называется **неравномерным**, когда распределение скоростей в различных поперечных сечениях неодинаково; при этом средняя скорость и площадь поперечного сечения потока могут быть и постоянными вдоль потока.

- Потоки жидкости по своему характеру подразделяются **на *напорные, безнапорные и гидравлические струи.***
- При ***напорном*** движении поток не имеет свободной поверхности, т. е. соприкасается с твердыми стенками со всех сторон.
- При ***безнапорном*** движении поток имеет свободную поверхность, т. е. он соприкасается с твердыми стенками лишь по части периметра.
- В ***гидравлических струях*** поток окружен со всех сторон свободной поверхностью.

Гидравлические характеристики движения жидкости

- **Траектория движения частицы жидкости** – это путь движения отдельной частицы жидкости в пространстве.
- При *установившемся* движении траектория движения частиц жидкости неизменна по времени.
- При *неустановившемся* движении траектория движения частиц непрерывно меняется по времени, т. к. происходит изменение скорости течения по величине и по направлению.
- **Траектория движения** изображает путь, который проходит частица жидкости за некоторый промежуток времени.



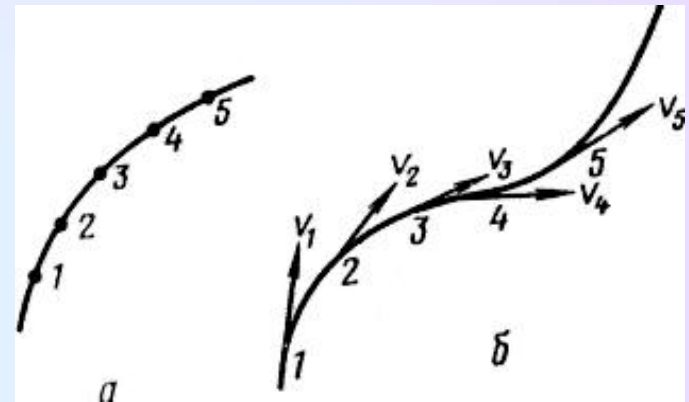
а – траектория движения частиц,
б – линии тока

Гидравлические характеристики движения жидкости

■ **Линия тока** – это линия, проведенная через ряд точек в движущейся жидкости таким образом, что в каждой из этих точек векторы скорости в данный момент времени касательны к ней.

■ **Линия тока** дает некоторую мгновенную характеристику потока, связывает различные частицы жидкости, лежащие на линии тока в данный момент, и показывает направление вектора скорости частиц в этот момент.

■ При установившемся движении жидкости траектория движения частиц жидкости совпадает с линией тока.



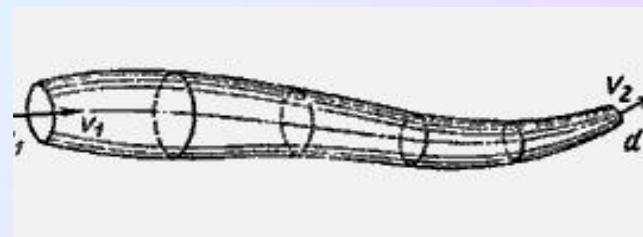
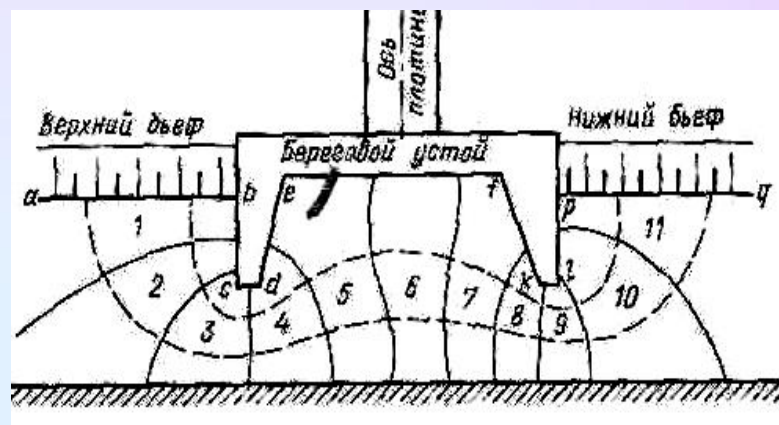
а – траектория движения частиц,
б – линии тока

- **Линии равных напоров** – линии перпендикулярные к линиям тока.

- Проекция линий равных напоров на горизонтальную плоскость представляют собой **карту уровенной поверхности (изогипс, изопьез)**.

- **Гидродинамическая сетка** – система линий равных напоров и перпендикулярных к ним линий тока (рис.)

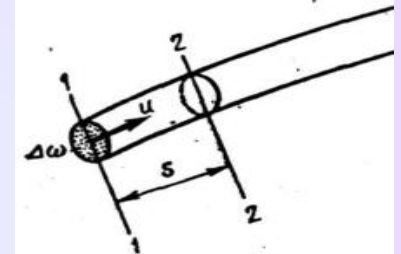
- **Трубка тока** – трубчатая непроницаемая поверхность, которая образуется если в движущейся жидкости взять бесконечно малый замкнутый контур и через все его точки провести линии тока.



■ **Элементарной струйкой** называется часть жидкости, заключенная внутри трубки тока. Элементарная струйка характеризует состояние движения жидкости в данный момент времени t .

■ При установившемся движении элементарная струйка имеет следующие свойства:

- 1. форма и положение элементарной струйки с течением времени остаются неизменными, так как не изменяются линии тока;
- 2. приток жидкости в элементарную струйку и отток из нее через боковую поверхность невозможен, так как по контуру элементарной струйки скорости направлены по касательной;
- 3. скорость и гидродинамическое давление во всех точках поперечного сечения элементарной струйки можно считать одинаковым ввиду малости площади .



■ **Потоком жидкости** называется совокупность движущихся с разными скоростями элементарных струек.

- К гидравлическим характеристикам движения жидкости относятся понятия *живого сечения, смоченного периметра, гидравлического радиуса, расхода жидкости и средней скорости.*

- *Живое сечение* (w) – это поперечное сечение потока, перпендикулярное ко всем линиям тока.

- *Например,* в круглой трубке диаметром d , в которой все поперечное сечение занято жидкостью, живое сечение – это площадь круга

- $$w = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ м}^2.$$

- **Смоченный периметр** – та часть периметра живого сечения, которая соприкасается с твердыми стенками, образуя смоченную поверхность. Например, для русла вся боковая поверхность потока, за исключением свободной поверхности которую жидкость имеет на границе с газообразной средой.
- Для круглой трубы, работающей полным сечением, смоченный периметр равен длине окружности, т. е..

$$\chi = \pi d, \text{ м}$$

- Для круглой незаполненной трубы если угол в радианах,

$$\chi = \pi d \frac{\varphi}{360^\circ},$$

- или если угол φ в градусах

$$\chi = \pi d \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{d\varphi}{2}$$



- *Гидравлический радиус* (R) – отношение площади живого сечения к смоченному периметру. Например, для круглой трубы, работающей полным сечением, гидравлический радиус четверти ее диаметра, т. е.

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$$

- .

- **Расход жидкости** (Q) – это ее объем, протекающий в единицу времени через живое сечение потока. Расход для элементарной струйки

- $dQ=udw,$

- где u – истинная скорость движения частиц жидкости, dw площадь сечения элементарной струйки.

- **Средняя скорость** – отношение расхода к площади живого сечения

- $v=Q/w,$

- откуда

- $Q= wv, \text{ м}^3/\text{с}.$

Уравнение неразрывности движения жидкости

- Возьмем сечение $1-1$ с площадью Δw_1 и скоростью движения частиц жидкости u_1 . Элементарный расход через сечение $1-1$ равен

$$\Delta Q_1 = u_1 \Delta w_1$$

- Затем возьмем сечение $2-2$ в этой же струйке с площадью сечения Δw_2 и скоростью u_2 . Элементарный расход через сечение $2-2$ равен

$$\Delta Q_2 = u_2 \Delta w_2$$

- Но по свойству элементарной струйки приток и отток жидкости через ее боковую поверхность невозможен; на участке $1-2$, который сохраняет неизменные размеры, не образуется пустот и не происходит переуплотнений; значит количества жидкости, протекающей в единицу времени через сечения $1-1$ и $2-2$, должны быть одинаковы, т.е.

- принимая во внимание, что сечения $1-1$ и $2-2$ приняты произвольно, можно в общем случае для элементарной струйки написать

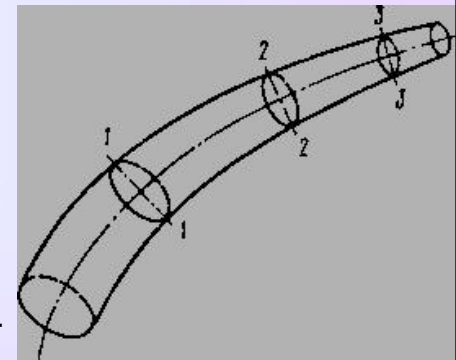
$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \dots = \Delta Q_n = \Delta Q = const$$

- или

$$u_1 \Delta w_1 = u_2 \Delta w_2 = \dots = u_n \Delta w_n = \Delta Q = const$$

- - уравнение неразрывности (сплошности) для элементарной струйки -

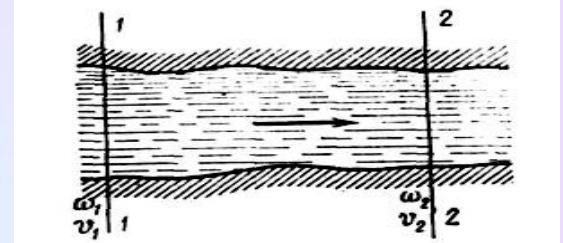
элементарный расход жидкости при установившемся движении есть величина постоянная для всей элементарной струйки.



Уравнение неразрывности при установившемся движении жидкости для потока жидкости. Взяв в потоке два произвольных сечения $1-1$ и $2-2$ и представив живые сечения их состоящими из суммы элементарных струек, можно написать

$$Q_1 = \sum_{w_1} u_1 \Delta w_1 \quad \text{— расход жидкости в сечении } 1-1;$$

$$Q_2 = \sum_{w_2} u_2 \Delta w_2 \quad \text{— расход жидкости в сечении } 2-2.$$



Но поскольку скорости касательны к боковой поверхности потока, то в отсек между сечениями $1-1$ и $2-2$ через боковую поверхность *движения жидкости не происходит*; не изменяется и объем отсека. Следовательно, в участок через сечение $1-1$ поступает столько же жидкости, сколько за то же время выходит. Но так как сечения $1-1$ и $2-2$ взяты произвольно, то можно написать, что

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q = const$$

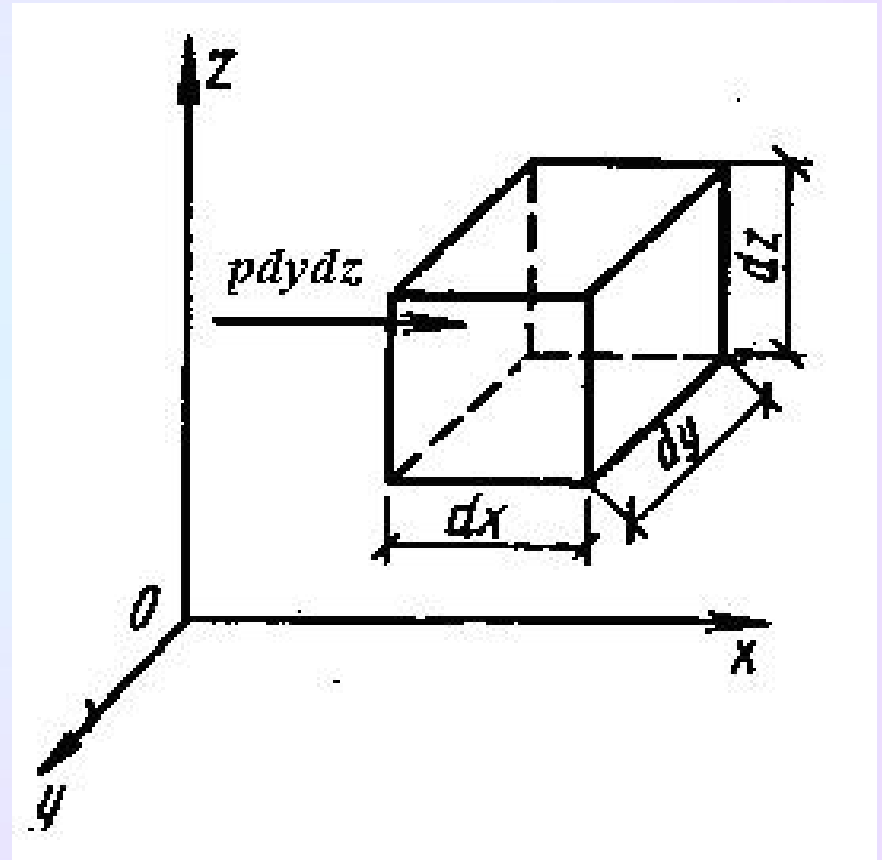
или, выражая расход жидкости в сечениях через среднюю скорость v , получим

$$v_1 w_1 = v_2 w_2 = \dots = v_n w_n = Q = const$$

-уравнение неразрывности для потока жидкости: расход жидкости через любое сечение потока при установившемся движении есть величина постоянная.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

- Уравнение Даниила Бернулли, полученное в 1738 г., является фундаментальным уравнением гидродинамики, дает связь между давлением P , средней скоростью v и пьезометрической высотой z в различных сечениях потока и выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости.



Выделим внутри жидкости бесконечно малую частицу в виде параллелепипеда. Рассмотрим уравнение движения частицы жидкости вдоль оси $O-X$. На эту частицу будут действовать **силы давления**

слева – $pdydz$,

справа – $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$

и массовая сила – $\rho dx dy dz X$.

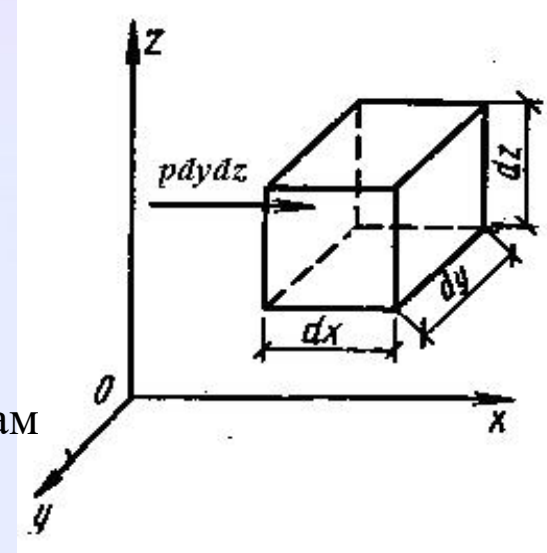
Если к действующим на частицу движущейся жидкости силам добавить силы инерции с обратным знаком, то на основании постулата Даламбера можно рассматривать эту частицу как находящуюся в покое.

Составляющая сил инерции по координатной оси $O-X$ будет равна:

$$\rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}$$

Эта же составляющая, отнесенная к единице массы, т.е. деленная на $\rho dx dy dz$ определяется по оси $O-X$ следующим значением:

$$-1 \quad \frac{du_x}{dt}$$



Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

■ Добавляя к уравнениям равновесия покоящейся жидкости силы инерции, получаем дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости (уравнения Эйлера) в проекциях по направлению осей $O-X$, $O-Y$, $O-Z$:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt} ; \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt} ; \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt} .$$

■ Умножим слагаемые уравнений соответственно на dx , dy , dz и сложим их:

$$\left(Xdx + Ydy + Zdz \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz$$

(Note: In the original image, callouts indicate that the first term is =dΠ and the second term in parentheses is =dp.)

■ Выражение $(Xdx + Ydy + Zdz)$ – это полный дифференциал некоторой функции Π , т. е. $d\Pi = Xdx + Ydy + Zdz$,

■ Считая движение установившимся, $p = f(x, y, z)$ можно записать:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

■ Так как $u_x = \frac{dx}{dt}$, то

$$\frac{du_x}{dt} dx = \frac{du_x}{dt} u_x dt = u_x du_x = d\left(\frac{u_x^2}{2}\right)$$

■ По аналогии с этим

$$\frac{du_y}{dt} dy = d\left(\frac{u_y^2}{2}\right)$$

$$\frac{du_z}{dt} dz = d\left(\frac{u_z^2}{2}\right)$$

■ Подставив полученные выражения в уравнение получим

$$d\Pi - \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{2} d(u^2) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} d(u^2) - d\Pi = 0$$

■ После интегрирования получим

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \Pi = const$$

■ Если движение жидкости происходит только под действием внешней силы тяжести, то $d\Pi = Zdz = -gdz$, откуда $\Pi = -gz$. Подставив это выражение в уравнение, получим

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = const$$

■ Или после деления на g

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = const = H \quad ,$$

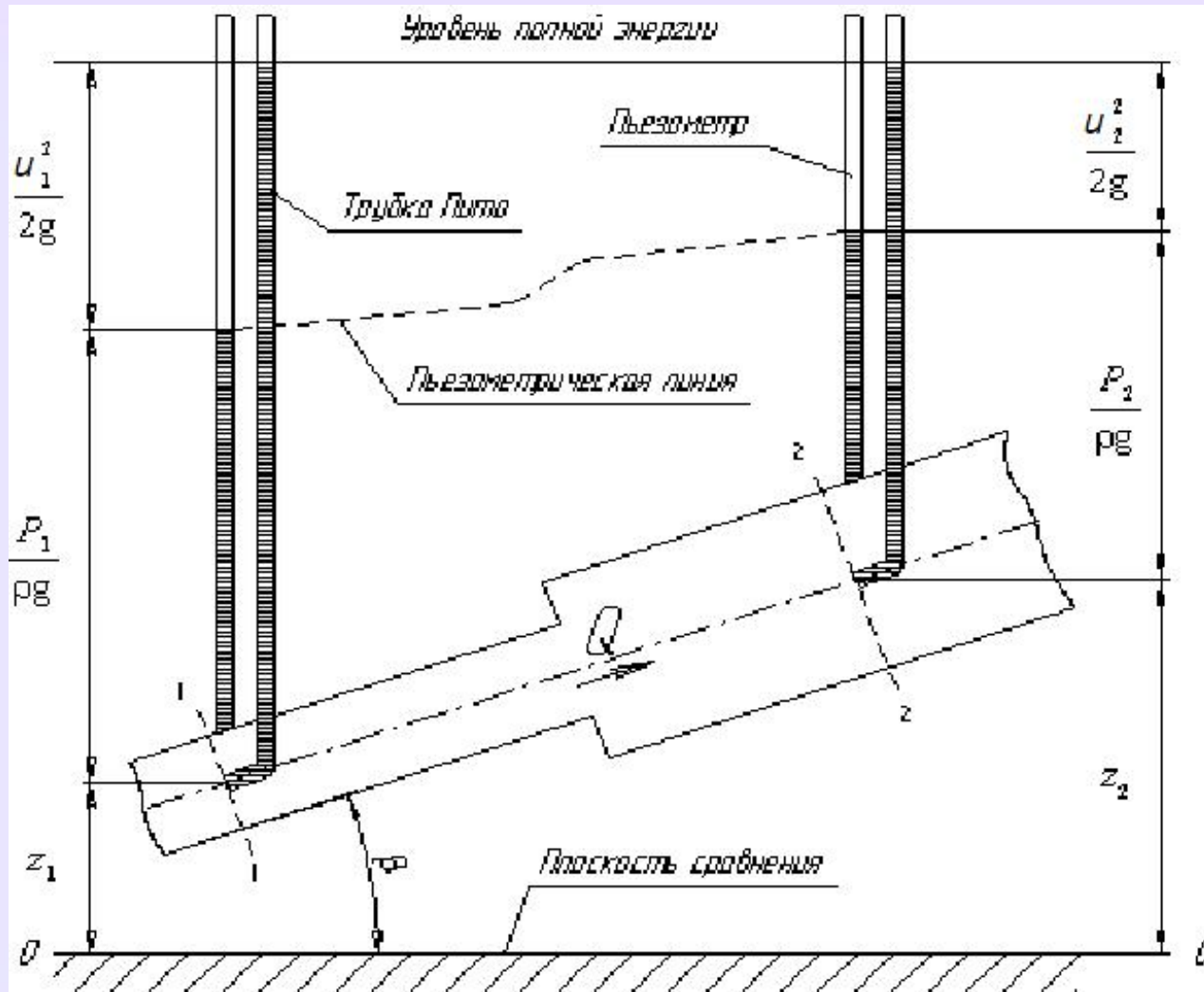
■ где H – гидродинамический напор, м

- Уравнение можно записать для двух сечений элементарной струйки 1-1 и 2-2 в виде равенства гидродинамических напоров в этих сечениях $H_1=H_2$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$$

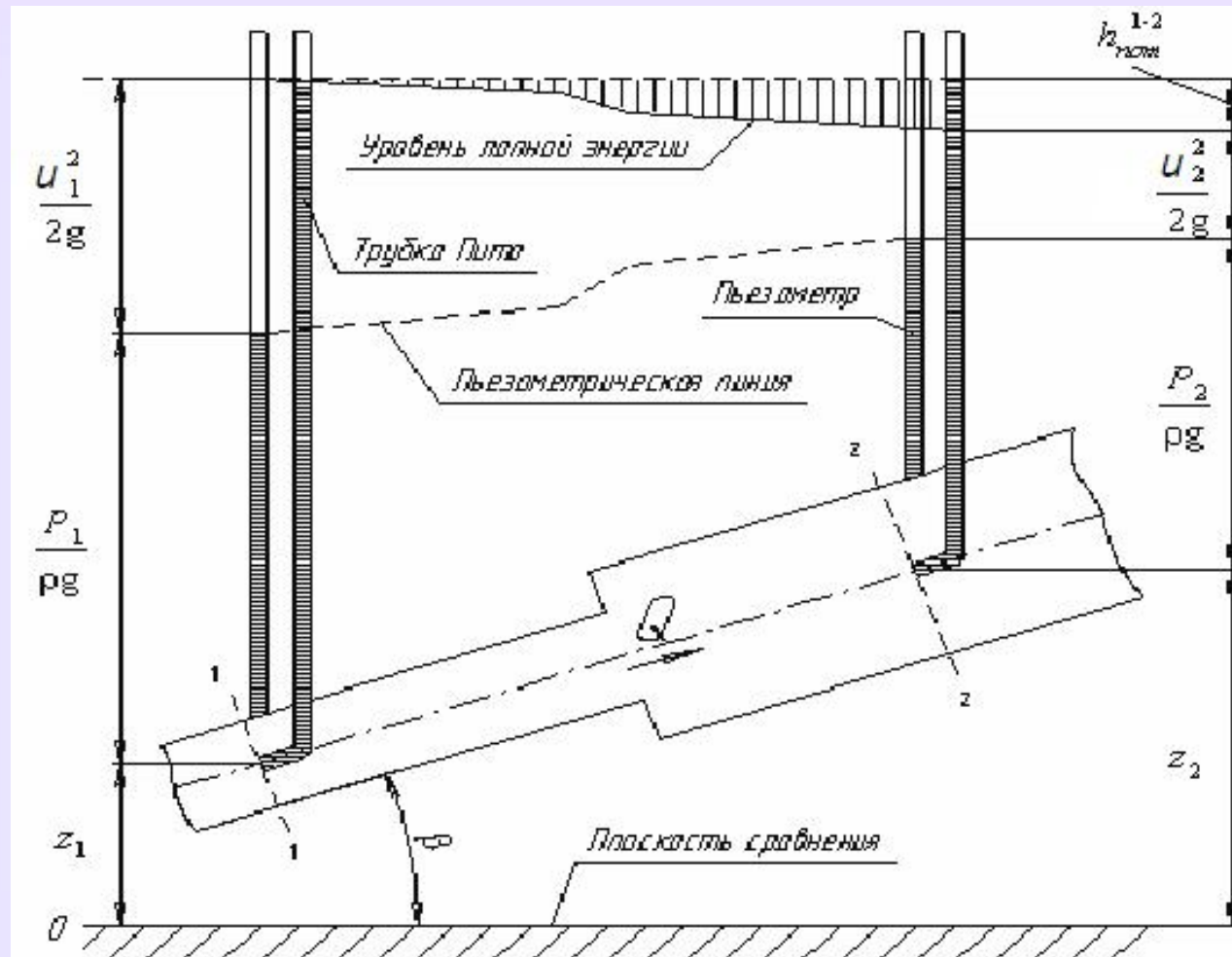
- Выражение называется ***уравнением Бернулли для элементарной струйки невязкой жидкости.***

Схема к выводу уравнения Бернулли для идеальной жидкости



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$$

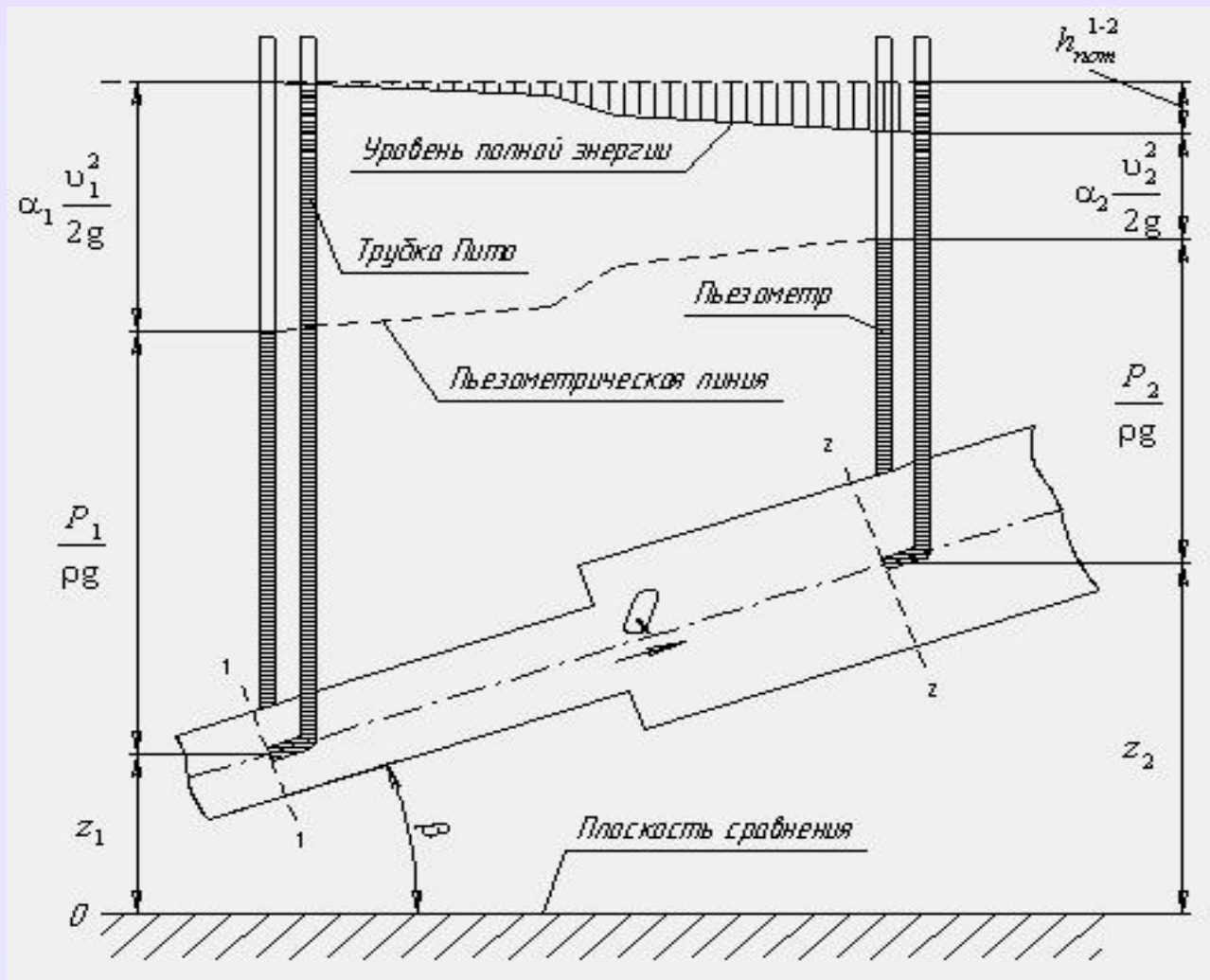
Схема к выводу уравнения Бернулли для реальной жидкости



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w$$

$$h_w = H_1 - H_2$$

Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_w$$

- Для приведения результатов расчетов по средней скорости в соответствие с действительными скоростями, вводится коэффициент **Кориолиса**, характеризующий неравномерное распределение скоростей в живом сечении потока, представляющий собой отношение кинетической энергии, подсчитанной по истинным скоростям сечения, к той же энергии, вычисленной по средней скорости в этом же сечении потока

$$\alpha = \int_w u^3 \frac{dw}{v^3 w} \approx 1 + 3 \int_w (u - v)^2 \frac{dw}{v^2 w}$$

- где u и v – соответственно истинная скорость и средняя местная скорость в любой точке живого сечения w .

Физический смысл и графическая интерпретация уравнения Д. Бернулли

- Уравнение Бернулли можно записать в следующем виде:

$$H_1 = H_2 + h_{w_{1-2}} = H$$

- т. е. **геометрический смысл** уравнения Бернулли заключается в том, что при установившемся движении сумма четырех высот в каждом живом сечении потока есть величина постоянная и равна полной высоте - напору H .

$$z + \frac{\alpha v^2}{(2g)} + \frac{p}{\gamma} + h_w = H$$

- Если соединить уровни жидкости в пьезометрах, то получим пьезометрическую линию. Сумму $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ называют **пьезометрическим (потенциальным) напором**.
- Падение пьезометрической линии на единицу длины потока называют **пьезометрическим уклоном I_p** , который выражают следующей зависимостью:

$$I_p = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)}{l}$$

- где L – длина потока между сечениями 1–1 и 2–2.
- Пьезометрический уклон может быть как положительным, так и отрицательным.
- Если соединить уровни жидкости в скоростных трубках, то получим линию полного напора. Падение линии полного напора на единицу длины называют **гидравлическим уклоном I** и выражают зависимостью:

$$I = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)}{l} = \frac{H_1 - H_2}{l} = \frac{h_w}{l}$$

- **Физический смысл** уравнения Бернулли заключается в том, что с энергетической точки зрения оно представляет тот или иной вид удельной энергии, т. е. энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости.
- Полная удельная энергия потока состоит из **удельной энергии положения z , удельной энергии давления p/γ и удельной кинетической энергии $\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$, которая уменьшается по длине потока в направлении движения из-за преодоления сил трения.**
- Таким образом, уравнение Бернулли представляет собой сумму потенциальной $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ и кинетической $\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ удельных энергий и выражает частный случай общего закона сохранения энергии в природе.

Основное уравнение равномерного движения жидкости

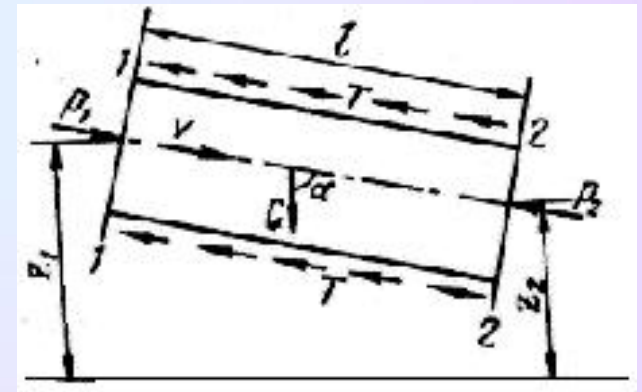
- Рассмотрим часть равномерно движущегося потока (рис.) при допущении одинаковой скорости движения частиц по всему живому сечению. Это допущение упрощает решение поставленной задачи, дает возможность учесть только сопротивления трения потока о стенки трубы или русла и не учитывать сопротивления трения между частицами движущейся жидкости. В данном случае потери напора вызываются лишь гидравлическими сопротивлениями по длине потока, т. е. $h_w = h_l$.
- Запишем уравнение Бернулли для двух сечений 1-1 и 2-2 выделенного из потока участка относительно плоскости сравнения 0-0:

- $$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_l \quad ,$$

- или с учетом равенства скоростей

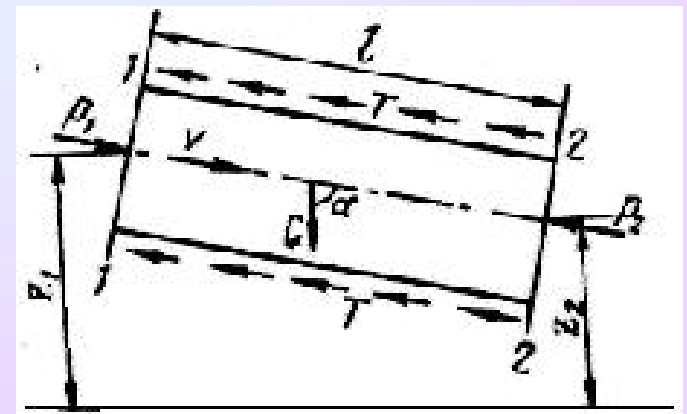
- $$h = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \quad ,$$

- т. е. при равномерном движении потока потери напора по длине равны разности удельных потенциальных энергий.



- Для вычисления этой разности рассмотрим действие внешних сил на выделенную часть потока и составим сумму проекций всех действующих сил на ось потока:
- $P_1 - P_2 - G \sin \alpha - T$
- где P_1 и P_2 – силы давления, соответственно на сечения 1–1 и 2–2 G – сила тяжести выделенной части потока; T – сила трения потока о стенки трубы или русла.
- Подставив значения слагаемых уравнения, получим

$$p_1 w - p_2 w - \gamma w l \left(\frac{z_2 - z_1}{l} \right) - \tau \chi l = 0$$



$$R = \frac{\omega}{\chi}$$

- Разделив полученное уравнение на $\gamma\omega$, будем иметь

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{\tau l}{\gamma R}$$

- Т.к. левая часть уравнения равна h_l , то окончательно получим

- $h_l = \frac{\tau l}{\gamma R}$ или $\frac{\tau}{\gamma} = IR.$

- Это основное **уравнение равномерного движения жидкости**, которое показывает, что напряжение силы трения, отнесенное к единице веса жидкости, равно произведению гидравлического радиуса на гидравлический уклон потока.