Лекция № 1
Основные понятия и определения

1. Общие понятия
2. Интегральные величины электромагнитного поля, применяемые в теории электрических цепей
3. Элементы схем замещения электрических цепей
4. Геометрические элементы схем замещения

Предмет ТОЭ

Предмет ТОЭ изучает количественные и качественные стороны электромагнитных процессов в электрических цепях и электромагнитном поле.

Теория электрических цепей изучает электромагнитные явления в технических системах, предназначенных для производства, передачи и распределения электрической энергии, распространения, преобразования и переработки информации.

В основе курса лежат знания, полученные студентами в различных областях:

- высшей математики – алгебре;
- теории дифференциальных уравнений;
- интегральных преобразованиях Фурье и Лапласа;
- теории численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений.

Электрический ток – это явление направленного движения заряженных частиц под действием электического поля:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

$[i]$ = A

Различают ток проводимости, переноса и смещения.

Напряжение – количество энергии, затраченной на перемещение единичного заряда из одной точки электромагнитного поля в другую:

$$u = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq}$$

$[u]$ = Дж / К$_л$ = В

Потенциал – количество энергии, затраченной на перемещение единичного заряда из бесконечности в какую-либо точку электромагнитного поля. Отсюда напряжение – это разность потенциалов.

Мощность – это скорость изменения энергии во времени:

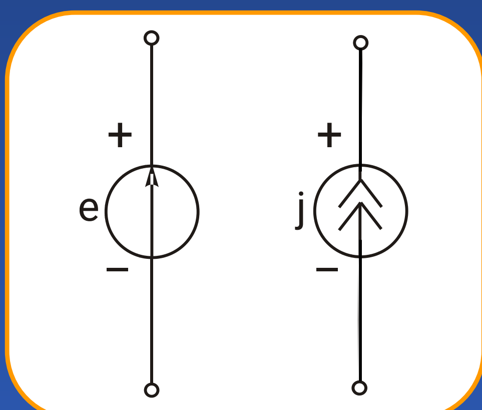
$$p = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt},\qquad p = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i.$$

$[p]$ = ВА

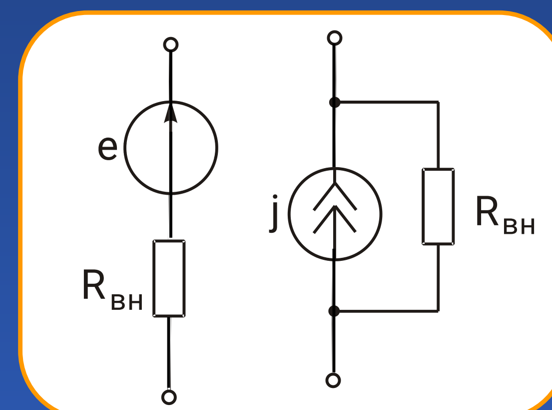
Электрическая цепь – это совокупность генерирующих, приемных и вспомогательных устройств, соединенных между собой электрическими проводами.

Электрическая схема замещения – это графическое изображение электрической цепи идеализированными элементами, которые учитывают явления, происходящие в реальной цепи.

Идеальные источники ЭДС и тока



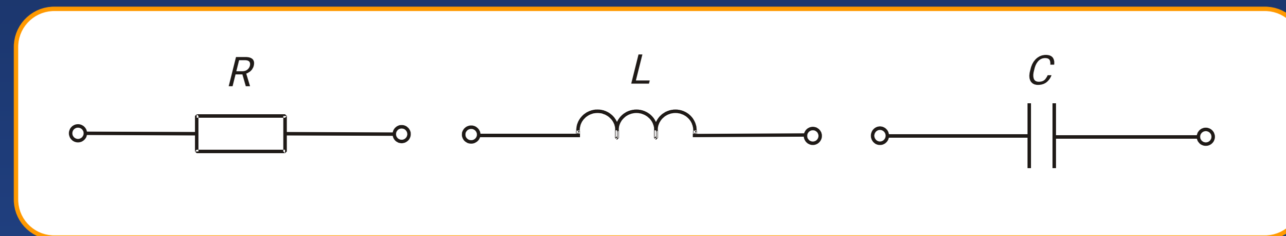
Реальные источники ЭДС и тока



У идеального источника ЭДС сопротивление бесконечно мало. У идеального источника тока сопротивление бесконечно велико. Идеальных устройств в реальной жизни нет. Реальный источник ЭДС обладает небольшим сопротивлением. Реальный источник тока обладает большим, но конечным сопротивлением.

Элементы схем замещения электрических цепей

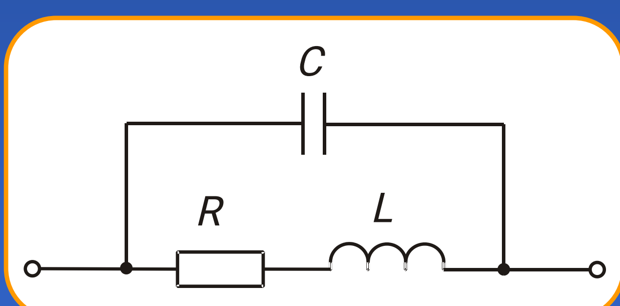
Различают три идеализированных приемных элемента.



Резистивный элемент, или **идеальный резистор,** учитывает преобразование электрической энергии в другие виды энергии. Обладает сопротивлением *R*, которое измеряют в Омах (Ом).

Индуктивный элемент, или **идеальная индуктивная катушка,** учитывает энергию магнитного поля катушки, а также ЭДС самоиндукции. Обладает индуктивностью *L*, которую измеряют в Генри (Гн).

Емкостный элемент, или **идеальный конденсатор,** учитывает энергию электрического поля конденсатора, а также токи смещения. Обладает емкостью *C*, измеряемой в Фарадах (Ф).



Рассмотрим схему замещения реальной индуктивной катушки, которая греется, что учитывает резистивный элемент, в ней наводится ЭДС (индуктивный элемент). Емкостный элемент учитывает энергию электрических полей между витками.

Ветвь – часть электрической схемы, состоящая из одного или нескольких последовательно соединенных источников и приемников энергии, ток в которых один и тот же.

Можно сформулировать короче. Ветвь – участок схемы с одним током.

Ветви могут быть активными, содержащими источники энергии, и пассивными, состоящими из одних приемников.

Узел – это точка в схеме, где сходятся не менее трех ветвей. Тогда ветвь – участок схемы от одного узла до другого узла.

Контур – любой замкнутый по ветвям схемы путь, проходящий по нескольким ветвям так, что ни одна ветвь и ни один узел не встречаются больше одного раза. Схема может быть одноконтурной и многоконтурной.

Параметрами электрических цепей являются: R, L, C и взаимная индуктивность M.

Вопросы для самопроверки

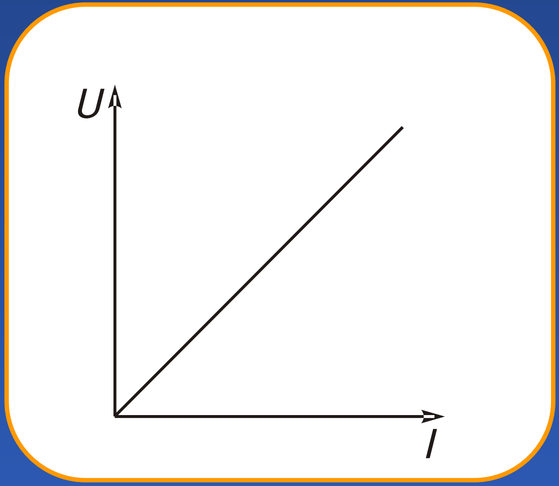
1. Какое явление называется электрическим током?
2. Ток какой величины опасен для жизни?
3. Каково определение напряжения?
4. Что понимают под мощностью?
5. Какие идеальные источники энергии вы знаете?
6. Чем они принципиально отличаются друг от друга?
7. Что учитывают приемные элементы схемы замещения?
8. Что назвали ветвью?
9. Что понимают под контуром схемы замещения?

Лекция № 2. Основные законы линейных электрических цепей постоянного тока

1. Закон Ома
2. Первый закон Кирхгофа
3. Второй закон Кирхгофа
4. Закон Ома для активной цепи
5. Баланс мощностей

Напряжение на резистивном элементе пропорционально току:

$$U = R \cdot I.$$



Геометрической интерпретацией закона Ома является вольт-амперная характеристика (ВАХ). Для линейного элемента она имеет вид прямой линии.

Элементы, имеющие линейную ВАХ, как показано на рисунке, называются линейными, а нелинейную ВАХ - нелинейными элементами.

Первый закон Кирхгофа сформулирован для узла. Узел – это точка в схеме, где сходятся не менее трех ветвей. При использовании ЭВМ для ввода исходных данных узлами выделяют каждый элемент схемы замещения. Эти узлы называют ложными или устранимыми. В дальнейшем речь будет идти о неустранимых узлах.

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0.$$

Правило знаков: токи, одинаково направленные относительно узла, записывают с одинаковыми знаками.

Иногда Первый закон Кирхгофа формулируют: арифметическая сумма подходящих к узлу токов равна арифметической сумме отходящих от узла токов.

Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа относится к контуру. Алгебраическая сумма напряжений на приемниках в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре:

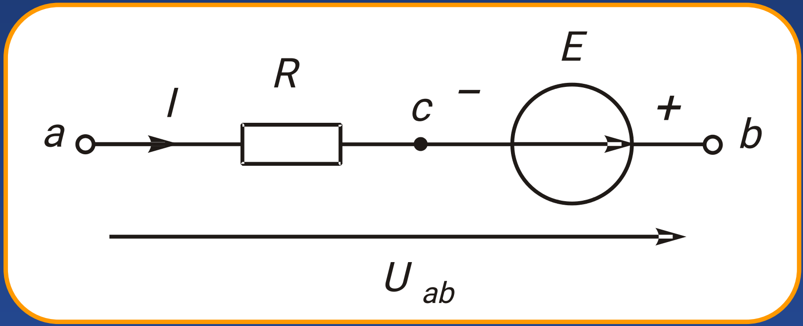
$$\sum_{k=1}^{m} U_k = \sum_{i=1}^{p} E_i .$$

С учетом закона Ома

$$\sum_{k=1}^{m} R_k I_k = \sum_{i=1}^{p} E_i .$$

Правило знаков: со знаком плюс записывают напряжения и ЭДС, направления которых совпадают с выбранным направлением обхода контура.

Активная ветвь, названная так из-за наличия источника ЭДС, изображена на рисунке:



$$V_a = V_b - E + RI,$$

$$V_a - V_b = -E + RI,$$

$$U_{ab} = -E + RI.$$

Можно определить напряжение между двумя любыми точками, рассчитав изменение потенциалов между ними. При этом нужно вести расчет в сторону увеличения потенциала, т. е. от второго индекса напряжения к первому.

Закон Ома для активной ветви, показанной на рисунке записывается:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} = G\,(U_{ab} + E)$$

Здесь G - активная проводимость, [G] = 1 / Ом = См

Баланс мощностей – это интерпретация закона сохранения энергии в электротехнике.

Мощность генераторов энергии в электрической цепи равна мощности потребителей:

$$P_г = P_н,$$

где $P_Г$ - генерируемая мощность, равная

$$P_г = \sum_{i=1}^{n} E_i I_i + \sum_{j=1}^{m} U_j J_j,$$

$P_н$ - потребляемая мощность, равная

$$P_н = \sum_{к=1}^{l} U_к I_к = \sum_{к=1}^{l} R_к I_к^2$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте первый закон Кирхгофа. Назовите правило знаков.
2. Сформулируйте второй закон Кирхгофа. Назовите правило знаков.
3. Какие электрические величины можно вычислить с помощью закона Ома для активной ветви?
4. Для чего используют баланс мощностей?
5. Сформулируйте баланс мощностей.
6. Как определить, в каком режиме работает источник энергии?

Лекция № 3. Методы расчета токов

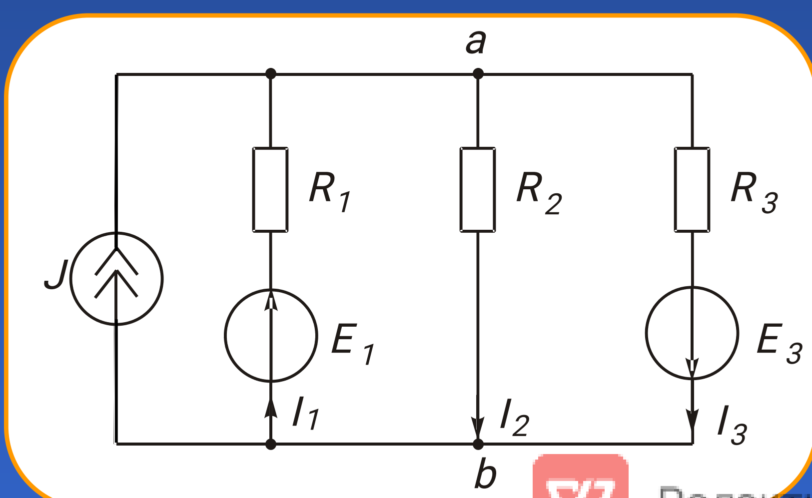
1. Метод непосредственного использования законов Кирхгофа
2. Метод узловых потенциалов
3. Метод напряжения между двумя узлами
4. Метод эквивалентных преобразований схем с последовательно-параллельным соединением приемников
5. Метод эквивалентных преобразований для расчета схем с трехполюсниками
6. Метод наложения
7. Метод эквивалентного генератора

Предварительно нужно выявить в схеме узлы и ветви.

Число уравнений должно быть минимальным, но достаточным и равным числу неизвестных токов, т.е. $m - m_J$, где m – общее число ветвей в схеме; m_J – число ветвей с источниками тока.

По первому закону Кирхгофа составляют n-1 уравнение, где n – число узлов схемы.

Недостающие уравнения дописывают по второму закону Кирхгофа. Уравнения по второму закону Кирхгофа составляют для контуров, не содержащих источников тока.



$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = -J; \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1; \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_3. \end{cases}$$

В качестве промежуточных неизвестных принимают потенциалы узлов.

Потенциал – функция многозначная, поэтому потенциал одного из узлов принимают равным нулю. Рационально заземлять узел, в котором сходится максимальное число ветвей.

Систему можно записать в трафаретном виде:

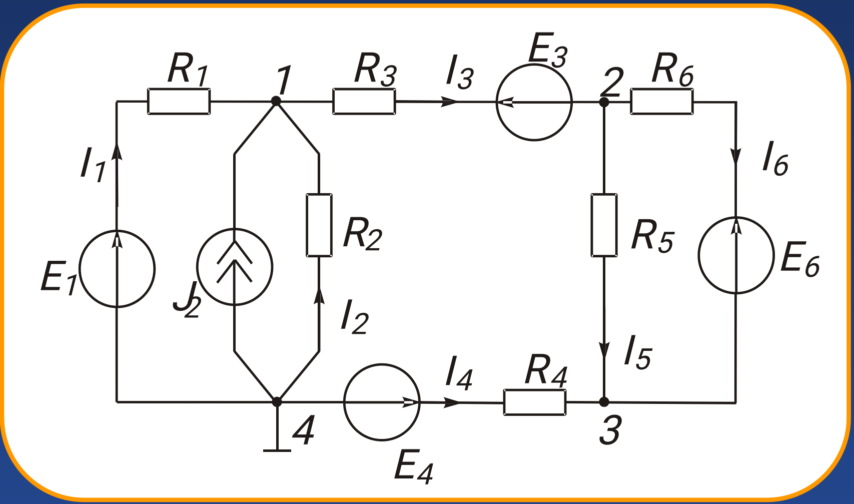
$$\begin{cases} G_{11}V_1 & -G_{12}V_2 & -G_{13}V_3 & -\cdots & -G_{1m}V_m & = J_{11} \\ -G_{21}V_1 & +G_{22}V_2 & -G_{23}V_3 & -\cdots & -G_{2m}V_m & = J_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -G_{m1}V_1 & -G_{m2}V_2 & -G_{m3}V_3 & -\cdots & +G_{mm}V_m & = J_{mm} \end{cases},$$

где

G_{ii} – собственная проводимость узла, равная сумме проводимостей ветвей, соединяющихся в соответствующем узле;

G_{ij} – общие проводимости между двумя узлами, равные сумме проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы;

J_{ii} – узловой ток, равный алгебраической сумме произведений проводимостей активных ветвей на ЭДС этих ветвей и токов источников тока, соединяющихся в этом узле.



С положительным знаком берут ЭДС и токи, направленные к узлу. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} (G_1+G_2+G_3)V_1 & -G_3V_2 & -0 & = G_1E_1+J_2+G_3E_3; \\ -G_3V_1 & +(G_3+G_5+G_6)V_2 & -(G_5+G_6)V_3 & = -G_3E_3+G_6E_6; \\ -0 & -(G_5+G_6)V_2 & +(G_4+G_5+G_6)V_3 & = G_4E_4-G_6E_6. \end{cases}$$

Решением системы уравнений определим потенциалы узлов. Затем рассчитаем токи ветвей по закону Ома:

$$I_1 = G_1(V_4 - V_1 + E_1) = G_1(-V_1 + E_1),$$

$$I_2 = -G_2V_1, \qquad I_3 = G_3(V_1 - V_2 - E_3), \qquad I_4 = G_4(-V_3 + E_4),$$

$$I_5 = G_5(V_2 - V_3), \qquad I_6 = G_6(V_2 - V_3 - E_6).$$

Этот метод является частным случаем метода узловых потенциалов, он применим для схемы с двумя узлами.

Формулу для определения напряжения между двумя узлами в общем виде можно записать следующим образом:

$$U_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i E_i + \sum_{j=1}^{m} J_j}{\sum_{i=1}^{l} G_i},$$

где G_i — проводимости ветвей;
n — число ветвей, содержащих источники ЭДС с отличными от нуля проводимостями;
m — число ветвей, содержащих источники тока;
l — число ветвей без источников тока.

Число слагаемых в числителе равно числу активных ветвей. С положительным знаком записывают E и J, направленные к первому в индексе напряжения узлу. Сумма в знаменателе формулы – арифметическая. Вычислив напряжение между двумя узлами, по закону Ома для ветви находят токи.

Метод эквивалентных преобразований применяют как самостоятельный для расчета токов в схемах с одним источником энергии и несколькими приемниками. Его можно использовать и для упрощения частей сложной схемы при расчетах другими методами.

Все приемники заменяют одним с эквивалентным сопротивлением. При этом токи и напряжения в частях схемы, не затронутых преобразованием, должны оставаться неизменными.

Находят токи в свернутой схеме. Затем возвращаются к исходной схеме с определением остальных токов.

Преобразование схемы проводят постепенно, рассматривая участки с последовательными и параллельными соединениями приемников. Предварительно нужно выявить узлы и ветви.

Элементы, принадлежащие одной ветви, соединены между собой последовательно. В них один ток. Эквивалентное сопротивление последовательно соединенных резисторов равно сумме их сопротивлений:

$$R_э = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

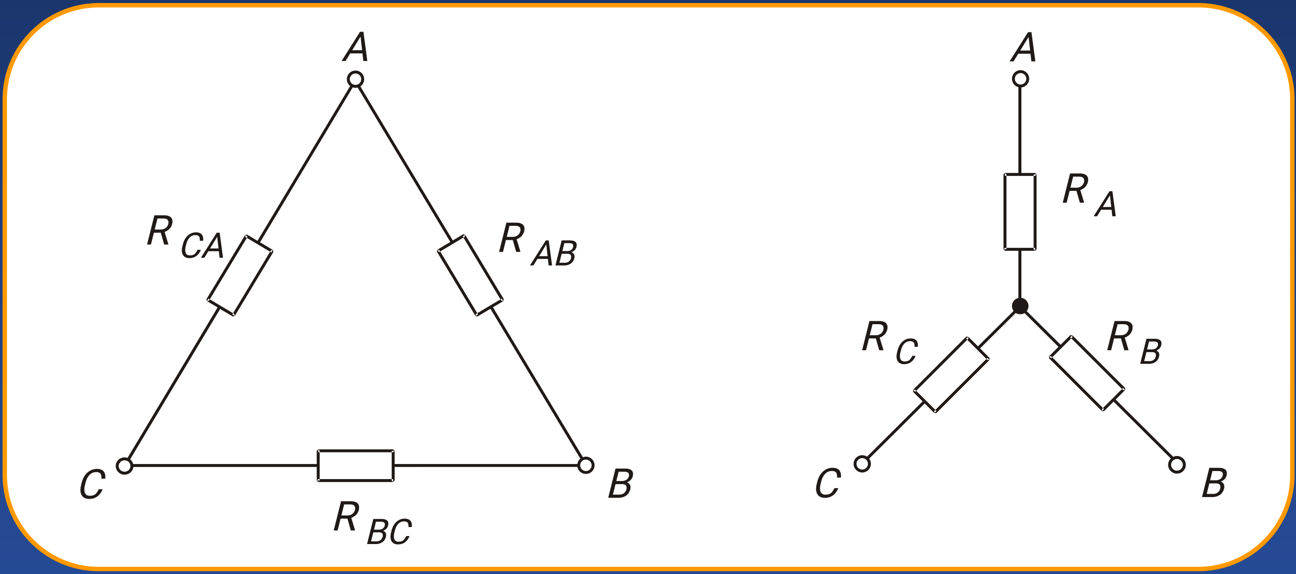
При параллельном соединении элементы схемы замещения находятся под одним напряжением и соединены между собой двумя выходными зажимами. Эквивалентная проводимость параллельно соединенных резисторов равна сумме их проводимостей:

$$\frac{1}{R_э} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}.$$

В свернутой схеме ток определяют по закону Ома: $I = \frac{E}{R_э}.$

Ток в одной из двух параллельно соединенных пассивных ветвей пропорционален току в неразветвленной части схемы. В числителе коэффициента пропорциональности записывают сопротивление другой пассивной ветви, в знаменателе – сумму сопротивлений двух пассивных ветвей.

Метод эквивалентных преобразований для расчета схем с трехполюсниками



$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C},$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A},$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C \cdot R_A}{R_B},$$

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}},$$

$$R_B = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}},$$

$$R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

Метод наложения основан на принципе независимости действия источников энергии. Ток в любой ветви схемы равен алгебраической сумме токов, возникающих в этой ветви под действием каждого отдельно работающего источника.

Схему делят на столько подсхем, сколько источников энергии. В каждой подсхеме оставляют только один источник, остальные источники ЭДС закорачивают, источники тока – разрывают.

Приемники во всех подсхемах остаются неизменными.

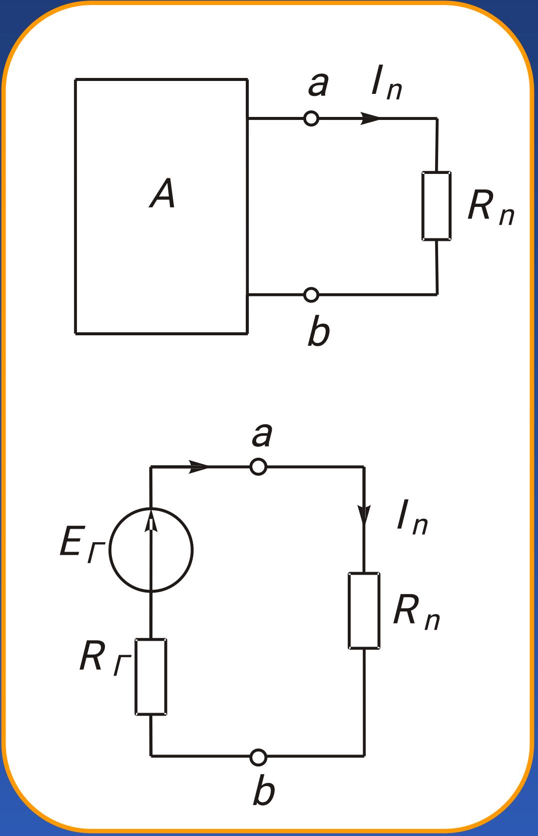
Токи в подсхемах ищут методом эквивалентных преобразований.

Токи в схеме вычисляют алгебраическим суммированием токов в подсхемах.

Метод наложения рационально применять, если в схеме не больше трех источников энергии.

Этот метод дает возможность вычислить ток только одной ветви схемы.

Любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным ему генератором.



ЭДС генератора равна напряжению между зажимами *a* и *b* активного двухполюсника в режиме холостого хода. Внутреннее сопротивление генератора равно эквивалентному сопротивлению пассивного двухполюсника относительно входных зажимов. Пассивный двухполюсник получают из активного, закорачивая идеальные источники ЭДС и разрывая идеальные источники тока.

$$I_n = \frac{E_г}{R_г + R_n} = \frac{U_{xx}}{R_г + R_n}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Чему равно минимальное и достаточное число уравнений в системе, составленной по законам Кирхгофа?
2. Сколько уравнений составляют по первому закону Кирхгофа?
3. Чему равно число уравнений в системе для определения потенциалов узлов?
4. Что назвали узловым током?
5. Для расчета каких схем метод эквивалентных преобразований можно использовать как самостоятельный?
6. На чем основан расчет методом наложения?
7. На сколько подсхем делят исходную схему?
8. Каким методом вычисляют токи в подсхемах?
9. Как находят токи в исходной схеме?
10. Чем метод эквивалентного генератора отличается от всех остальных методов расчетов?
11. В чем суть метода эквивалентного генератора?
12. Чему равно ЭДС эквивалентного генератора?
13. Чему равно сопротивление эквивалентного генератора?

Лекция № 4. Способы изображения и параметры синусоидальных электрических величин

1. Преимущества переменного тока
2. Способы представления гармонических функций
3. Действующие и средние значения гармонических величин

Переменный ток поддается трансформации, отсюда возможность передачи на большие расстояния.

Производство переменного тока просто и рационально.

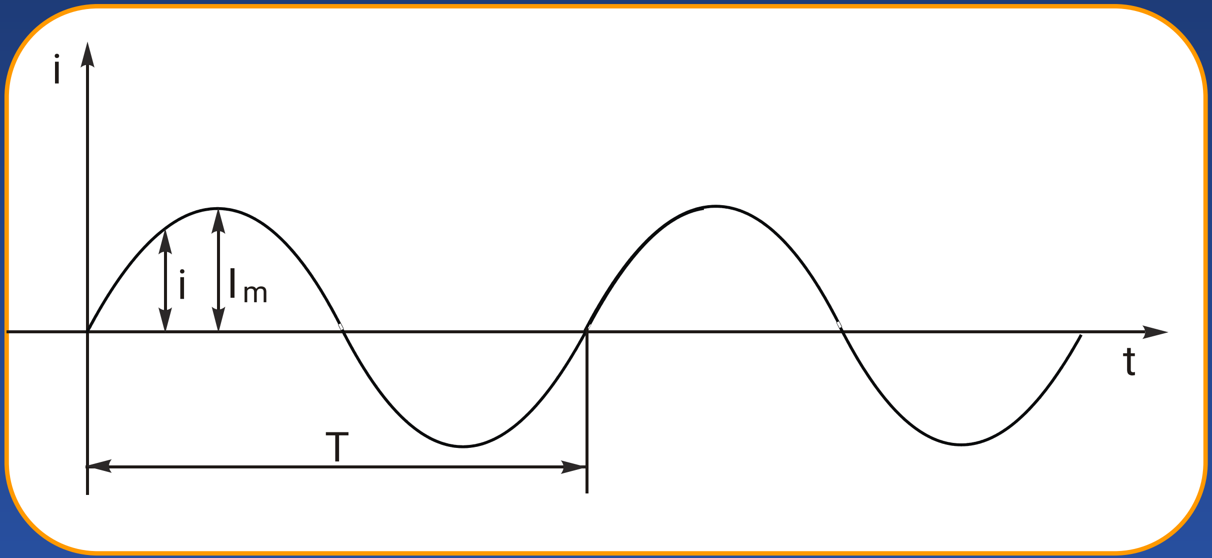
Потребитель при переменном токе легче решает вопросы преобразования электрической энергии в механическую.

Преимущества синусоидальной формы кривых тока и напряжения перед другими периодическими формами.

Форма кривых после трансформации не меняется.

Величины меняются плавно, нет перенапряжений, толчков тока, которые недопустимы в энергетике.

Графическое изображение – синусоида



Значение переменной величины в данный момент называют **мгновенным**.

Мгновенные значения обозначают строчными буквами: *i*, *u*, *e*.

Период – время одного полного колебания.

Величину, обратную периоду, называют **частотой** *f*.

$$f = \frac{1}{T}.$$

Частота – число полных колебаний в единицу времени.

$$[f] = \frac{1}{с} = с^{-1} = Гц.$$

Промышленная частота в России – 50 Гц, в США, Японии – 60 Гц.

Изображение тригонометрическими функциями

Мгновенные значения электрических величин являются синусоидальными функциями времени:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \qquad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \qquad e = E_m \sin(\omega t + \psi_e),$$

где i, u, e – мгновенные значения;

I_m, U_m, E_m – максимальные (амплитудные) значения;

$(\omega t + \psi)$ – фаза колебания, характеризующая развитие процесса во времени;

ωt – текущий угол, который отсчитывают от начала отсчета времени;

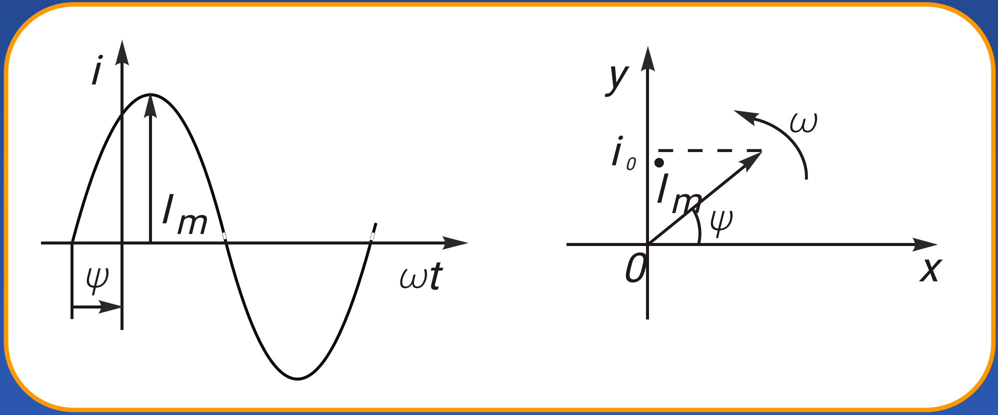
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ – угловая циклическая частота, определяющая скорость изменения фазы;

ψ – начальная фаза. Это угол, определяющий значение функции в начальный момент времени.

Изображение вращающимися векторами

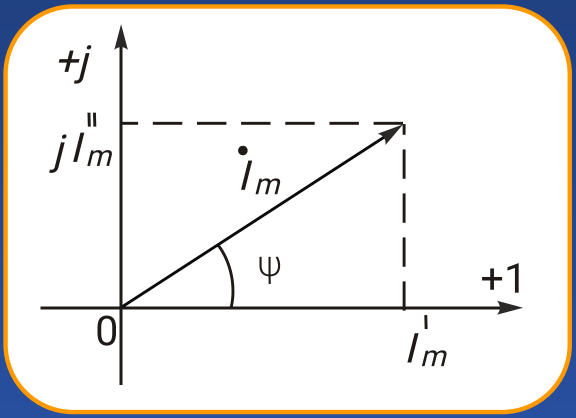
Непосредственные математические действия с синусоидальными величинами весьма трудоемки.

Любую синусоиду можно изобразить вектором, вращающимся против часовой стрелки со скоростью ω .



Применение вращающихся векторов позволяет заменить тригонометрические и графические действия над мгновенными значениями действий над вращающимися векторами. Но векторные диаграммы дают только графическое решение задачи.

Изображение комплексными числами



Так как буквой *i* в электротехнических дисциплинах обозначают ток, то мнимую единицу обозначают буквой $j = \sqrt{-1}$

Вектору на комплексной плоскости можно сопоставить комплексное число:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}.$$

Переход от одной формы записи к другой делают по формулам:

$$I_m = \sqrt{(I'_m)^2 + (I''_m)^2},$$

$$I'_m = I_m \cdot \cos\psi,$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{I''_m}{I'_m},$$

$$I''_m = I_m \sin\psi.$$

Действующие значения

Действующим значением тока считают такой постоянный ток, который производит тот же тепловой эффект, что и реальный переменный ток. Действующее значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t\, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m.$$

Аналогично $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, U_m$; $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, E_m$

Действующие значения токов и напряжений показывают амперметры и вольтметры электромагнитной и электродинамической систем.

Средние значения

В общем случае **среднее значение** – это среднее значение за период:

$$I_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,d\,t.$$

Но для синусоидальной величины это выражение равно нулю.
Поэтому среднее значение определяют для половины периода:

$$I_{ср} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i\,d\,t = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin\omega t\,dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637\, I_m.$$

Аналогично

$$U_{ср} = \frac{2}{\pi} U_m = 0{,}637\, U_m; \qquad E_{ср} = \frac{2}{\pi} E_m = 0{,}637\, E_m.$$

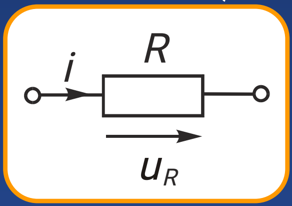
Вопросы для самопроверки

1. В чем преимущества переменного тока?
2. Почему выбрали синусоидальную форму изменения тока и напряжения?
3. В какую сторону от начала координат смещена синусоида при положительной начальной фазе?
4. Какой физический смысл имеет угловая циклическая частота?
5. Какой буквой обозначают угол сдвига фаз напряжения и тока?
6. Какие формулы записи комплексных чисел Вы знаете?
7. Что характеризуют модуль и аргумент комплекса?
8. Что понимают под действующим значением переменного тока?
9. Как связаны максимальное и действующее значения синусоидальных электрических величин?

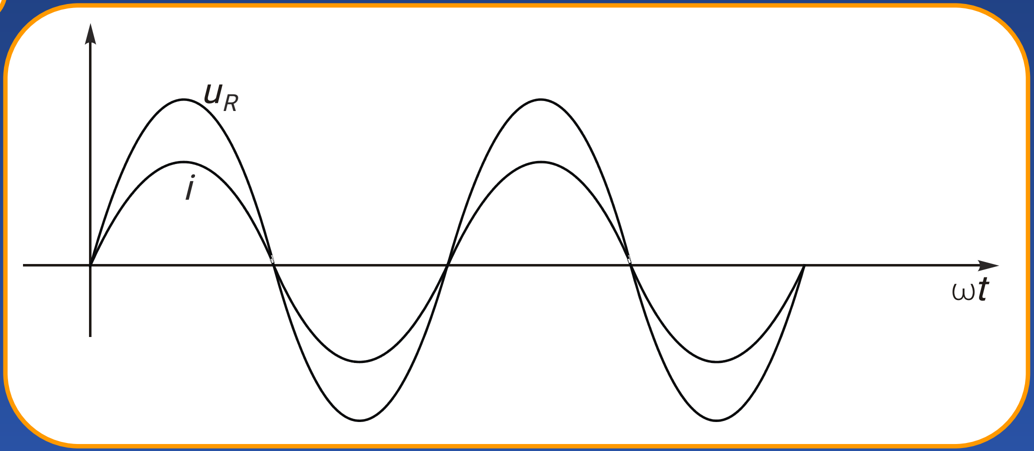
Лекция № 5. Приемники в схемах замещения цепей синусоидального тока

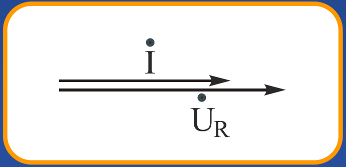
1. Идеальный резистор или резистивный элемент
2. Индуктивный элемент либо идеальная индуктивная катушка
3. Идеальный конденсатор либо емкостный элемент

Резистивный элемент обладает сопротивлением *R*, которое измеряют в Омах (Ом).



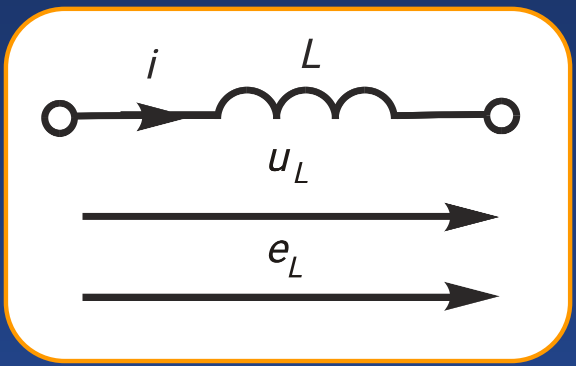
Закон Ома для мгновенных значений: $u_R = R \cdot i.$





Мощность для резистивного элемента:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_R I\left[1-\cos 2(\omega t+\psi_i)\right]dt = \frac{1}{T}U_R I\,T = U_R \cdot I = R\,I^2.$$



Индуктивный элемент учитывает ЭДС самоиндукции, которая пропорциональна скорости изменения потокосцепления и мешает этому изменению:

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -W\frac{d\Phi}{dt}.$$

Индуктивность – это коэффициент, характеризующий способность тока создавать магнитный поток:

$$L = \frac{d\psi}{di}.$$

Индуктивность измеряют в Гн = Ом · с

Закон Ома для мгновенных значений: $$u_L = L\frac{di}{dt}.$$

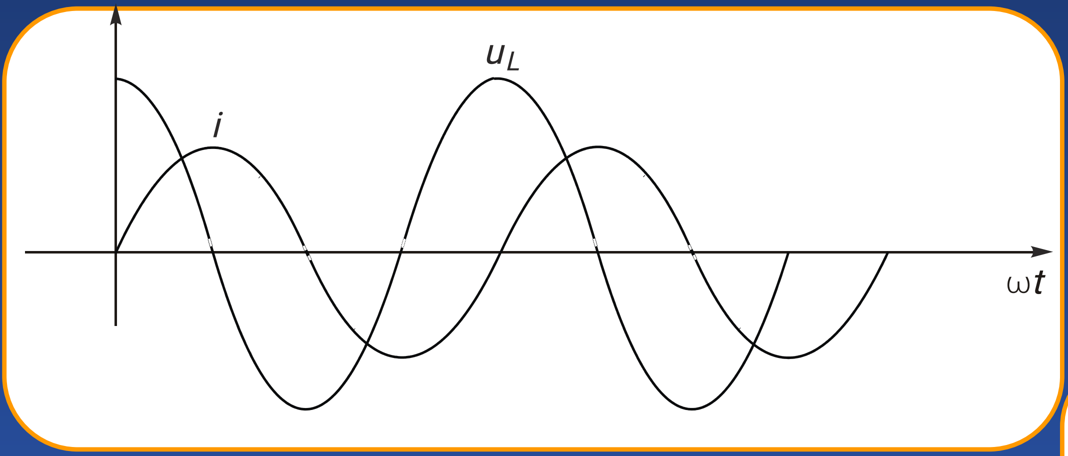
Закон Ома для действующих значений: $$U_L = L\omega I.$$

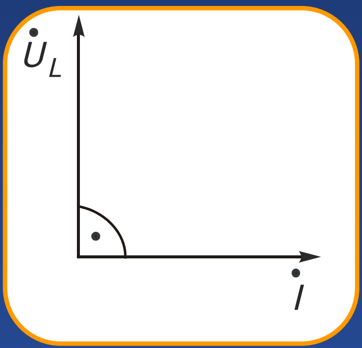
где $X_L = \omega L$, Ом - ***индуктивное сопротивление***,
$B_L = 1/\omega L$, См - ***индуктивная проводимость***.

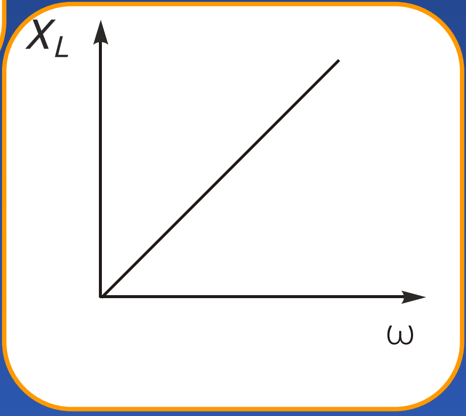
Закон Ома для комплексных значений: $$\dot U_L = jX_L\dot I = X_L\dot I e^{j\frac{\pi}{2}} = X_L\dot I e^{j90^0}.$$

Индуктивный элемент либо идеальная индуктивная катушка

1. При синусоидальном токе напряжение на индуктивном элементе тоже синусоидально.
2. Напряжение на индуктивном элементе опережает по фазе ток на угол, равный $\frac{\pi}{2}$







Индуктивное сопротивление – это расчетное понятие, учитывающее ЭДС самоиндукции.

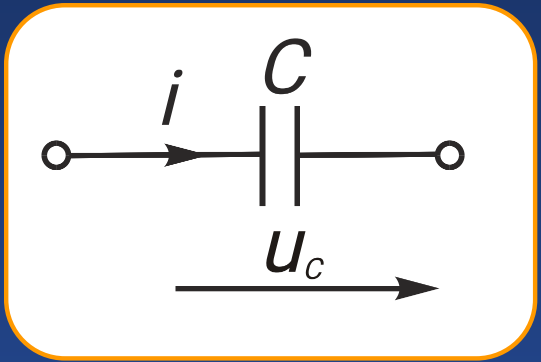
Мгновенная мощность индуктивного элемента:

$$p = u_L \cdot i = U_{Lm} I_m \cos(\omega t + \psi_i) \cdot \sin(\omega t + \psi_i) = U_L I \cdot \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

Идеальная индуктивная катушка энергии не потребляет.

Энергия магнитного поля индуктивного элемента:

$$W_M = \int p\,dt = \int u_L\, i\,dt = \int L \frac{di}{dt} \cdot i\,dt = \int L\, i\,di = \frac{L\,i^2}{2}.$$



Емкостный элемент обладает емкостью *C*, которую измеряют в Фарадах:

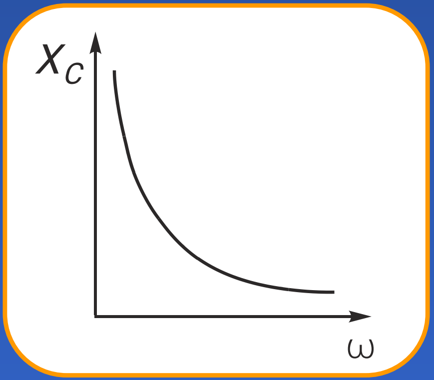
$$\left(\Phi = \frac{\text{с}}{\text{Ом}}\right).$$

Закон Ома для мгновенных значений: $i = C\dfrac{du_c}{dt}.$

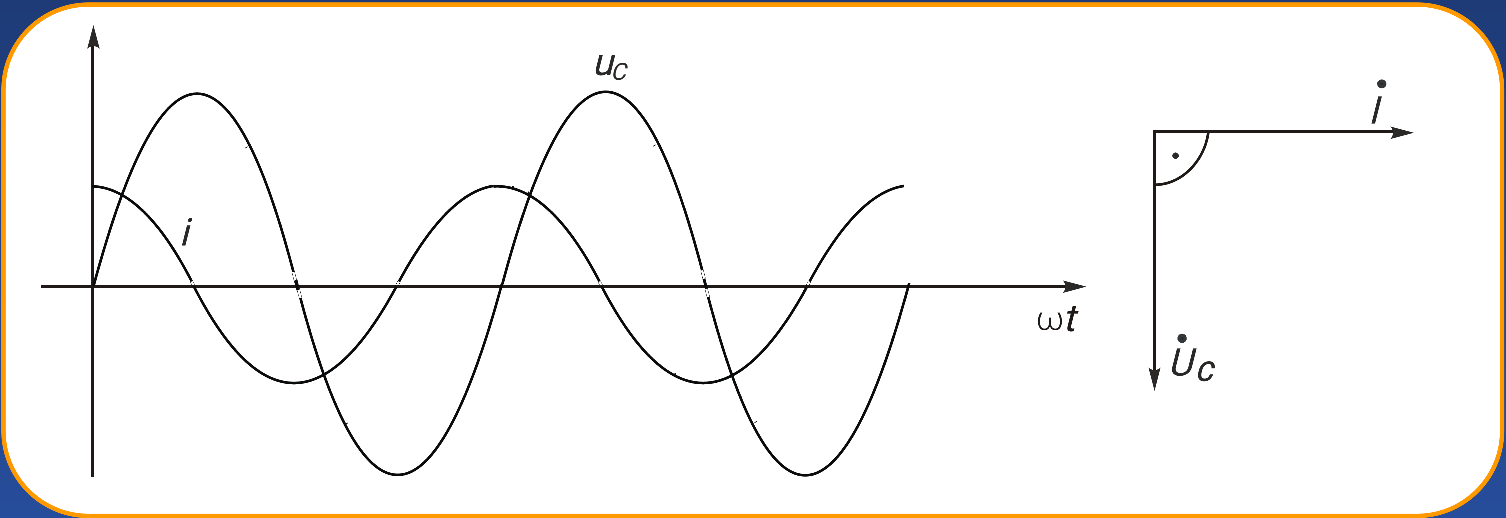
Закон Ома для действующих значений: $I = C\omega U_c.$

Закон Ома для комплексных значений: $\dot U_c = -jX_c\dot I = X_c\dot I e^{-j\frac{\pi}{2}} = X_c\dot I e^{-j90^0}.$

По аналогии с резистором для упрощенияС расчетов вводят понятие емкостного сопротивления $X_c = 1/\omega C$, Ом , а также емкостной проводимости $B_c = \omega C$, См



1. При синусоидальном токе напряжение на емкостном элементе тоже синусоидально.
2. Напряжение на емкостном элементе отстает по фазе от тока на угол $\frac{\pi}{2}$.



Мгновенная мощность емкостного элемента:

$$p = u_c\, i = U_{cm}\, I_m \cos(\omega t + \psi_u) \cdot \sin(\omega t + \psi_u) =$$

$$= \frac{U_{cm}\, I_m}{2}\, 2\cos(\omega t + \psi_u)\sin(\omega t + \psi_u) = U_c\, I \sin 2(\omega t + \psi_u).$$

Идеальный конденсатор энергии не потребляет.

Энергия электрического поля емкостного элемента:

$$W_э = \int p\,dt = \int u_c \cdot i\,dt = \int u_c\, C \frac{du_c}{dt}\,dt = \frac{C\, u_c^2}{2}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие явления учитывает идеальный резистор?
2. Каковы фазные соотношения тока и напряжения резистора?
3. Что Вы знаете о мгновенной мощности резистивного элемента?
4. Что назвали активной мощностью?
5. Каковы фазные соотношения тока и напряжения идеальной индуктивной катушки?
6. Что Вы знаете о мгновенной мощности индуктивного элемента?
7. Каковы фазные соотношения тока и напряжения идеального конденсатора?
8. Что Вам известно о мгновенной мощности емкостного элемента?

Лекция № 6. Анализ цепи с последовательным соединением приемников

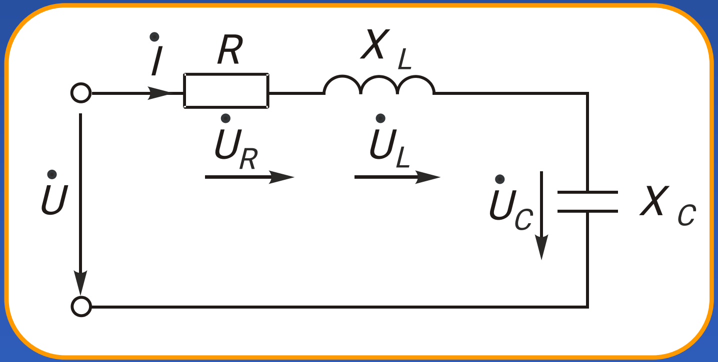
1. Основные законы цепей переменного тока
2. Построение векторной диаграммы
3. Треугольники сопротивлений и мощностей. Закон Ома для активной цепи
4. Резонанс напряжений

В цепях переменного тока закон Ома выполняется для всех значений, законы Кирхгофа – только для мгновенных и комплексных, которые учитывают фазные соотношения.

Первый закон Кирхгофа: $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0,\qquad \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0.$

Второй закон Кирхгофа: $\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{l} e_j,\qquad \sum_{i=1}^{m} \dot{U}_i = \sum_{j=1}^{l} \dot{E}_j.$

Закон Ома в комплексной форме: $\dot{U} = \underline{Z}\,\dot{I}.$

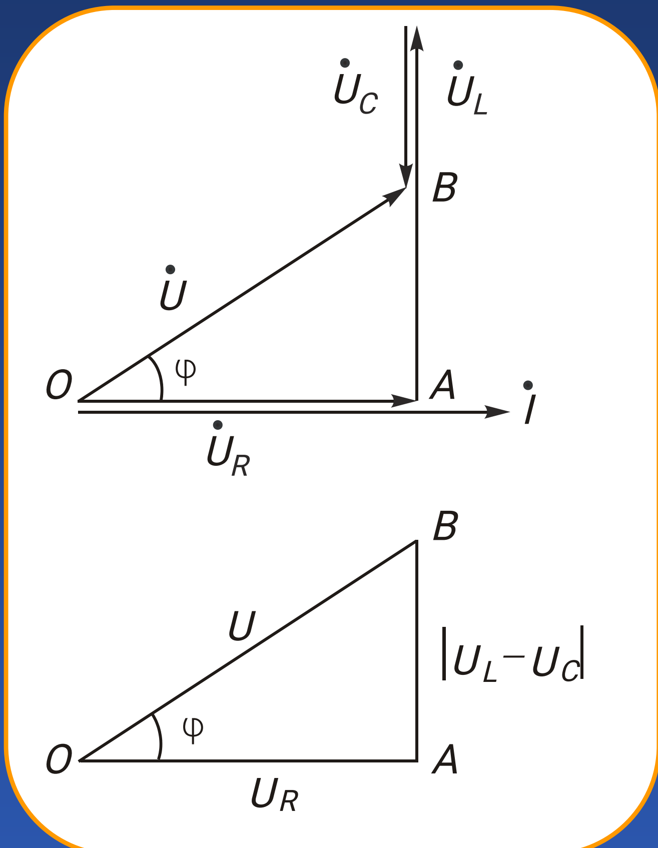


$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C,$$

$$\dot{U} = R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} = \left[R + j(X_L - X_C)\right]\dot{I} = \underline{Z}\,\dot{I},$$

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX.$$

Уравнения, составленные по законам Кирхгофа, называют уравнениями электрического состояния.



Построение векторной диаграммы начинают с вектора величины, общей для данной цепи. При последовательном соединении элементов такой величиной является ток. Вид диаграммы зависит от характера цепи. Построение векторной диаграммы для цепи, имеющей активно-индуктивный характер, т. е.

$$X_L > X_C.$$

Входное напряжение складывается из напряжений на трех идеальных элементах при учете сдвига фаз. Треугольник *OAB* дает возможность оперировать действующими значениями:

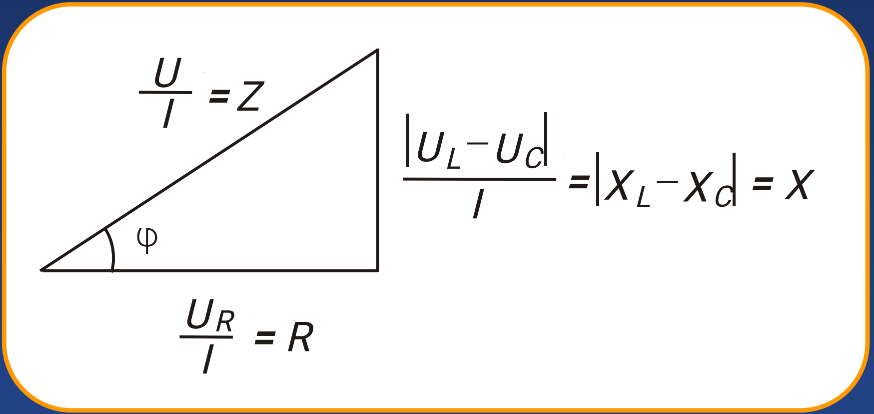
$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2},$$

$$\varphi = Arctg \frac{|U_L - U_C|}{U_R},$$

$$U_R = U \cdot \cos\varphi,$$

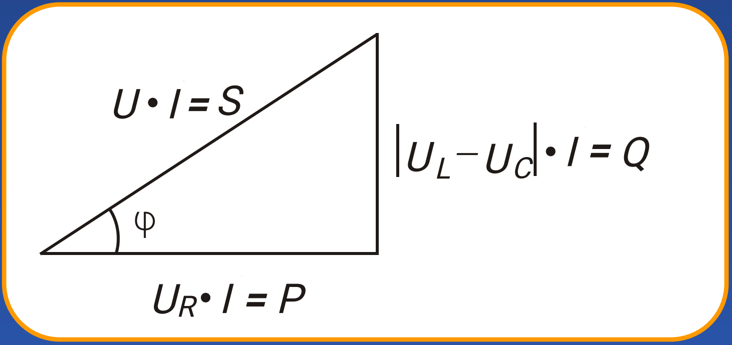
$$|U_L - U_C| = U \cdot \sin\varphi.$$

Если разделить все стороны треугольника напряжений на ток *I*, получим подобный ему треугольник сопротивлений.



$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $\varphi = \mathrm{Arctg}\,\frac{X}{R}$, $R = Z \cdot \cos\varphi$, $X = Z \cdot \sin\varphi$.

Умножением всех сторон треугольника напряжений на ток, получаем треугольник мощностей.

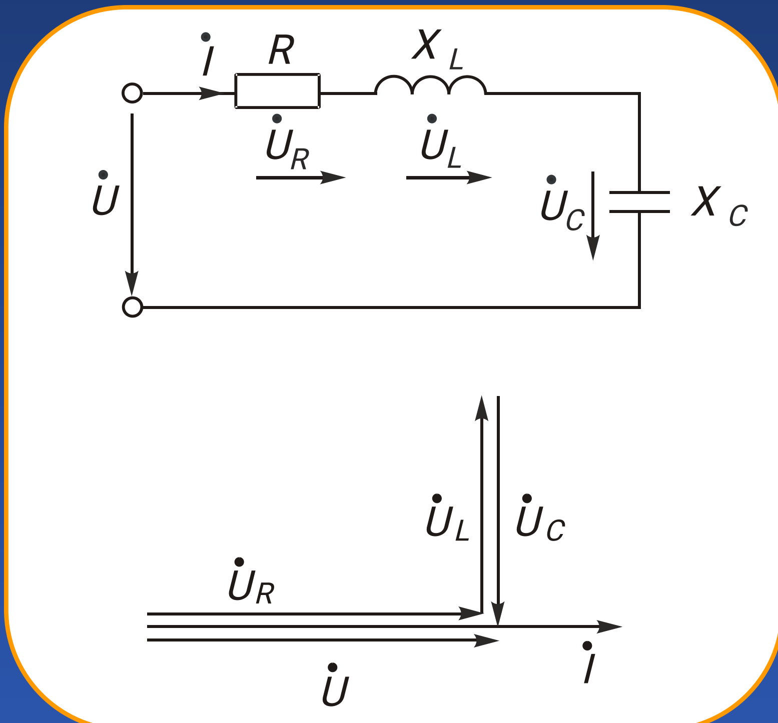


Активная мощность, Вт: $P = U_R \cdot I = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \cos\varphi.$

Реактивная мощность, вар: $Q = |U_L - U_C| \cdot I = X \cdot I^2 = U\ I \sin\varphi.$

Полная (кажущаяся) мощность, ВА: $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}.$

Резонанс напряжений возникает при последовательном соединении индуктивных катушек и конденсаторов. Условие резонанса напряжений: входное реактивное сопротивление X равно нулю.



$$X = X_L - X_C = 0, \qquad Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R,$$

онансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

или

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

онанс напряжений возникает при:

$$\dot{U} = \dot{U}_R, \qquad \dot{U}_L = -\dot{U}_C, \qquad U_L = U_C,$$

$$I = \frac{U}{R} = I_{max}, \qquad \varphi = 0.$$

При изменении частоты источника будут изменяться сопротивления реактивных элементов и, как следствие, будут изменяться ток в цепи и напряжения на отдельных участках. Частотными характеристиками контура называются зависимости сопротивлений отдельных элементов и участков от частоты.

Резонансными характеристиками называются зависимости режимных параметров от частоты (рис. 1).

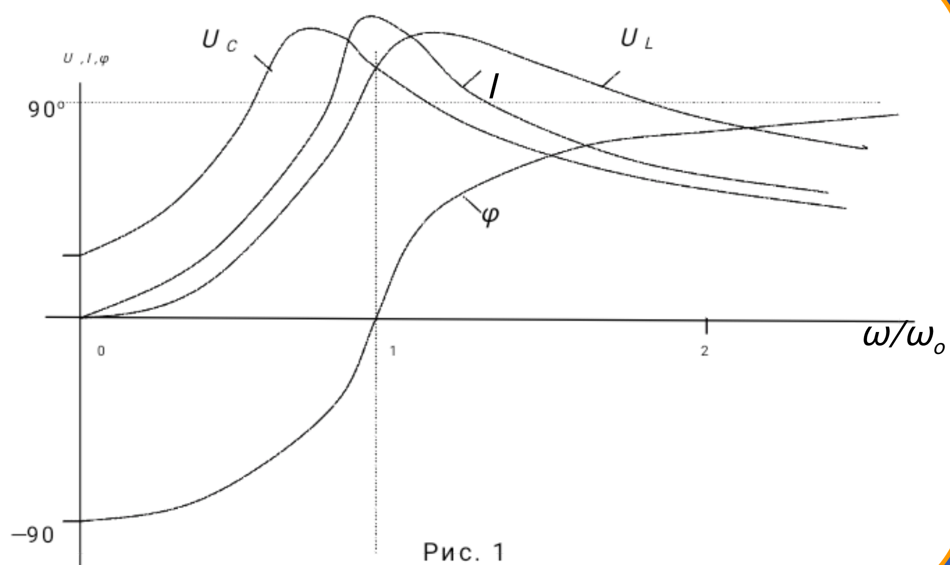


Рис. 1

Свойства колебательного контура характеризуют следующие параметры:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ - резонансная частота

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ волновое сопротивление

$$Q = \frac{\rho}{R}$$ - добротность контура

$$d = \frac{1}{Q}$$ - затухание контура

Значение резонанса напряжений:

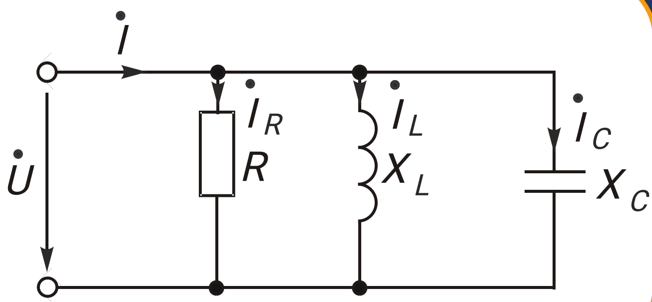
1. В электроэнергетических устройствах в большинстве случаев явление нежелательное, связанное с неожиданным появлением перенапряжений.
2. В электротехнике - связи (в радиотехнике, проволочной телефонии), в автоматике явление резонанса напряжений широко используют для настройки цепи на определенную частоту.

Вопросы для самопроверки

1. Для каких значений электрических величин выполняются законы Кирхгофа?
2. Что является модулем комплексного сопротивления?
3. Что является аргументом комплексного сопротивления?
4. Как связаны между собой активное, реактивное и комплексное сопротивления?
5. Как вычислить полное сопротивление схемы?
6. От чего зависит угол φ между напряжением и током?
7. Какая мощность является потребляемой?
8. Какую энергию характеризует активная мощность?
9. Какую энергию характеризует реактивная мощность?
10. В каких единицах измеряют активную, реактивную и полную мощности?
11. Каково условие резонанса напряжений?
12. Каково значение резонанса напряжений?

Лекция № 7. Анализ цепи с последовательным соединением приемников

1. Основные законы
2. Построение векторной диаграммы
3. Треугольники проводимостей и мощностей
4. Резонанс токов

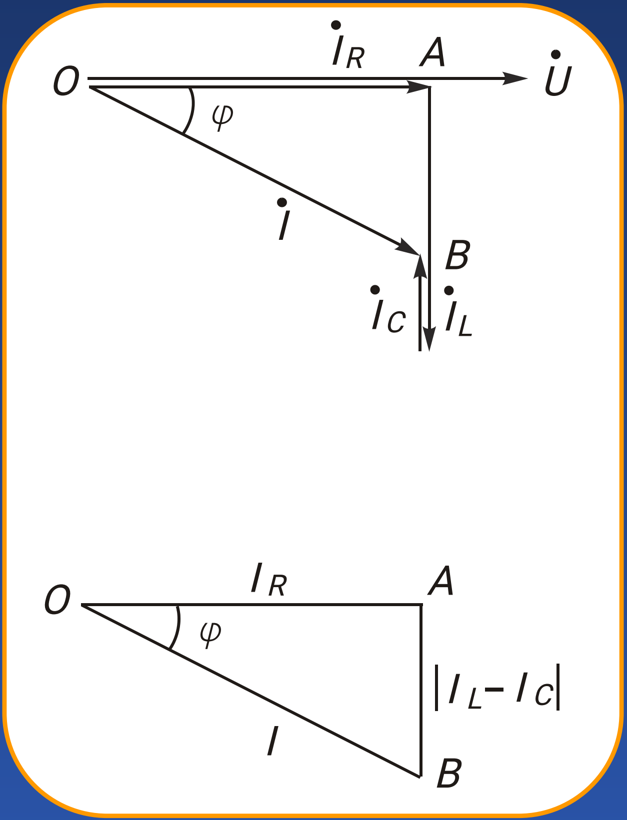


Для анализа цепи воспользуемся уравнением по первому закону Кирхгофа для комплексных значений:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C .$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} - \frac{\dot{U}}{jX_C} = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{j}\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\right]\dot{U} = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)\dot{U} .$$

$$\underline{Y} = G - j(B_L - B_C) = G - jB .$$



Построение векторной диаграммы начинаем с вектора напряжения, которое является одинаковым для всех элементов схемы. Векторная диаграмма для случая, когда

$$X_L > X_C.$$

Из свойств треугольника токов получаем следующие соотношения, позволяющие оперировать действующими значениями:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2},$$

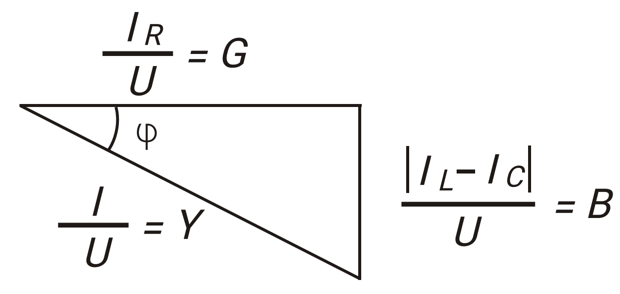
$$I_R = I\cos\varphi,$$

$$\varphi = \mathrm{Arctg}\frac{|I_L - I_C|}{I_R},$$

$$|I_L - I_C| = I\cdot\sin\varphi.$$

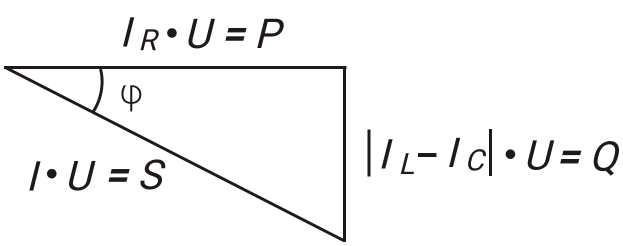
Треугольники сопротивлений и мощностей

Разделив все стороны треугольника токов на напряжение, получим подобный ему треугольник проводимостей.



$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \qquad G = Y\cos\varphi, \qquad B = Y\sin\varphi, \qquad \varphi = \mathrm{Arctg}\frac{B}{G}, \qquad Y = \sqrt{\left(\sum G\right)^2 + \left(\sum B_L - \sum B_C\right)^2}.$$

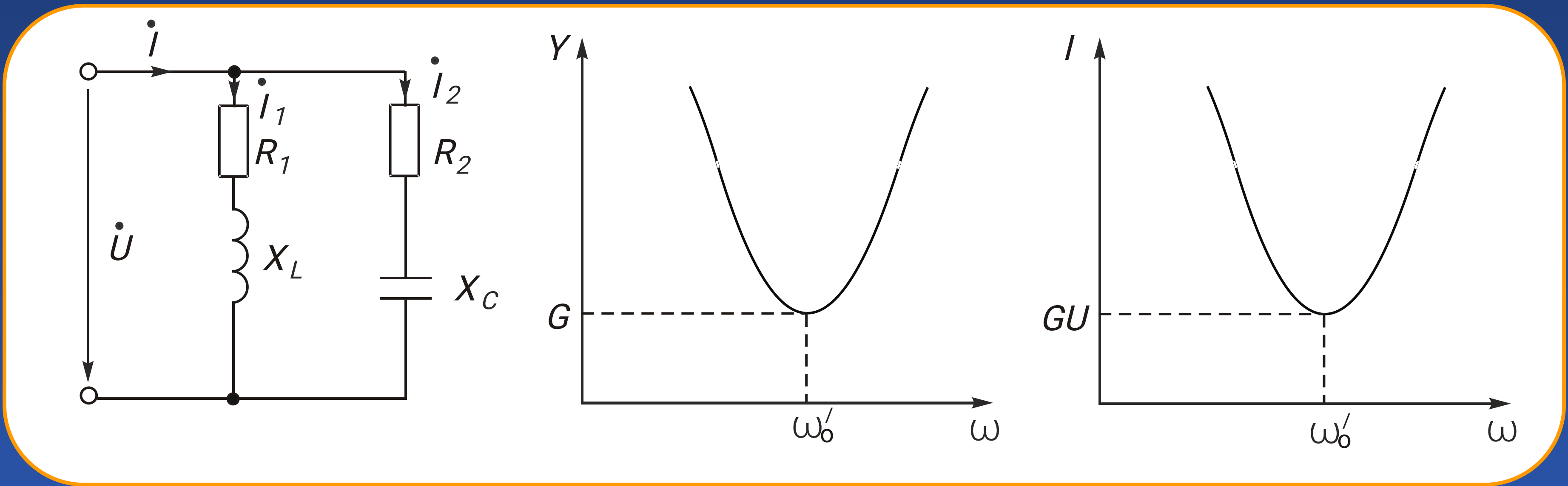
Умножив все стороны треугольника токов на напряжение, получим треугольник мощностей.



Комплексная проводимость – это величина, обратная комплексному сопротивлению:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX}, \qquad \underline{Y} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2}$$

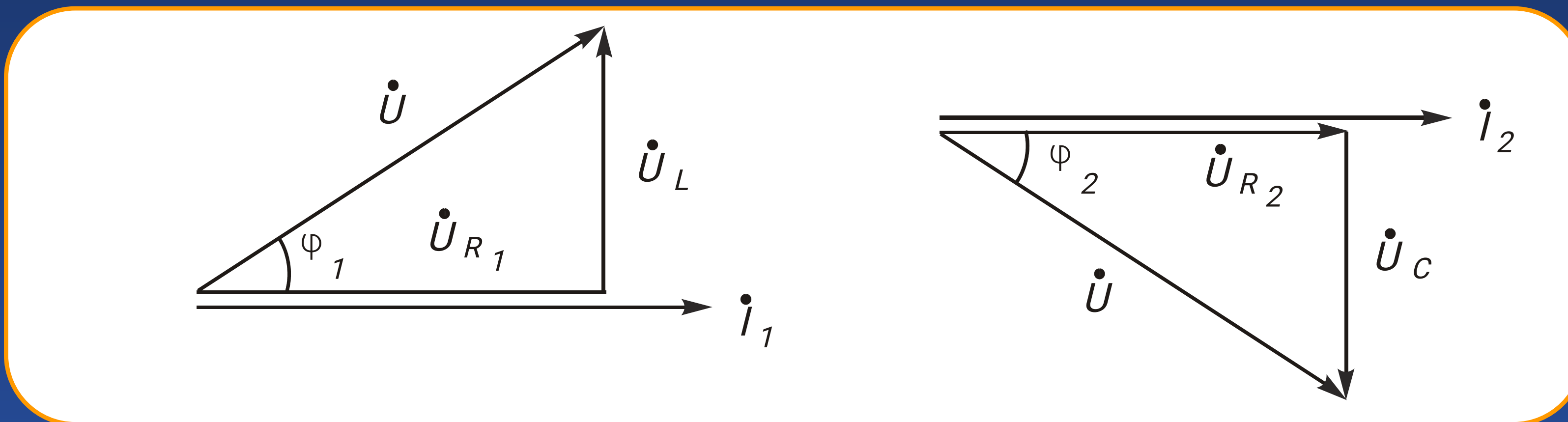
Этот режим наблюдается в цепи с параллельным соединением индуктивных катушек и конденсаторов. Условие резонанса токов: входная реактивная проводимость $B = 0$.



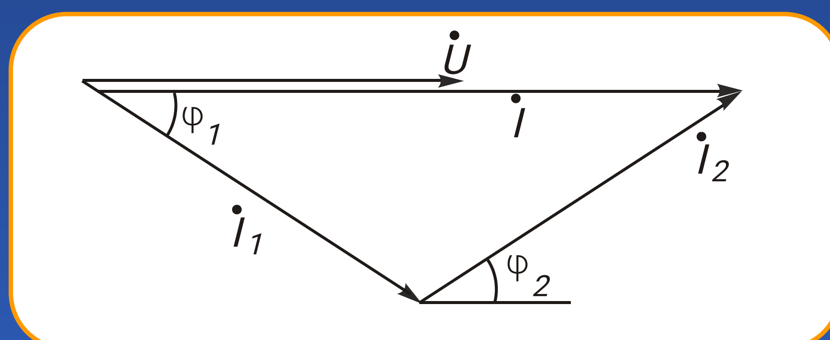
$$B_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}, \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G = Y_{min}, \quad I = YU = GU = I_{min}.$$

$$B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}, \quad \mathrm{B_L = B_C}$$

Построим векторную диаграмму. Величины, общей для схемы, нет. Поэтому сначала построим векторные диаграммы для отдельных ветвей, в которых элементы соединены последовательно



Построим объединенную векторную диаграмму



При изменении частоты источника будут изменяться проводимости реактивных элементов и, как следствие, будут изменяться ток в цепи и напряжения на отдельных участках. Частотными характеристиками контура называются зависимости проводимостей отдельных элементов и участков от частоты.

Резонансными характеристиками называются зависимости режимных параметров от частоты (рис. 1).

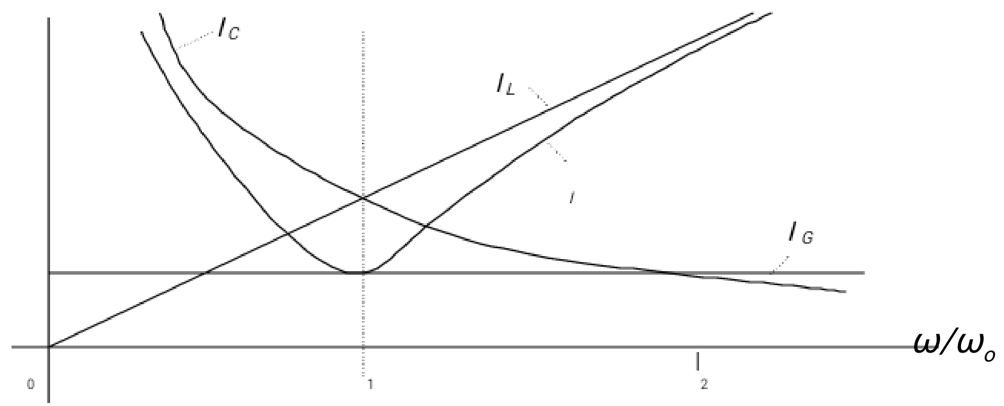


Рис. 1

Свойства колебательного контура при параллельном соединении элементов характеризуют следующие параметры:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ - резонансная частота

$$\gamma = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$ - волновое сопротивление

$$Q = \frac{\gamma}{G}$$ - добротность контура

$$d = \frac{1}{Q}$$ - затухание контура

Применение режима резонанса токов:

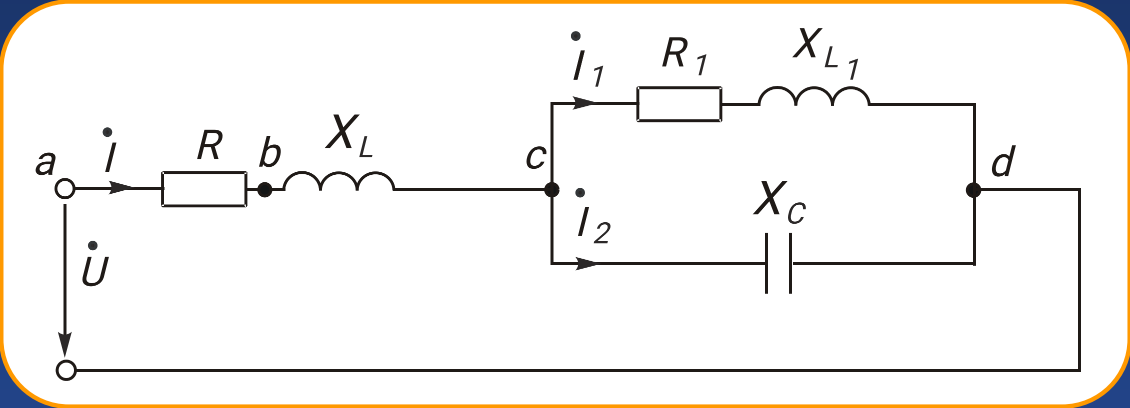
1. Фильтр-пробка для определенной частоты.
2. Для улучшения коэффициента мощности.

Вопросы для самопроверки

1. Что является модулем комплексной проводимости?
2. Как связаны между собой активная, реактивная и комплексная проводимости?
3. Как вычислить полную проводимость схемы?
4. Каков порядок построения векторной диаграммы?
5. Каково условие резонанса токов?
6. Для чего применяют режим резонанса?

Лекция № 8. Расчет цепей синусоидального тока

1. Цепь с одним источником энергии
2. Цепь с несколькими источниками энергии
3. Мощности в цепях синусоидального тока
4. Понятие о коэффициенте мощности и способах его улучшения



Вычислить токи в цепи с одним источником энергии, если известны значения

$$\dot{U},\ R,\ R_1,\ X_L,\ X_{L_1},\ X_C$$

Построить векторную диаграмму.

Решение

1. Выявим узлы (*c* и *d*), ветви, направим токи.
2. Для расчета токов в схеме с одним источником энергии рационально использовать метод эквивалентных преобразований.

Эквивалентное комплексное сопротивление:

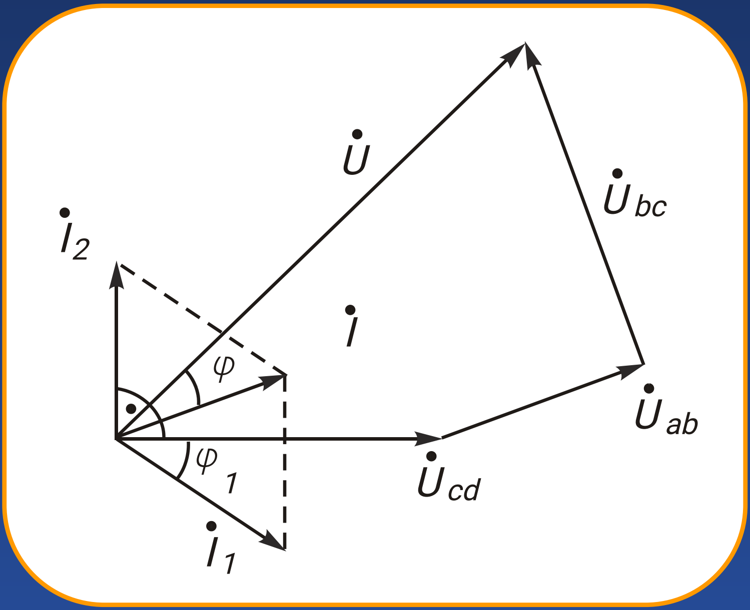
$$\underline{Z} = R + jX_L + \frac{(R_1 + jX_{L_1})(-jX_C)}{R_1 + jX_L - jX_C}.$$

3. Комплекс тока в свернутой схеме найдем по закону Ома: $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{\underline{Z}}$.
4. Токи в пассивных параллельных ветвях вычислим по формулам:

$$\dot{I}_1 = \frac{-jX_C}{R_1 + jX_{L_1} - jX_C}\cdot\dot{I},\qquad \dot{I}_2 = \frac{R_1 + jX_{L_1}}{R_1 + jX_{L_1} - jX_C}\cdot\dot{I}.$$

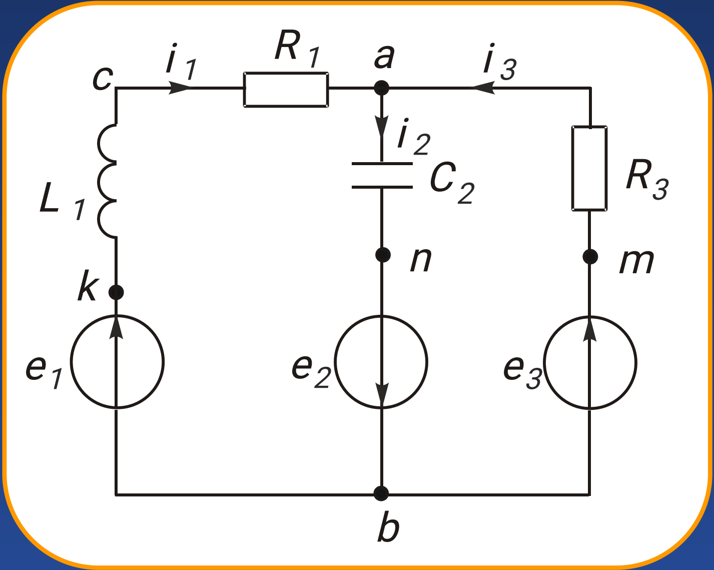
5. Действующие значения токов являются модулями комплексных значений.

Векторную диаграмму строим в соответствии с алгоритмом:



1. Построим вектор напряжения между двумя узлами $\dot{U}_{cd}$.
2. Построим векторы токов в пассивных параллельных ветвях $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$.
3. Построим вектор тока $\dot{I}$.
4. Вектор входного напряжения складывается из векторов трех напряжений:

$\dot{U}_{ab}$, $\dot{U}_{bc}$ и $\dot{U}_{cd}$.



Расчет можно выполнить методом непосредственного использования законов Кирхгофа

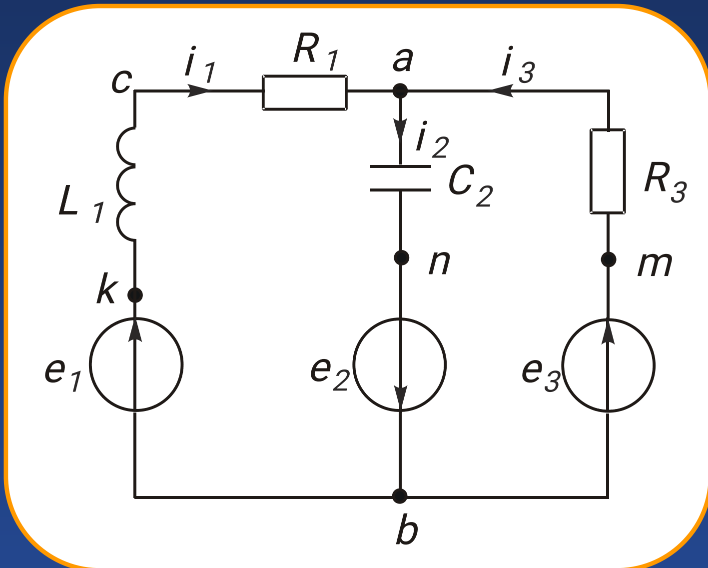
Система уравнений электрического состояния в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt = e_1 + e_2; \\ \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt + R_3 i_3 = e_2 + e_3. \end{cases}$$

Для расчета токов систему уравнений электрического состояния нужно записать для комплексных значений:

$$\begin{cases} \dot I_1 - \dot I_2 + \dot I_3 = 0; \\ jX_{L_1}\dot I_1 + R_1 \dot I_1 - jX_{C_2}\dot I_2 = \dot E_1 + \dot E_2; \\ -jX_{C_2}\dot I_2 + R_3 \dot I_3 = \dot E_2 + \dot E_3. \end{cases}$$

Решением системы найдем комплексные значения токов.



Расчет методом напряжения между двумя узлами выполняют в два этапа:

а) вычисление напряжения $\dot{U}_{ab}$ по формуле

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\sum \dot{J} + \sum \underline{Y}\dot{E}}{\sum \underline{Y}},$$

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dfrac{1}{R_1 + jX_{L_1}}\dot{E}_1 - \dfrac{1}{-jX_{C_2}}\dot{E}_2 + \dfrac{1}{R_3}\dot{E}_3}{\dfrac{1}{R_1 + jX_{L_1}} - \dfrac{1}{jX_{C_2}} + \dfrac{1}{R_3}};$$

б) вычисление токов:

$$\dot{I}_1 = \frac{-\dot{U}_{ab} + \dot{E}_1}{R_1 + jX_{L_1}}, \qquad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab} + \dot{E}_2}{-jX_{C_2}}, \qquad \dot{I}_3 = \frac{-\dot{U}_{ab} + \dot{E}_3}{R_3}.$$

При расчетах удобно пользоваться понятием комплексной мощности:

$$\underline{S} = \dot{U} \cdot \overset{*}{I} .$$

Активная мощность является действительной составляющей комплексной мощности:

$$P = \mathrm{Re}(\underline{S}) = \mathrm{Re}\left(\dot{U} \cdot \overset{*}{I}\right).$$

Реактивная мощность является мнимой составляющей комплексной мощности:

$$Q = \mathrm{Im}(\underline{S}) = \mathrm{Im}\left(\dot{U}\ \overset{*}{I}\right).$$

Активная мощность $P = S\cos\varphi.$

Косинус угла φ называют коэффициентом мощности, потому что от его величины зависит, какая доля полной мощности потребляется. Под улучшением коэффициента мощности понимают увеличение $\cos\varphi.$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Способы улучшения $\cos\varphi:$

Естественный путь – увеличение активной мощности, повышение загрузки оборудования.

Искусственный путь – уменьшение реактивной мощности, которая связана с реактивным сопротивлением.

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается расчет цепей синусоидального тока от цепей постоянного тока?
2. Каков алгоритм построения векторной диаграммы для схемы с двумя узлами и одним источником энергии?
3. Что назвали коэффициентом мощности?
4. От чего зависит угол φ между напряжением и током?
5. Что понимают под улучшением коэффициента мощности?
6. Зачем нужно улучшать коэффициент мощности?
7. Какие пути улучшения коэффициента мощности Вы знаете?

Лекция № 9. Электрические цепи с взаимной индуктивностью

1. Основные понятия и определения
2. Анализ цепи с последовательным соединением индуктивно связанных катушек
3. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индуктивности
4. Определение взаимной индуктивности опытным путем. Коэффециент магнитной связи

Коэффициент, характеризующий способность тока создавать магнитный поток в другом контуре, называют **взаимной индуктивностью** ***M:***

$$M_{12} = \frac{d\psi_{12}}{di_1}.$$

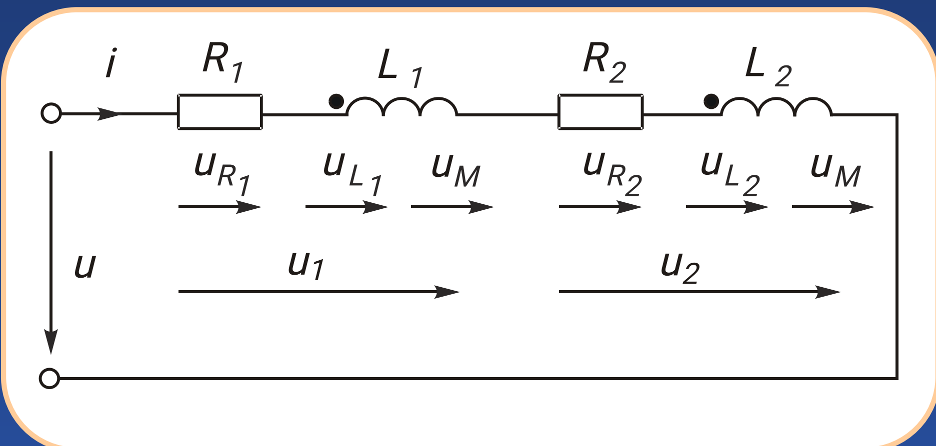
Степень индуктивной связи характеризуют коэффициентом связи k, под которым понимают отношение:

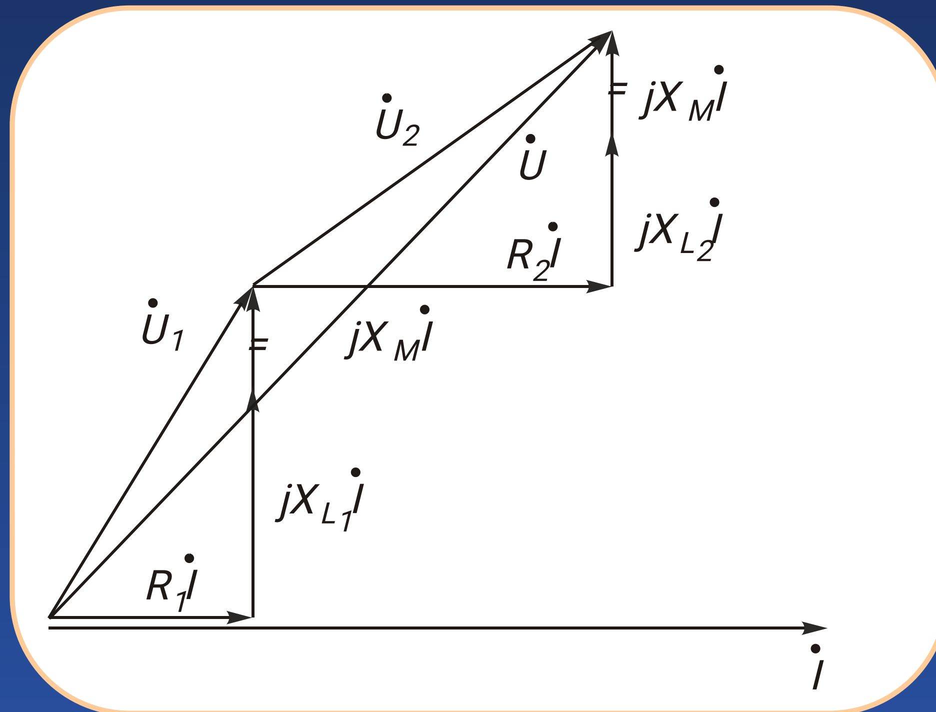
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{M\omega}{\sqrt{L_1\omega \cdot L_2\omega}} = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L_1} \cdot X_{L_2}}},$$

где $X_M = M\omega$ – сопротивление взаимной индукции.

Для решения вопроса о знаках прибегают к специальной разметке зажимов индуктивно связанных катушек. Два зажима двух индуктивно связанных элементов называют одноименными, если при одинаковых направлениях токов относительно них магнитные потоки самоиндукции
и взаимоиндукции складываются. Одноименные зажимы обозначают точками.

Согласное включение





Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}.$$

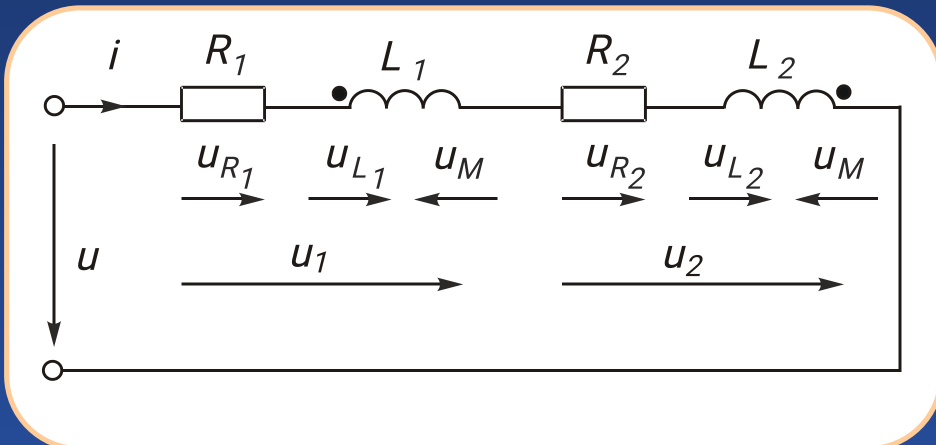
Для комплексных значений:

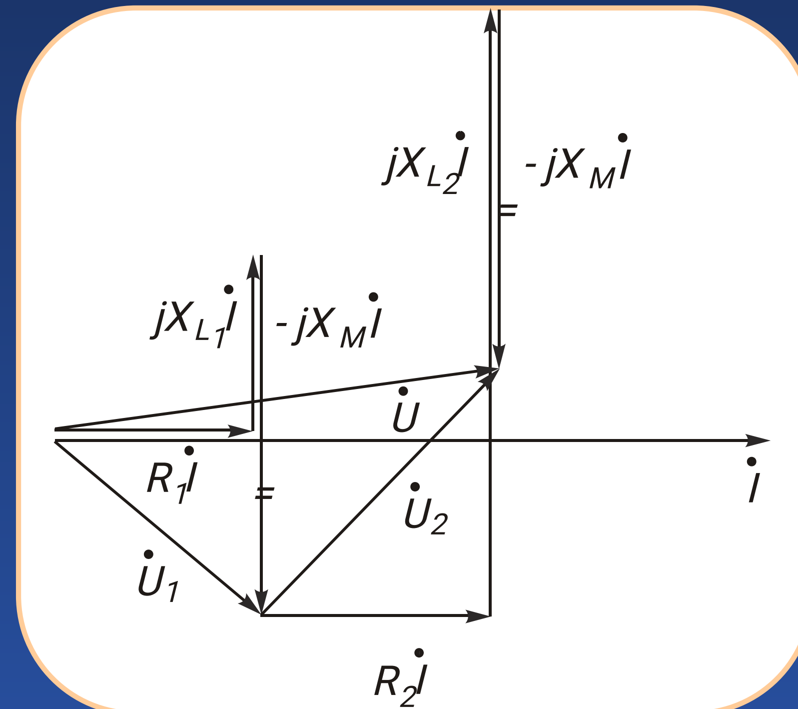
$$\dot U = \dot U_1 + \dot U_2 = R_1 \dot I + jX_L \dot I + jX_M \dot I + R_2 \dot I + jX_{L_2} \dot I + jX_M \dot I = \left[(R_1 + R_2) + j(X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M) \right] \dot I = \underline{Z}_{согл.} \cdot \dot I.$$

Комплексное сопротивление: $\underline{Z}_{\text{согл.}} = R_{\text{согл.}} + jX_{\text{согл.}}$,

где $R_{\text{согл.}} = R_1 + R_2$, $X_{\text{согл.}} = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M$.

Встречное включение





Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

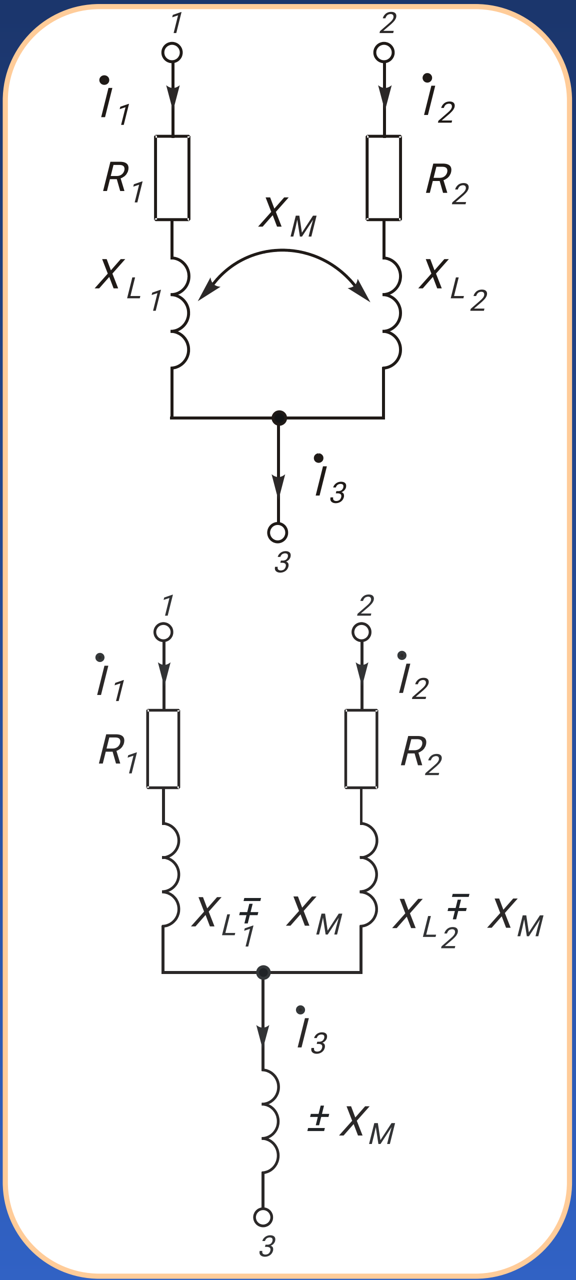
$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt}.$$

Для комплексных значений:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = R_1\dot{I} + jX_{L_1}\dot{I} - jX_M\dot{I} + R_2 + jX_{L_2}\dot{I} - jX_M\dot{I} == \left[(R_1 + R_2) + j(X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M)\right]\dot{I} = \underline{Z}_{вст\,р.}\dot{I}.$$

Комплексное сопротивление $\underline{Z}_{встр.} = R_{встр.} + jX_{встр.}$,

где $R_{согл} = R_1 + R_2$, $X_{согл.} = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M$.



Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot I_1 + \dot I_2 - \dot I_3 = 0; \\ R_1 \dot I_1 + jX_{L_1} \dot I_1 \pm jX_M \dot I_2 = \dot U_{13}; \\ R_2 \dot I_2 + jX_{L_2} \dot I_2 \pm jX_M \dot I_1 = \dot U_{23}. \end{cases}$$

$$R_1 \dot I_1 + j(X_{L_1} \mp X_M)\dot I_1 \pm jX_M \dot I_3 = \dot U_{13},$$

$$R_2 \dot I_2 + j(X_{L_2} \mp X_M)\dot I_2 \pm jX_M \dot I_3 = \dot U_{23}.$$

Правило развязки

Верхние знаки относятся к случаю, когда в узле соединены одноименные зажимы индуктивно связанных элементов.

1 Способ

Проделывают 2 опыта.

В первом опыте катушки включают последовательно и согласно и измеряют I, U, P.

Во втором опыте эти катушки включают последовательно и встречно и измеряют I, U, P.

В результате измерений находят

$$X_{согл} = \omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

$$X_{встр} = \omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

Находят разность

$$X_{согл} - X_{встр} = 4\omega M,$$

Тогда

$$M = \frac{X_{согл} - X_{встр}}{4\omega}$$

2 Способ

Берут 2 катушки в виде воздушного трансформатора. Первую катушку подключают к источнику синусоидальной ЭДС через Амперметр, а к зажимам второй катушки подключают вольтметр с **большим** входным сопротивлением (электронный вольтметр). Измеряют ток I_1 в первичной цепи первой катушки и напряжение U_2 на зажимах второй катушки.

В результате взаимную индуктивность М определяют по формуле

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1}$$

Степень магнитной связи контуров характеризуют коэффициентом связи, под которым понимают

$$K_M = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

При этом $K_M \leq 1$.

Вопросы для самопроверки

1. Что назвали явлением взаимоиндукции?
2. Что назвали взаимной индуктивностью?
3. Что понимают под коэффициентом связи *k*?
4. Чему равно сопротивление взаимной индукции?
5. Какое включение индуктивно связанных катушек называют согласным, какое – встречным?
6. Чему равно реактивное сопротивление двух индуктивно связанных катушек при согласном и встречном включениях?
7. Какие методы расчета можно применять при наличии взаимной индуктивности?
8. Что назвали развязкой магнитных связей?
9. Как определяют взаимную индуктивность?

Лекция № 10. Трехфазные цепи

1. Достоинства трехфазных цепей
2. Трехфазный генератор
3. Классификация и способы включения в трехфазную цепь приемников

Наличие вращающегося магнитного поля, на основе которого построен асинхронный двигатель.

При передаче энергии на расстояние в трехфазных цепях по сравнению с однофазными достигается существенная экономия материала проводов.

Возможность иметь два эксплуатационных напряжения.

Трехфазные цепи – это частный случай многофазных систем.

Многофазной системой называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, отличающиеся одна от другой по фазе, и индуктируемые в одном источнике питания.

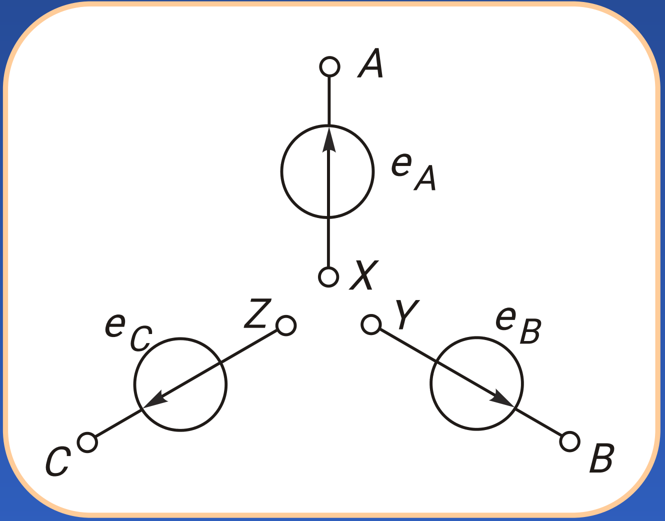
Каждую из цепей, входящих в многофазную систему, называют **фазой**.

Трехфазная цепь состоит из трех основных элементов: генератора, линии передачи и приемника.

Принцип действия и разметка зажимов фаз обмотки

Простейший трехфазный генератор состоит из неподвижной (статора) и подвижной (ротора) частей. Статор – это полый цилиндр, набранный из листов электротехнической стали. Ротор является электромагнитом. Его необходимо принудительно вращать.

При пересечении магнитными силовыми линиями поля ротора обмоток статора в последних наводятся ЭДС одинаковой величины с фазовым сдвигом 120^0. Такую систему называют **симметричной**.



Буквами A, B, C обозначают начала фаз обмоток; *X, Y, Z* – их концы

Способы изображения симметричной системы ЭДС

Графический

Симметричная система ЭДС – это три синусоиды.

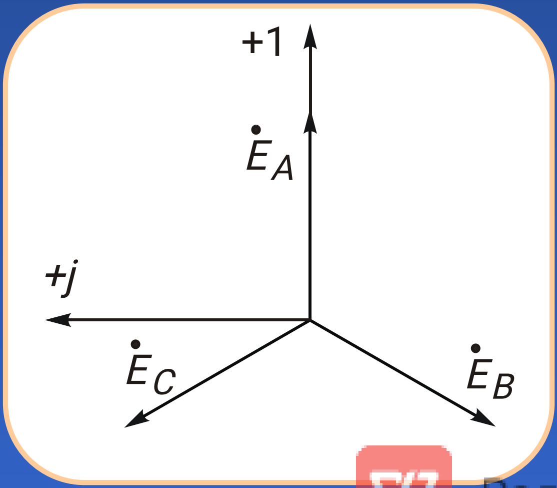
Тригонометрический

ЭДС можно записать как синусоидальные функции времени следующим образом:

$$e_A = E_m \sin \omega t, \qquad e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ), \qquad e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Вращающимися векторами в декартовой системе координат

Комплексными числами

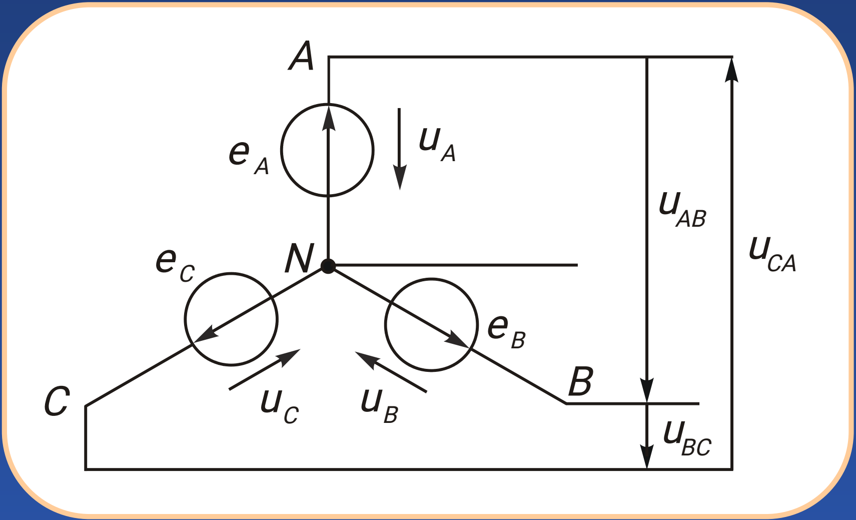


$$\dot{E}_A = E, \quad \dot{E}_B = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{-j120^\circ} = a^2 E,$$

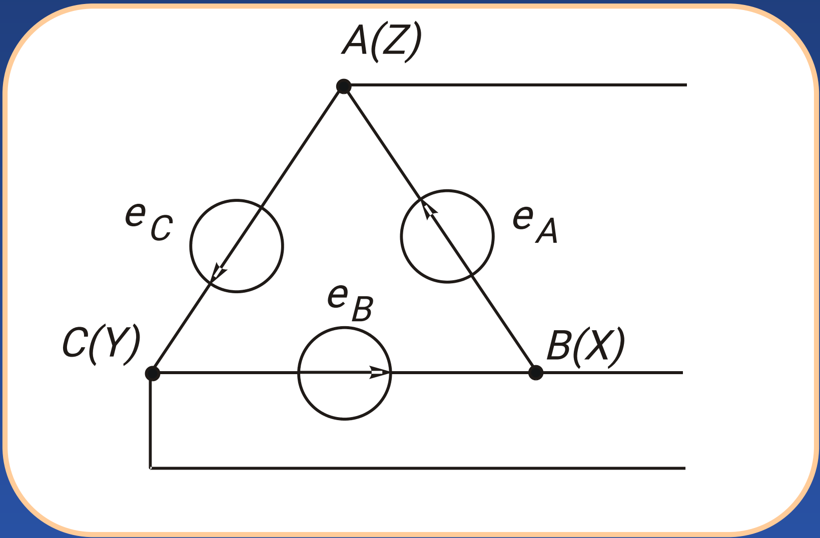
$$\dot{E}_C = E e^{j\frac{2\pi}{3}} = E e^{j120^\circ} = E e^{-j\frac{4\pi}{3}} = aE.$$

Способы соединения фаз обмоток генератора

Соединение звездой



Соединение треугольником



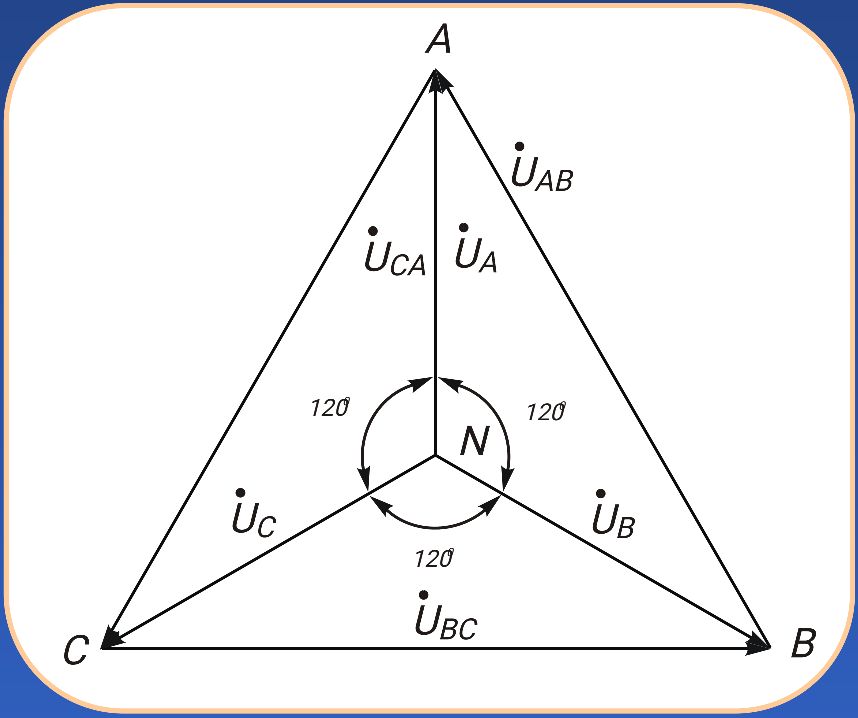
Получается при объединении концов фаз обмоток *X, Y, Z* в нейтральную точку *N*. Условное обозначение *Y*.

Получается при соединении начала одной фазы с концом другой. Условное обозначение∆.

Условные положительные направления фазных и линейных напряжений и соотношения между ними

Обычно обмотки генератора соединяют звездой. Напряжения между началом и концом фазы называют **фазными**, а напряжения между началами фаз генератора –**линейными.**

Топографическая диаграмма фазных и линейных напряжений



$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{A} - \dot{U}_{B},$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{B} - \dot{U}_{C},$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{C} - \dot{U}_{A}.$$

Трехфазные цепи бывают четырех- и трехпроводные. Фазы генератора и фазы приемника могут быть соединены по-разному.

Приемники, включаемые в трехфазную цепь, могут быть однофазными и трехфазными. Начала и концы фаз трехфазных приемников обозначают соответственно буквами *a, x; b, y; c, z.*

Трехфазные приемники могут быть симметричными и несимметричными. У **симметричных** приемников равны между собой комплексные сопротивления фаз:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c .$$

У несимметричного приемника нагрузка может быть равномерной, если сопротивления фаз равны между собой по величине (по модулю), или однородной, если

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c .$$

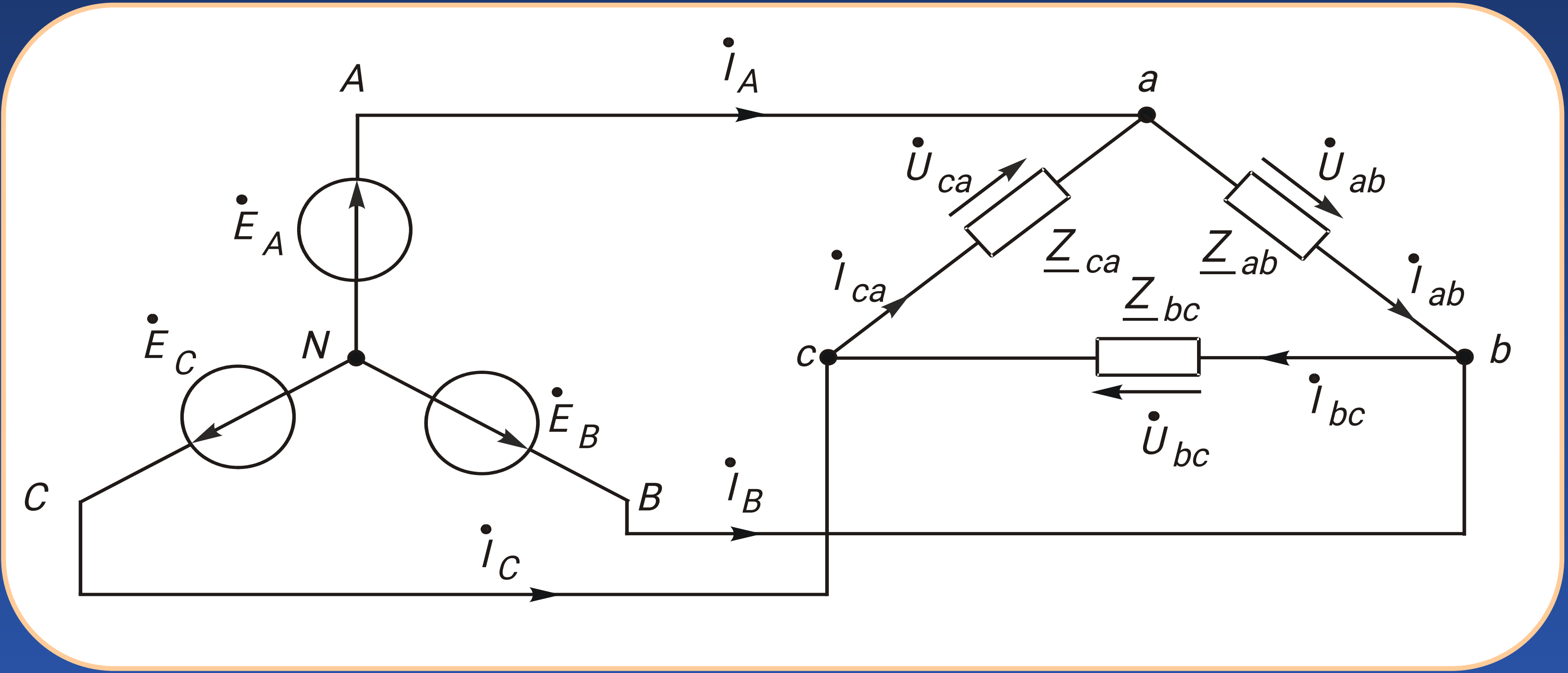
Вопросы для самопроверки

1. Перечислите преимущества трехфазных цепей.
2. Какие способы изображения симметричной системы ЭДС вы знаете?
3. Как получают соединение фаз обмоток генератора звездой и треугольником?
4. Какие напряжения называют фазными, какие – линейными?
5. Каково соотношение фазных и линейных напряжений при соединении фаз звездой и треугольником?
6. Какие трехфазные приемники называют симметричными?

Лекция № 11. Расчет трехфазных цепей

1. Соединение фаз приемника треугольником
2. Соединение звездой трехпроводной

Приемник несимметричный

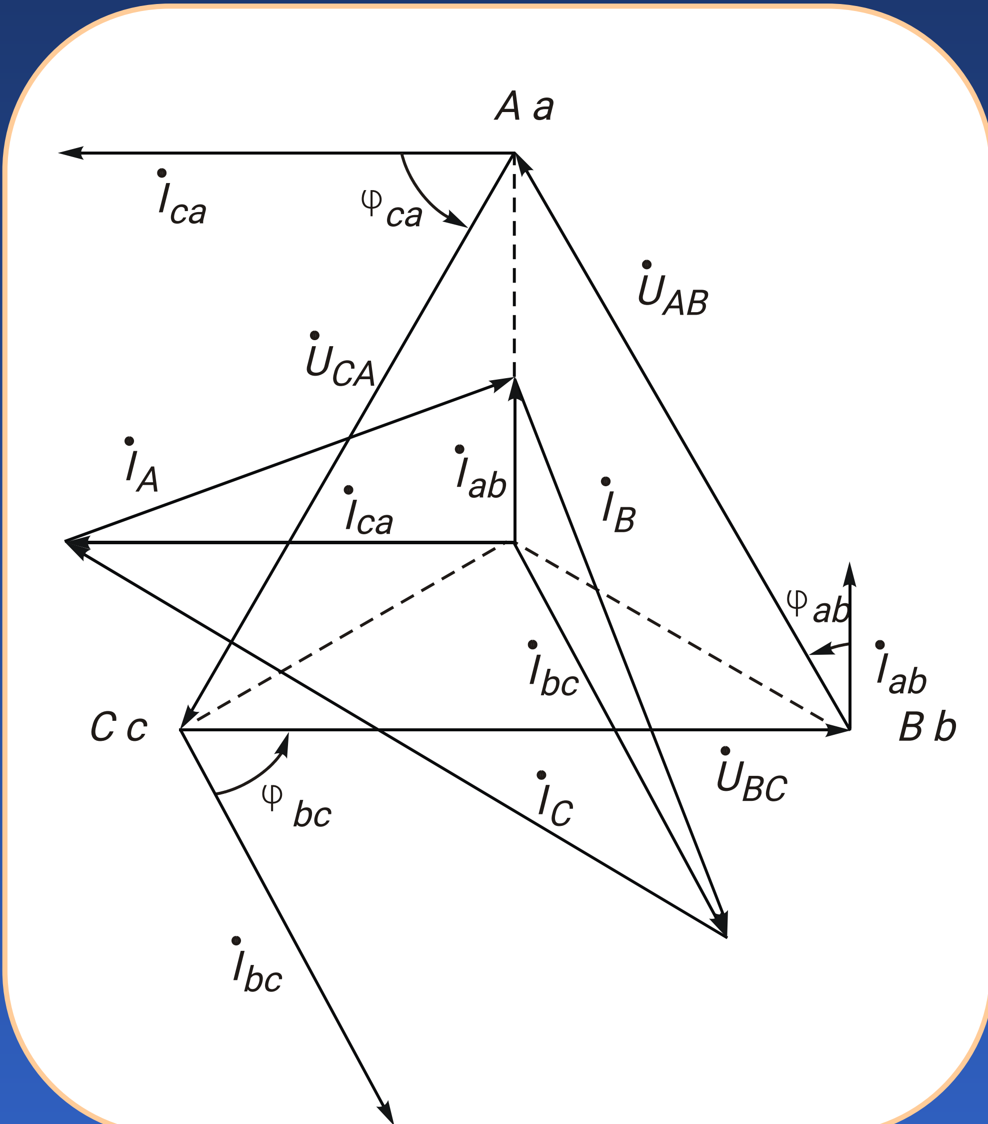


$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}, \qquad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}, \qquad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}},$$

$$\dot{I}_{A} = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \qquad \dot{I}_{B} = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab},$$

$$\dot{I}_{C} = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}, \qquad \dot{I}_{A} + \dot{I}_{B} + \dot{I}_{C} = 0.$$

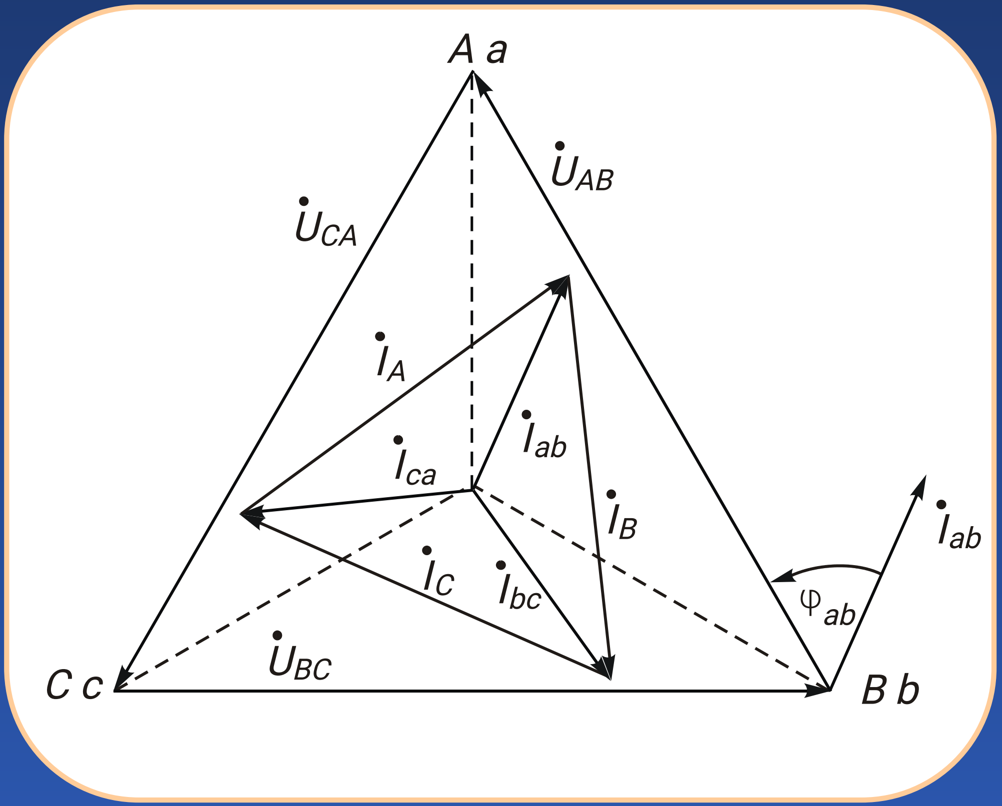
Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов



Построение начинают с топографической диаграммы напряжений генератора. Далее строят топографическую диаграмму напряжений приемника. Затем проводят векторы фазных токов под соответствующими углами
к векторам фазных напряжений.

Векторы фазных токов переносят в центр треугольника напряжений. Векторы линейных токов получают как геометрические разности соответствующих фазных токов.

Приемник симметричный

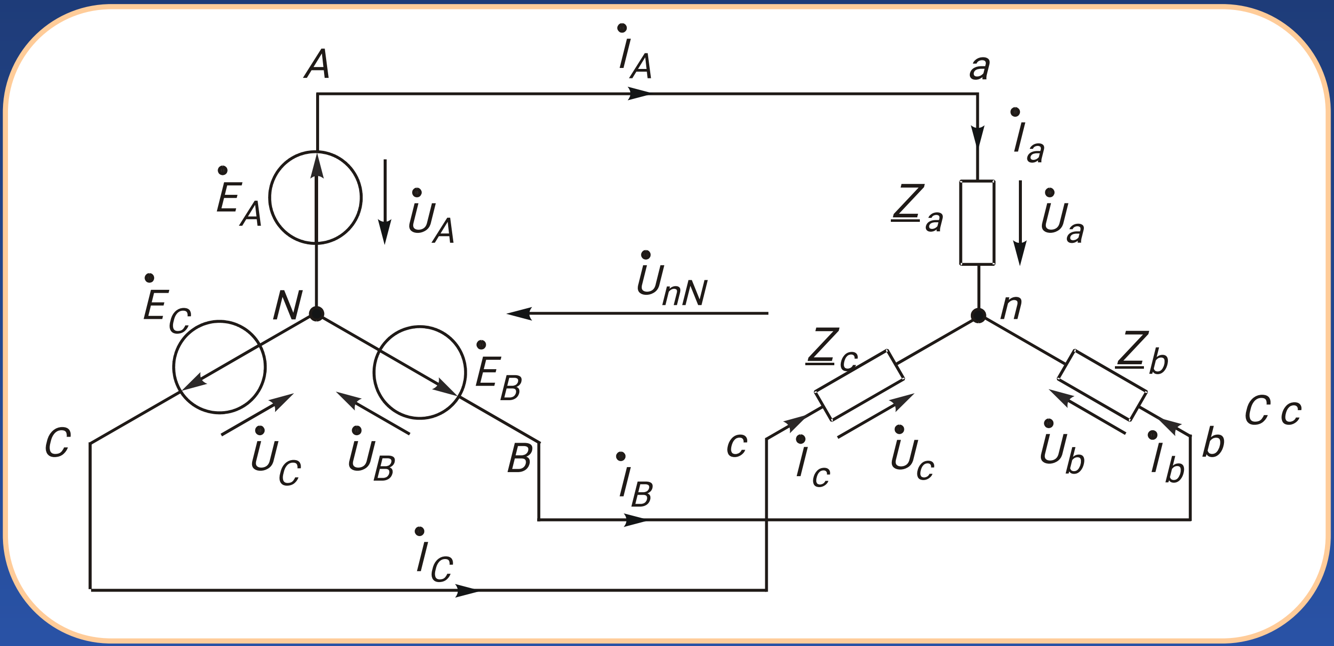


У симметричного приемника комплексные сопротивления фаз равны между собой

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca}.$$

$$\dot I_A = \sqrt{3}\,\dot I_{ab}\, e^{-j30^\circ}; \quad \dot I_B = \dot I_A\, e^{-j120^\circ}; \quad \dot I_C = \dot I_A\, e^{j120^\circ}.$$

Соединение звездой трехпроводной



Приемник несимметричный

Напряжение между нейтральными точками генератора и приемника можно вычислить по формуле

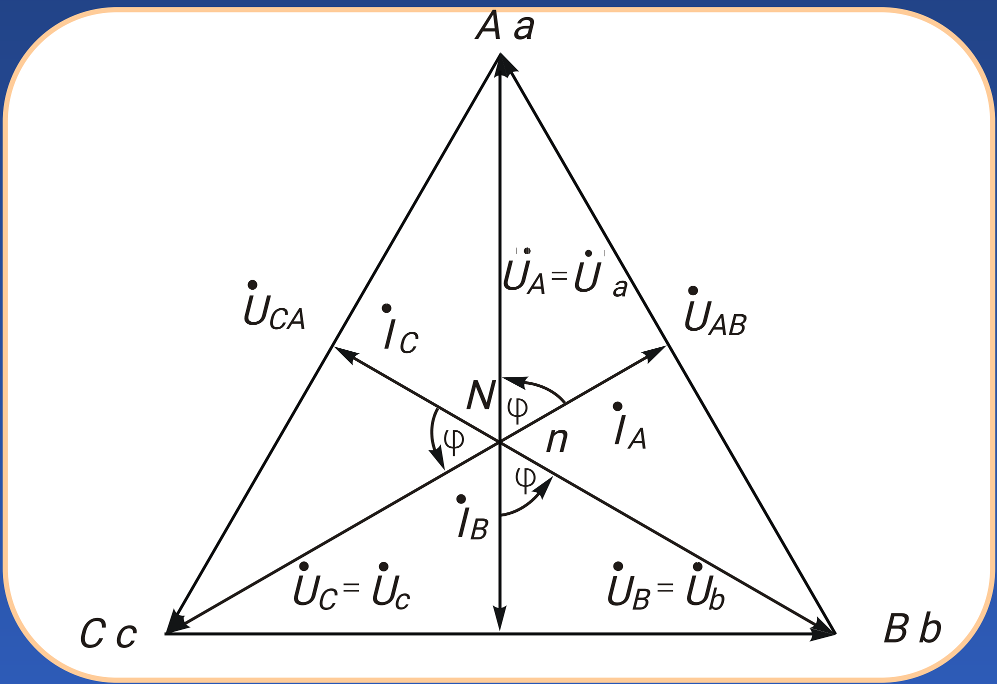
$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Линейные и равные им соответственно фазные токи можно определить по закону Ома для активной ветви:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a(\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}), \qquad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b(\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}), \qquad \dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c(\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}).$$

Приемник симметричный

Если приемник симметричный $(\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z},\ \underline{Y}_a = \underline{Y}_b = \underline{Y}_c = \underline{Y})$, напряжение между нейтральными точками генератора и приемника не возникает.



$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a},$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ},$$

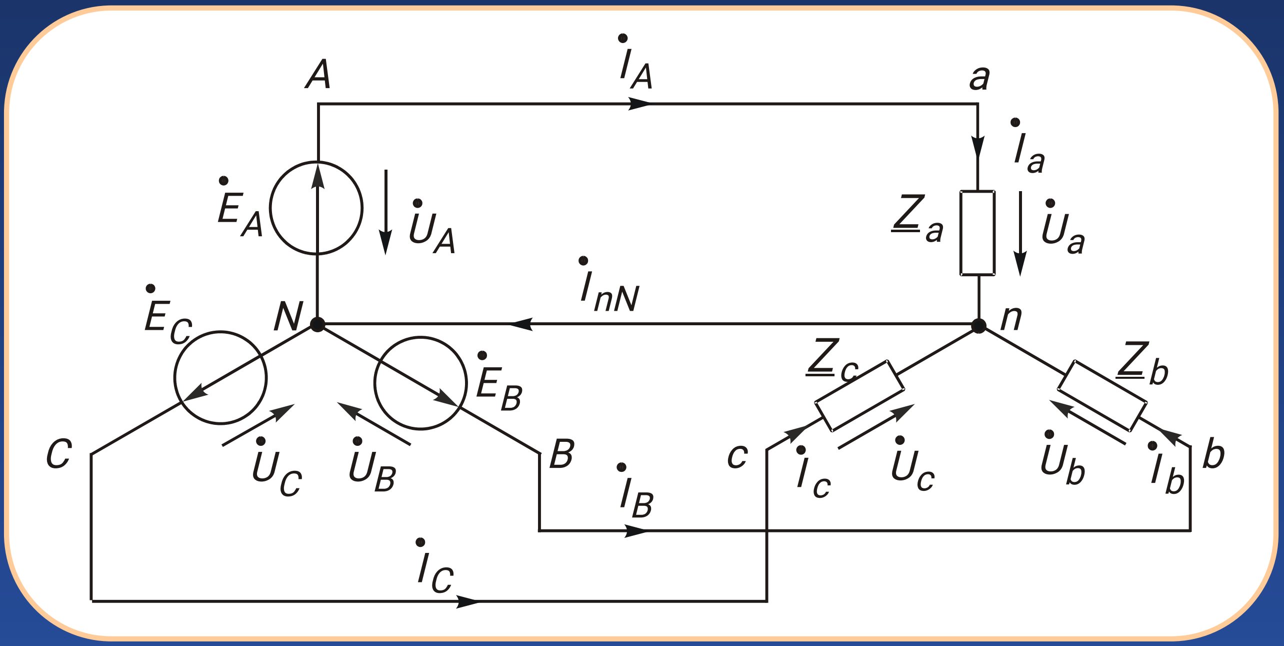
$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ}.$$

Вопросы для самопроверки

1. По каким законам вычисляют токи при соединении фаз приемника треугольником?
2. Чему равно напряжение на фазе приемника при соединении его треугольником?
3. Каков порядок построения векторно-топографической диаграммы при соединении фаз приемника треугольником?
4. Каково соотношение фазного и линейного токов при симметричном приемнике, соединенном треугольником?
5. Каким методом рассчитывают токи при соединении звездой трехпроводной?
6. Что назвали напряжением смещения нейтрали?
7. Каков порядок построения векторно-топографической диаграммы при несимметричном приемнике?
8. Чему равно напряжение на фазе симметричного приемника при соединении звездой трехпроводной?

Лекция № 12. Расчет трехфазных цепей (продолжение)

1. Соединение звездой четырехпроводной с нейтральным проводом без сопротивления
2. Мощности трехфазных цепей
3. Способы измерения активной мощности



Приемник несимметричный

Линейные и фазные токи определяют по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_b}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_c}.$$

Ток в нейтральном проводе: $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c.$

Приемник симметричный

Если приемник симметричный, токи в фазах и линиях равны между собой по величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на 120°. Достаточно вычислить только один ток:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}.$$

Тогда

$$\dot{I}_B = \dot{I}_b = \dot{I}_a e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{I}_A, \qquad \dot{I}_C = \dot{I}_c = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = a \dot{I}_A.$$

Ток в нейтральном проводе:

$$\dot{I}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0.$$

Мощности *p, P* и *Q* находят как суммы мощностей трех фаз:

$$p = \sum p_ф, \quad P = \sum P_ф, \quad Q = \sum Q_ф.$$

Потребляемой является активная мощность. Активную мощность фазы проще всего определить по формуле

$$P_ф = U_ф I_ф \cos\varphi_ф = R_ф I_ф^2.$$

Реактивную мощность фазы ищут следующим образом:

$$Q_ф = U_ф I_ф \sin\varphi_ф = X_ф I_ф^2.$$

Полную мощность трехфазной цепи вычисляют как гипотенузу суммарного треугольника мощностей:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(\sum P_ф)^2 + (\sum Q_ф)^2}.$$

$$P = \sqrt{3} U_л I_л \cos\varphi_ф, \qquad Q = \sqrt{3} U_л I_л \sin\varphi_ф, \qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} U_л I_л.$$

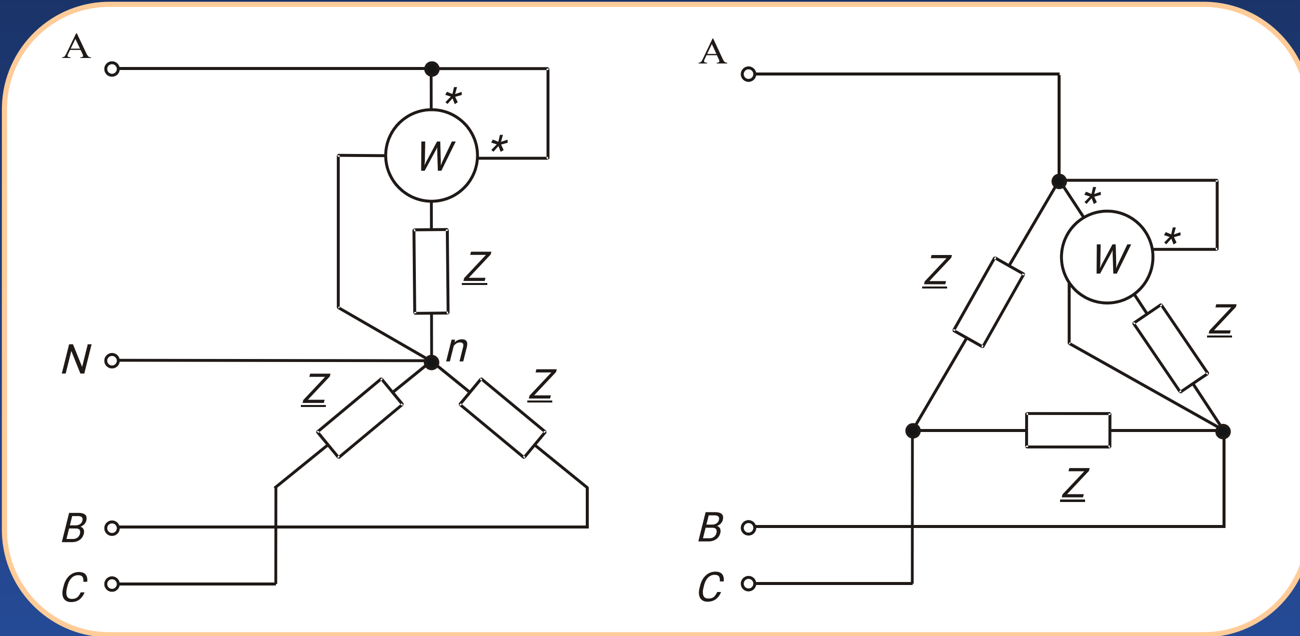
Для измерения активной мощности используют ваттметры. Число ваттметров и способ их включения зависят от способа соединения фаз приемника и от их параметров.

Ваттметр показывает активную мощность, которую вычисляют по формуле

$$P_W = U_W \cdot I_W \cos\left(\dot{U}_W \,\widehat{\ }\, \dot{I}_W\right) = \mathrm{Re}\,(\underline{S}_W) = \mathrm{Re}\left(\dot{U}_W \cdot \overset{*}{I}_W\right).$$

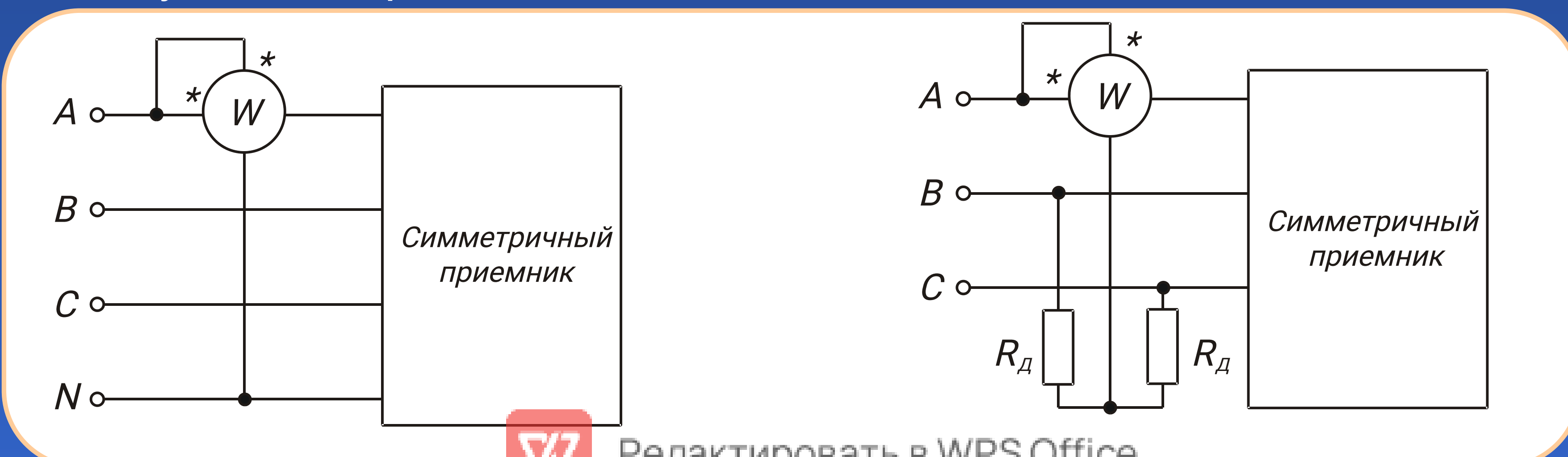
Угол сдвига фаз между ними соответствует одинаковым положительным направлениям, отмеченным звездочками.

Способ одного ваттметра

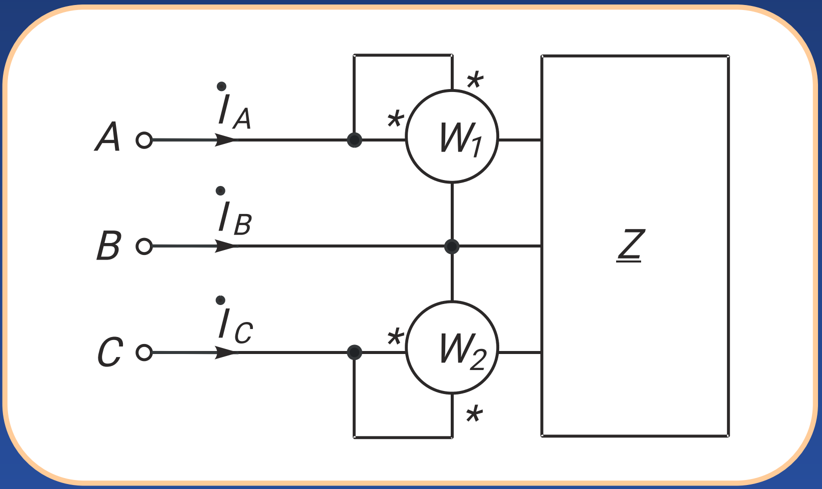


Применяют при симметричной нагрузке

Если фаза приемника недоступна, можно подключить следующим образом:



Способ двух ваттметров



Применяют в трехпроводной цепи при несимметричной нагрузке.

$$\underline{S} = \underline{S}_{W_1} + \underline{S}_{W_2} = \dot{U}_{AB} \cdot \overset{*}{I}_A + \dot{U}_{CB} \cdot \overset{*}{I}_C =$$

$$= (\dot{U}_A - \dot{U}_B)\, \overset{*}{I}_A + (\dot{U}_C - \dot{U}_B)\, \overset{*}{I}_C =$$

$$= \dot{U}_A \overset{*}{I}_A + \dot{U}_B \left(-\overset{*}{I}_A - \overset{*}{I}_C \right) + \dot{U}_C \overset{*}{I}_C =$$

$$= \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C .$$

Способ трех ваттметров

Применяют в четырехпроводной цепи при несимметричной нагрузке. Каждый ваттметр измеряет активную мощность одной фазы. Мощность системы определяют как сумму показаний ваттметров. Метод громоздкий и неудобный.

Измерение трехфазным ваттметром

Представляет из себя конструктивное сочетание трех однофазных ваттметров. Суммирование их показаний происходит автоматически.

Применение измерительных комплексов

Представляется наиболее удобным. Измерительные комплексы снабжены амперметром, вольтметром и ваттметром. При переключении тумблера происходит подключение измерительных приборов на разные фазы.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равно напряжение на фазе приемника при соединении звездой четырехпроводной с нейтральным проводом без сопротивления?
2. Как вычислить ток в нейтральном проводе?
3. Каков алгоритм построения векторно-топографической диаграммы при соединении звездой четырехпроводной с нейтральным проводом без сопротивления?
4. Какие мощности различают в трехфазных цепях?
5. Какие способы измерения активной мощности Вы знаете?
6. В каких цепях для измерения активной мощности применяют метод двух ваттметров?

Лекция № 13. Электрические цепи при несинусоидальных периодических воздействиях

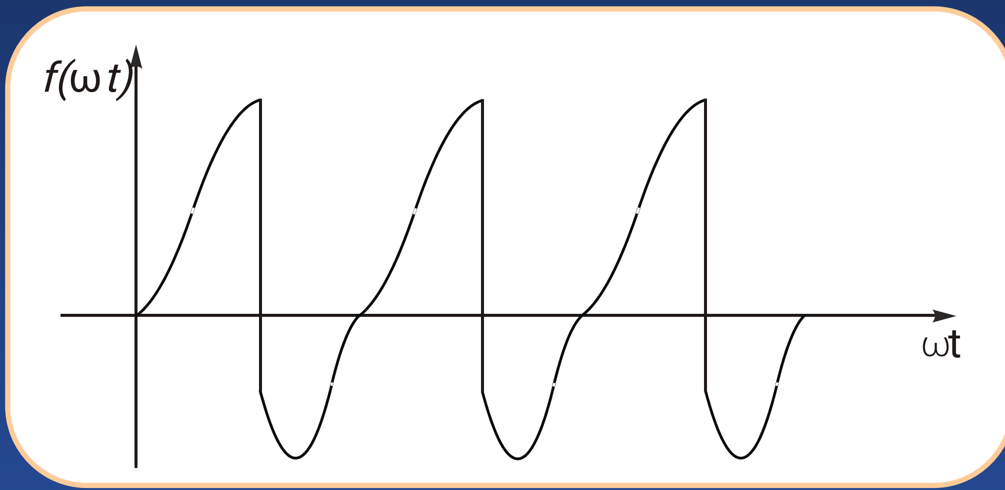
1. Причины возникновения
2. Способы изображения несинусоидальных периодических функций
3. Действующие значения несинусоидальных периодических токов и напряжений
4. Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции
5. Мощности в цепях несинусоидального тока
6. Расчет однофазных цепей при несинусоидальных периодических воздействиях

Несовершенство промышленных генераторов электрической энергии.

Существование генераторов специальных, отличных от синусоиды, форм сигналов.

Наличие в цепях нелинейных элементов, искажающих форму синусоидальных кривых электрических величин.

Графический



Аналитический

Если периодическая функция удовлетворяет условию Дирихле (на всяком конечном интервале имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число экстремумов), то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \ldots A_{\kappa m}\sin(\kappa\omega t + \psi_\kappa) + \ldots .$$

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называют ее **дискретным частотным спектром**.

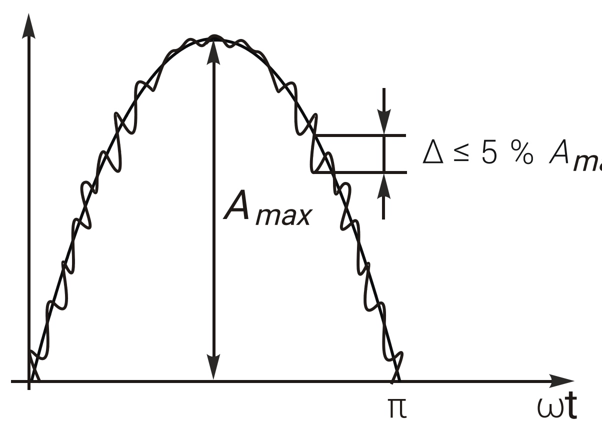
Первую гармонику ряда называют **основной**, остальные – **высшими**.

Действующее значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}, \qquad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}$$

Действующие значения напряжения и ЭДС определяют аналогично:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots}, \qquad E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \ldots}\ .$$



Практической синусоидой называют такую кривую, у которой разность между соответствующими точками кривой и ее первой гармоники не превышает 5 % от максимального значения.

Коэффициент амплитуды определяют как отношение максимального значения к действующему:

$$k_a = \frac{A_{max}}{A}.$$ Для синусоиды $$k_a = \sqrt{2} = 1,41.$$

Коэффициент искажения – это отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей кривой:

$$k_u = \frac{A_1}{A}.$$ Для синусоиды $$k_u = 1.$$

Коэффициент формы – это отношение действующего к среднему по модулю значению:

$$k_ф = \frac{A}{A_{ср}}.$$ Для синусоиды $$k_ф = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Активную мощность получают суммированием активных мощностей всех подсхем:

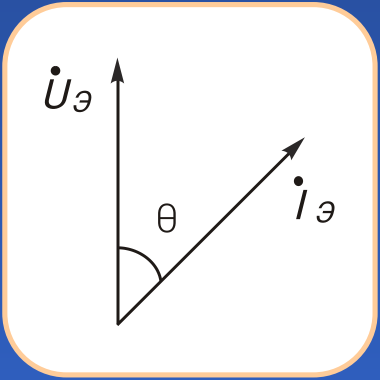
$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots P_к + \ldots$$ [P] = Вт.

Реактивную мощность вычисляют суммированием реактивных мощностей подсхем с синусоидальными токами:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots Q_к + \ldots$$ [Q] = ВАР

Полную мощность определяют как произведение действующих значений напряжения и тока в схеме: *S = UI*. [S] = ВА

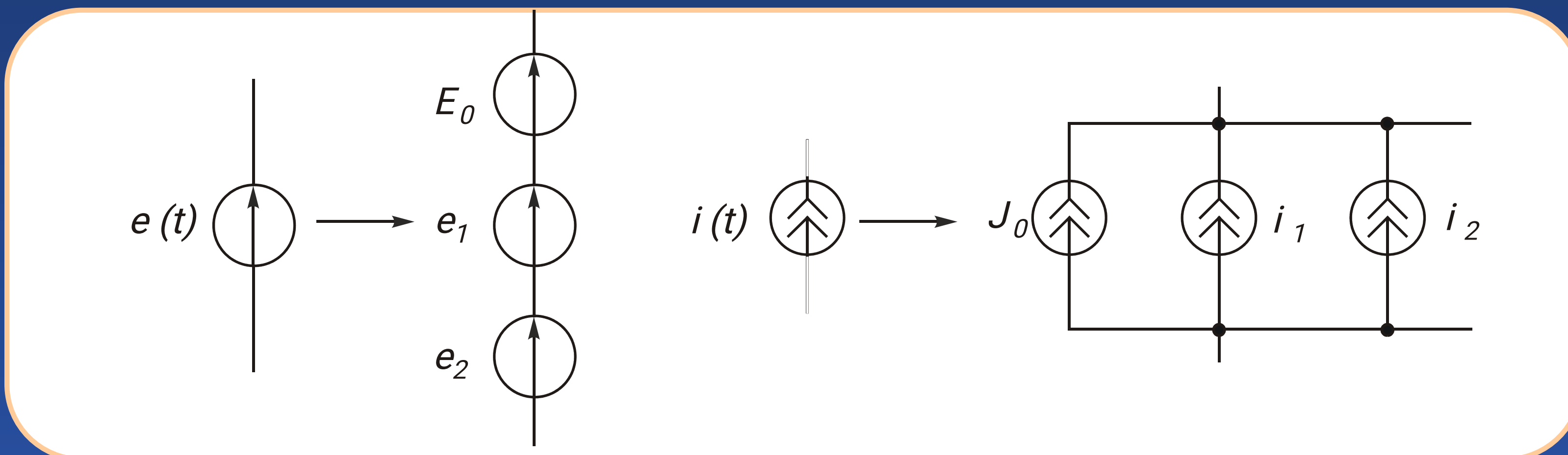
Мощность искажения: $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$



Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности и иногда приравнивают к косинусу некоторого условного угла θ:

$$\chi = \frac{P}{S} = \cos\theta.$$

Источник несинусоидальной ЭДС представим как ряд последовательно соединенных источников ЭДС. Источник несинусоидального тока – как ряд параллельно соединенных источников тока с разной частотой.



При расчете применяют метод наложения. Рационально разбить схему на столько подсхем, сколько частот получается при разложении в ряд Фурье несинусоидальных ЭДС и токов.

Действующие значения токов, напряжений и ЭДС определяют через соответствующие действующие значения в подсхемах по формулам:

$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots I_к^2 + \ldots}$, $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots U_к^2 + \ldots}$, $E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \ldots + E_к^2 + \ldots}$

Активная мощность $P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_к + \ldots$

Вопросы для самопроверки

1. Каковы причины возникновения несинусоидальных периодических токов и напряжений?
2. Что представляет собой ряд Фурье?
3. Что называют дискретным частотным спектром?
4. Чему равно действующее значение несинусоидальной периодической функции?
5. Что называют практической синусоидой?
6. Что называют эквивалентной синусоидой?
7. Как вычисляют активную, реактивную и полную мощности в цепях с несинусоидальными периодическими воздействиями?
8. Что называют мощностью искажения?
9. Какой метод используют для расчета цепей при несинусоидальных периодических воздействиях?

Лекция № 14. Классический метод расчета переходных процессов

1. Основные понятия. Законы коммутации
2. Суть классического метода расчета переходных процессов
3. Подключение реального конденсатора к источнику постоянного напряжения
4. Определение длительности переходного процесса

Если в электрической цепи есть конденсаторы и индуктивные катушки, то при переходе от одного установившегося режима к другому наблюдается **переходный процесс**. Сам процесс изменения режима работы цепи (включение или выключение рубильника) в электротехнике называют **коммутацией**.

Последовательность событий такова: установившийся режим ʼn коммутация ʼn переходный процесс ʼn новый установившийся режим.

Переходные процессы подчиняются двум законам коммутации.

Первый закон коммутации: ток в ветви с индуктивной катушкой не может измениться скачком:

$$i_L(0-) = i_L(0+).$$

Второй закон коммутации: напряжение на конденсаторе не может измениться скачком:

$$u_C(0-) = u_C(0+).$$

Составим систему уравнений электрического состояния в дифференциальной форме для схемы замещения электрической цепи.

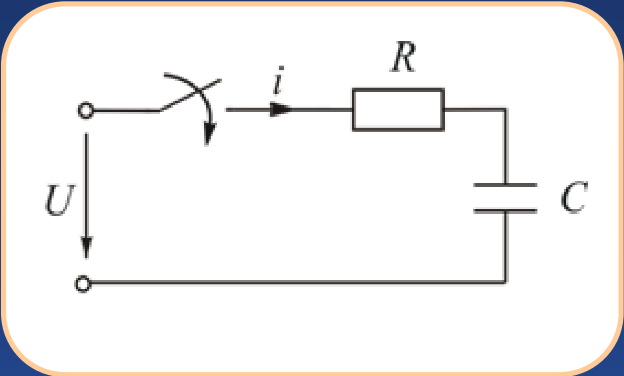
Как известно из математики, решение полученной системы линейных дифференциальных неоднородных уравнений есть сумма двух слагаемых: частного решения неоднородных уравнений и общего решения однородных уравнений.

В качестве **частного решения** берут **принужденный** режим, вызываемый внешними источниками энергии.

Общее решение однородного уравнения характеризует процессы, происходящие в цепи при отсутствии внешних источников энергии. Составляющие токов и напряжений, найденные в результате общего решения однородных уравнений, называют **свободными.**

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}; \qquad u = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}.$$

Когда свободные составляющие станут равны нулю, переходный процесс закончится. Отсюда следует, что **принужденный режим – это новый установившийся режим после переходного процесса**.



1. Составим систему уравнений электрического состояния. Так как схема одноконтурная, то можно написать только одно уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U.$$

Ищем решение этого уравнения как сумму двух слагаемых: $u_C=u_{C\,пр}+u_{C\,св}$.

Найдем $u_{C\,пр}$. $u_{C\,пр}=U$.

Вычислим $u_{C\,св}$. Из математики известно, что свободные составляющие меняются по экспоненциальному закону:

$$u_{C\,св}=Ae^{pt}.$$

- Определим показатель степени *p*, который является корнем характеристического уравнения.

$$RC\frac{du_{C\,св}}{dt}+u_{C\,св}=0, \qquad RCp+1=0, \qquad p=-\frac{1}{RC}.$$

- Определим постоянную интегрирования *A*.

Постоянные интегрирования определяют из начальных условий с использованием законов коммутации.

Уравнение, по которому проводим решение, справедливо для любого момента времени, следовательно, и для начального:

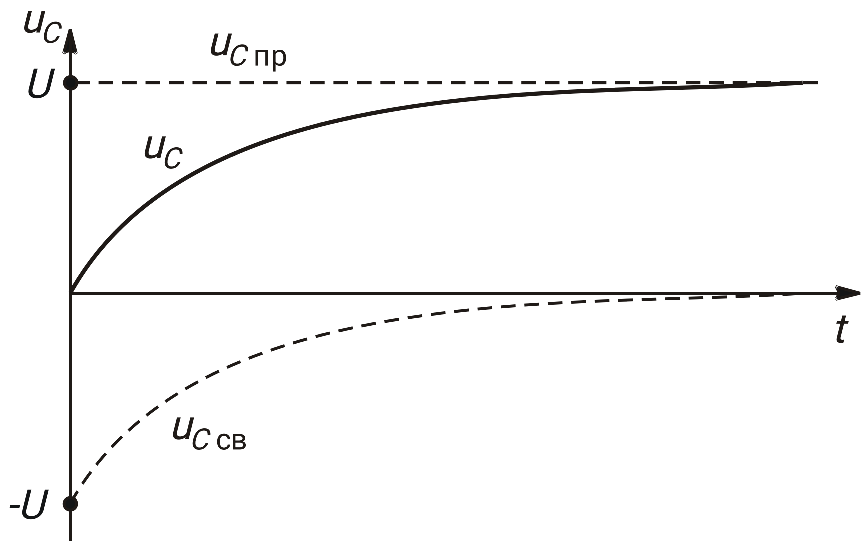
$$u_C(0+) = u_{C\,пр}(0+) + u_{C\,св}(0+).$$

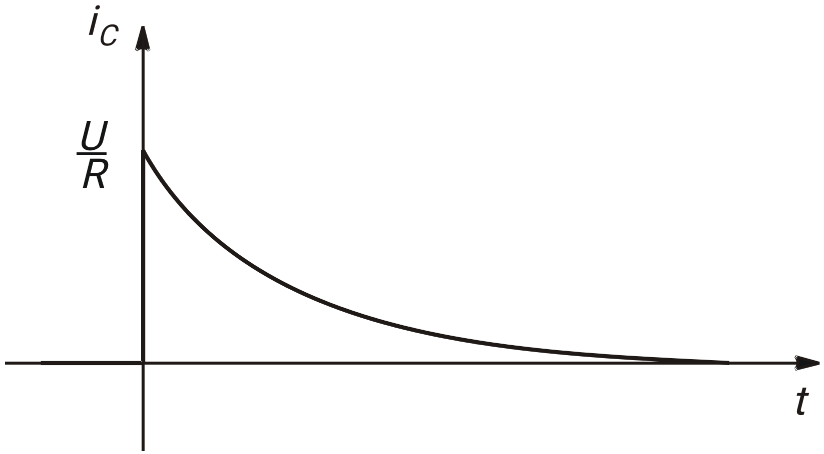
$$u_C(0+) = u_C(0-) = 0, \qquad u_{C\,пр}(0+) = U, \qquad u_{C\,св} = Ae^{pt} = A, \qquad A = -U.$$

Тогда закон изменения напряжения: $u_C = U - Ue^{-\frac{1}{RC}t}.$

Подключение реального конденсатора к источнику постоянного напряжения

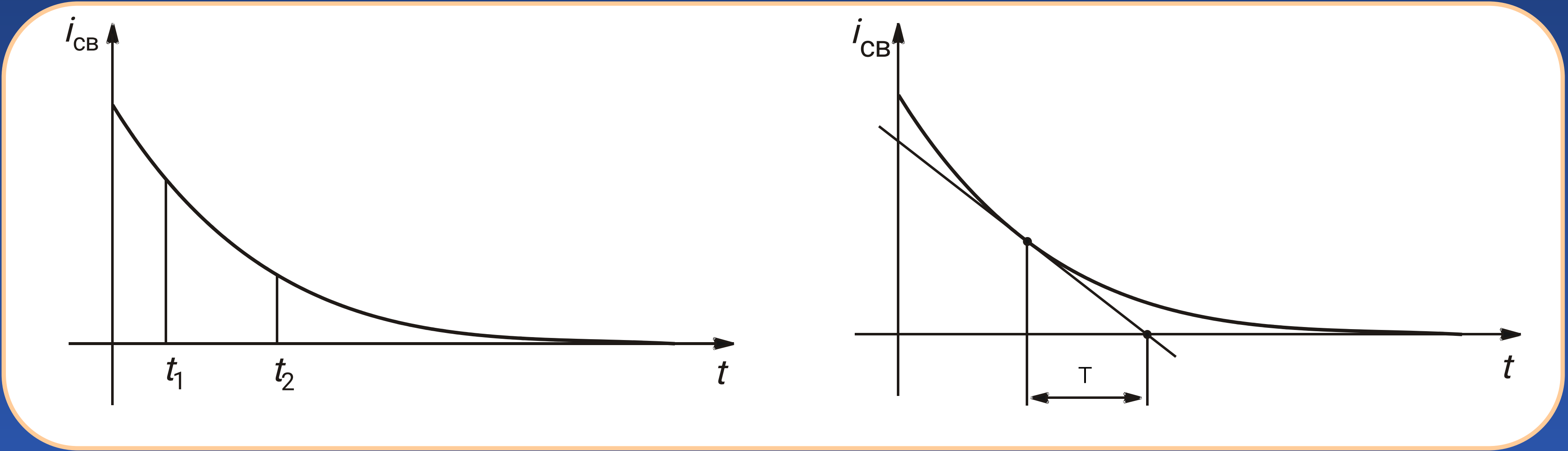
Закон изменения тока: $i = \dfrac{U - u_C}{R} = \dfrac{U - U + U e^{-\frac{1}{RC}t}}{R} = \dfrac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$





Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Практически переходный процесс заканчивается через (3–5) t.

Постоянная времени – это время, в течение которого свободные составляющие уменьшаются τ в *e* раз.



Постоянной времени можно дать геометрическую интерпретацию: τ – это величина подкасательной к любой точке экспоненты.

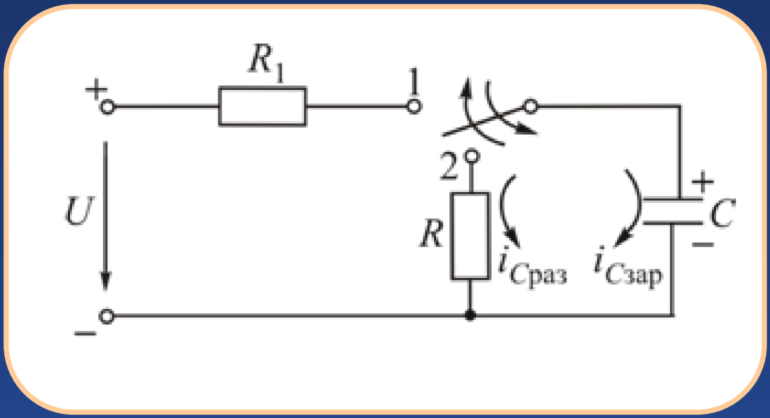
Поэтому можно определить постоянную времени по известному графику изменения свободной составляющей и неизвестным параметрам схемы.

Вопросы для самопроверки

1. Какие законы коммутации Вы знаете?
2. Как доказывают законы коммутации?
3. В чем суть классического метода расчета переходных процессов?
4. За счет чего возникают принужденные составляющие токов и напряжений?
5. Какие процессы характеризует общее решение однородного уравнения?
6. По какому закону меняются свободные составляющие?
7. Как составить характеристическое уравнение для неразветвленной цепи?
8. Сколько длится переходный процесс?
9. Каков физический смысл постоянной времени τ?
10. Как графически определить постоянную времени τ ?

Лекция № 15. Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом

1. Разряд конденсатора на резистор
2. Подключение реальной катушки к источнику постоянного напряжения
3. Короткое замыкание индуктивной катушки
4. Подключение реальной индуктивной катушки к источнику синусоидального напряжения
5. Учет первого закона коммутации на практике



В положении ключа 1 происходит уже рассмотренный процесс заряда конденсатора до напряжения источника U с постоянной времени $\tau_{зар} = R_1 C$.

При положении ключа 2 конденсатор разряжается на резистор сопротивлением R.

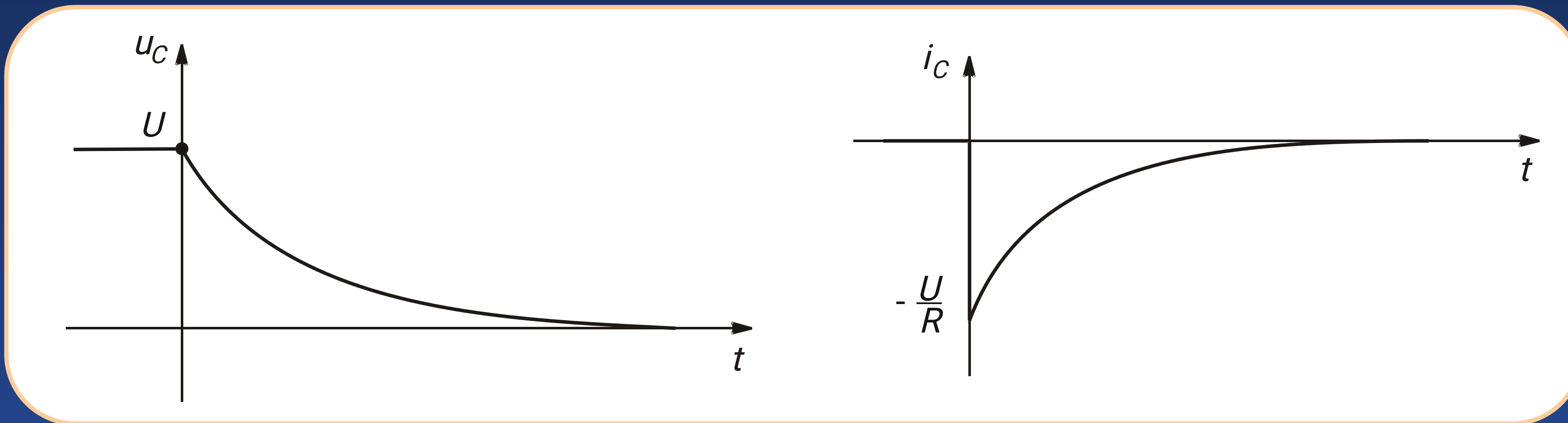
Напряжение на конденсаторе при его разряде меняется по закону

$$u_C = U e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

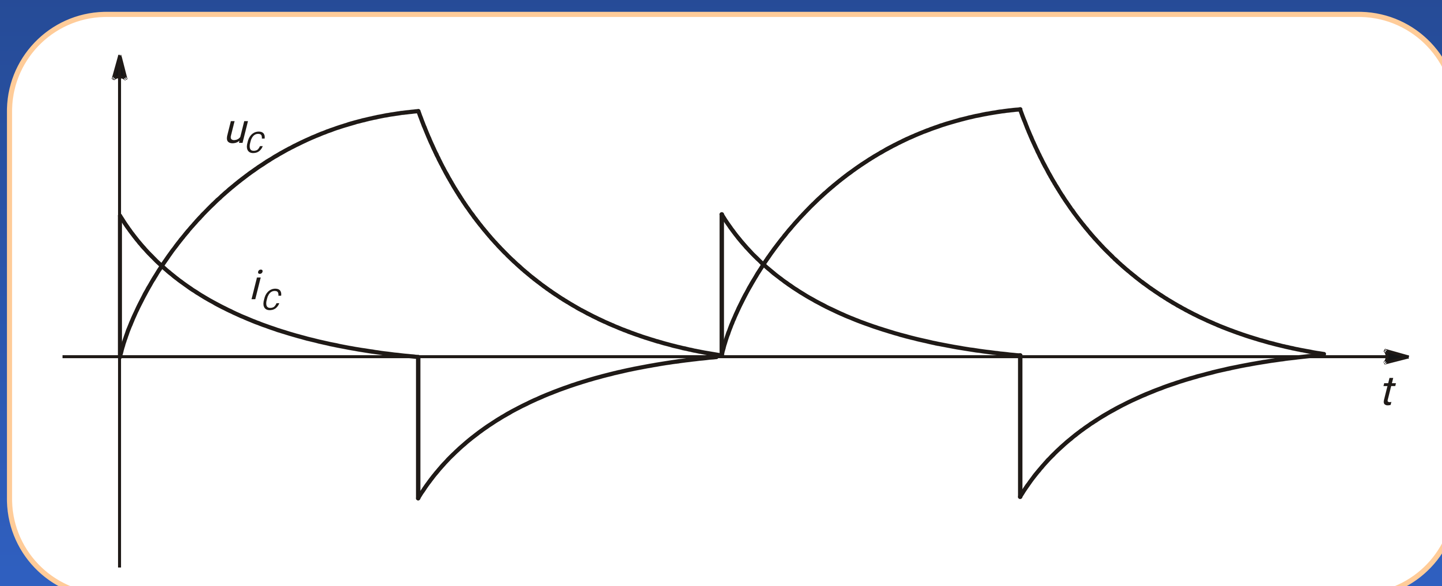
Ток разряда конденсатора:

$$i_C = -\frac{u_C}{R} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

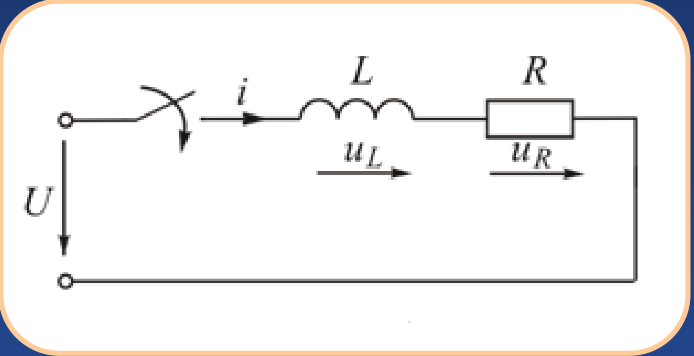
Разряд конденсатора на резистор



При периодическом переключении рубильника из положения 1 в положение 2 и обратно графики будут иметь вид:



Подключение реальной катушки к источнику постоянного напряжения

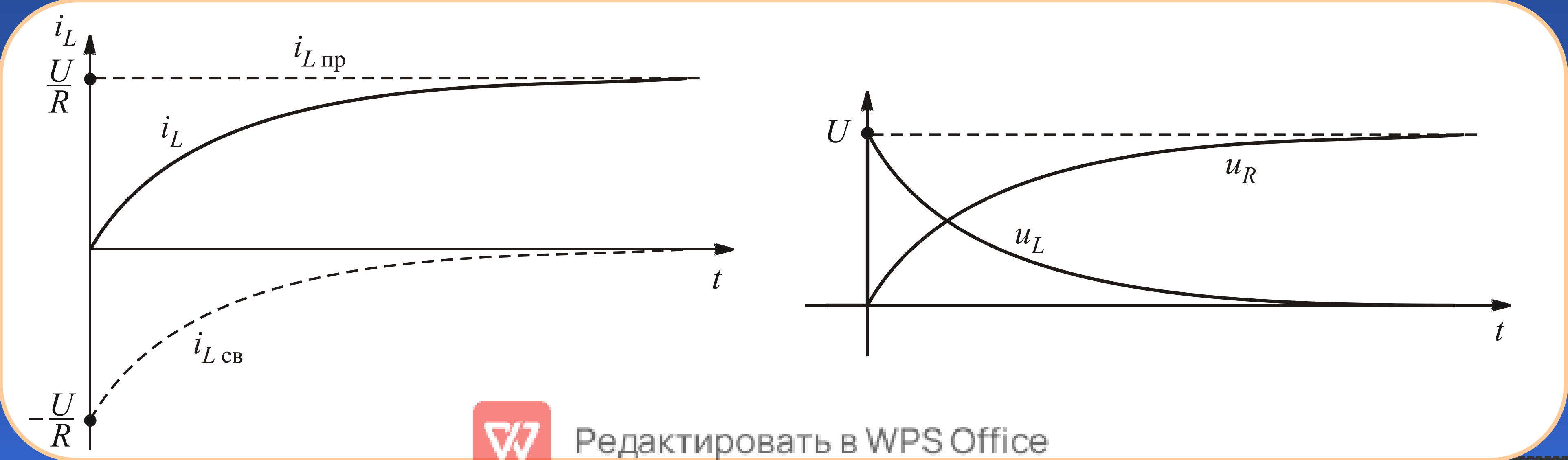


Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

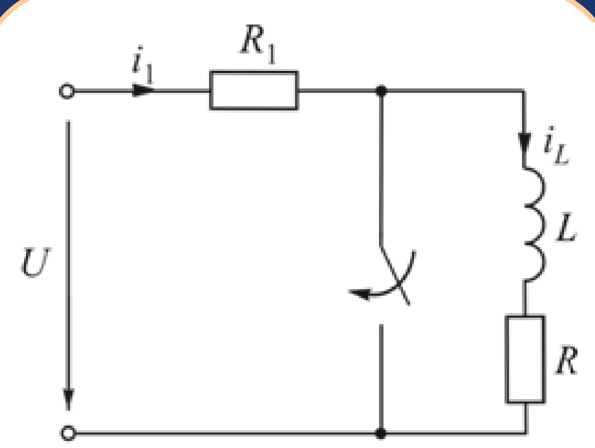
$$L\frac{di_L}{dt} + R i_L = U .$$

Закон изменения тока: $i_L = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} .$

Закон изменения напряжения: $u_L = L\frac{di_L}{dt} = L\frac{U}{R}\cdot\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = U e^{-\frac{R}{L}t} .$



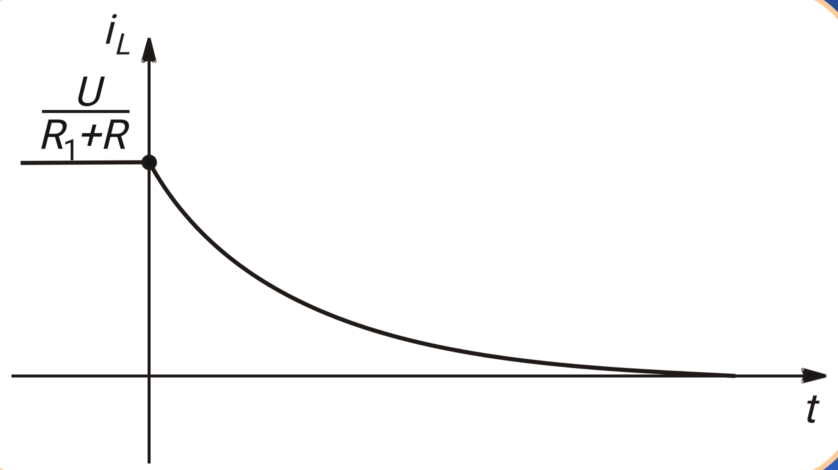
Короткое замыкание индуктивной катушки

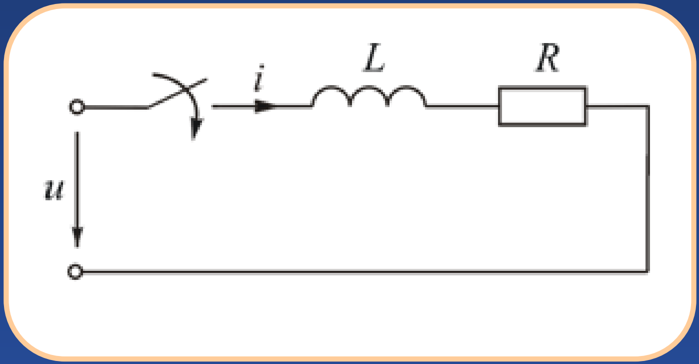


До замыкания ключа в индуктивной катушке был ток от источника энергии. После коммутации входной ток будет замыкаться по закоротке.

Закон изменения тока:

$$i_L = \frac{U}{R_1 + R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$





Входное напряжение

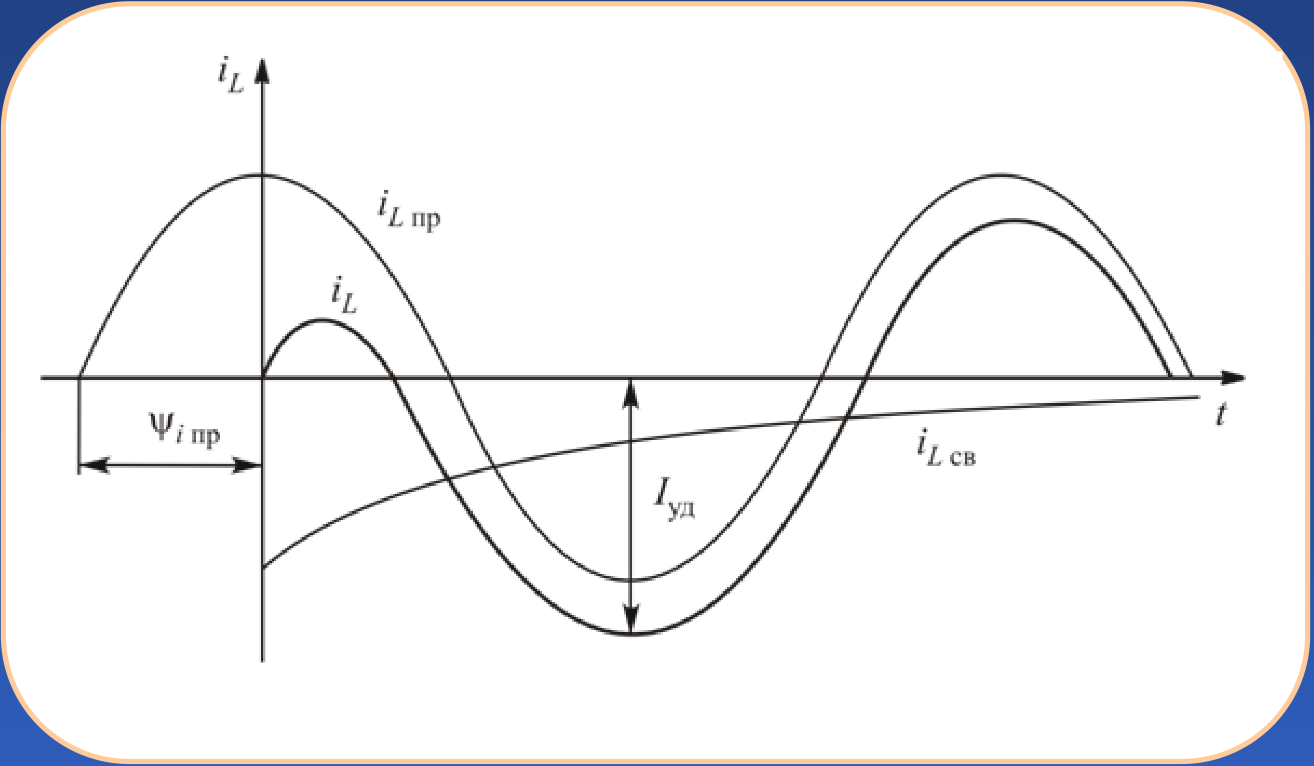
$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

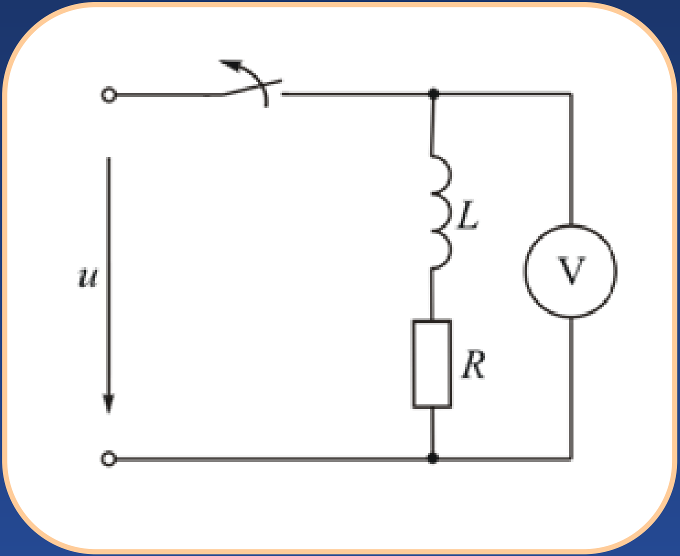
Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$L \frac{di_L}{dt} + R i_L = u.$$

Закон изменения тока

$$i_L = I_{L m \text{пр}} \sin(\omega t + \psi_{i\ \text{пр}}) - I_{L m\ \text{пр}} \sin \psi_{i\ \text{пр}} e^{-\frac{R}{L}t}.$$





В момент, наступивший сразу после коммутации, ток останется тем же, что и до коммутации. На месте разрыва возникает перенапряжение, так как сопротивление воздушного промежутка велико. Это приводит к пробою, появляется искрение (электрическая дуга), портящее оборудование.

Ситуация ухудшается, если к зажимам индуктивной катушки подключен вольтметр. Сопротивление вольтметра велико, ток в нем при нормальной работе мал. При размыкании ключа большой ток индуктивной катушки, который не может измениться скачком, будет замыкаться через вольтметр, сопротивление которого все же меньше, чем у воздушного промежутка.

На вольтметре возникает перенапряжение, прибор может выйти из строя. Такое же напряжение будет и на индуктивной катушке, что может привести к пробою ее изоляции.

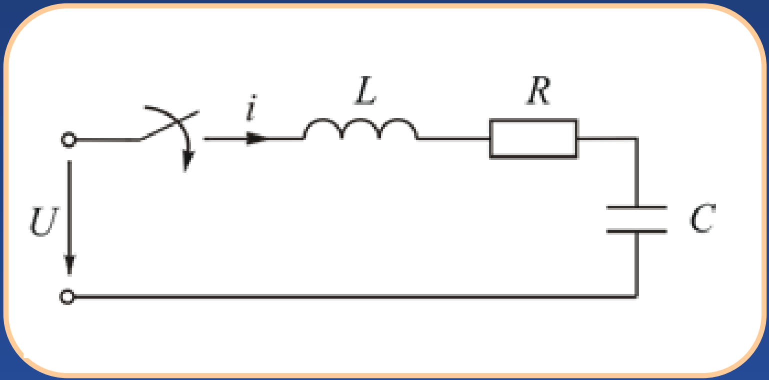
Поэтому нельзя отключать незашунтированную катушку с током. Сначала нужно убрать напряжение либо параллельно подключить ветвь для замыкания тока катушки.

Вопросы для самопроверки

1. Какова простейшая схема генератора пилообразного напряжения?
2. Как необходимо учитывать первый закон коммутации на практике?
3. Какой закон коммутации выполняется в *RL*-цепях?
4. Какой режим работы цепи назвали принужденным?
5. Как определить постоянную интегрирования?
6. Как изменяются графики при изменении значений *R* и *L*?
7. Каково перераспределение токов после короткого замыкания индуктивной катушки?
8. Чем принципиально отличаются законы изменения тока при подключении индуктивной катушки к источникам постоянного и синусоидального напряжения?
9. В каком случае при подключении индуктивной катушки к источнику синусоидального напряжения переходный процесс не возникает?
10. Какой ток называют ударным?

Лекция № 16. Переходные процессы в цепях с двумя реактивными элементами

1. Подключение цепи с последовательным соединением реальной индуктивной катушки и конденсатора к источнику постоянного напряжения.
2. Апериодический переходный процесс.
3. Критический переходный процесс.
4. Колебательный переходный процесс.



Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = U\ .$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{U}{LC}.$$

Составим характеристическое уравнение на основе уравнения электрического состояния:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Его корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от параметров схемы возможны три вида корней характеристического уравнения.

Если $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, корни будут действительными и разными. Такой случай переходного процесса называют апериодическим.

При этом закон изменения свободной составляющей представляет собой сумму двух экспонент:

$$u_{C\,\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

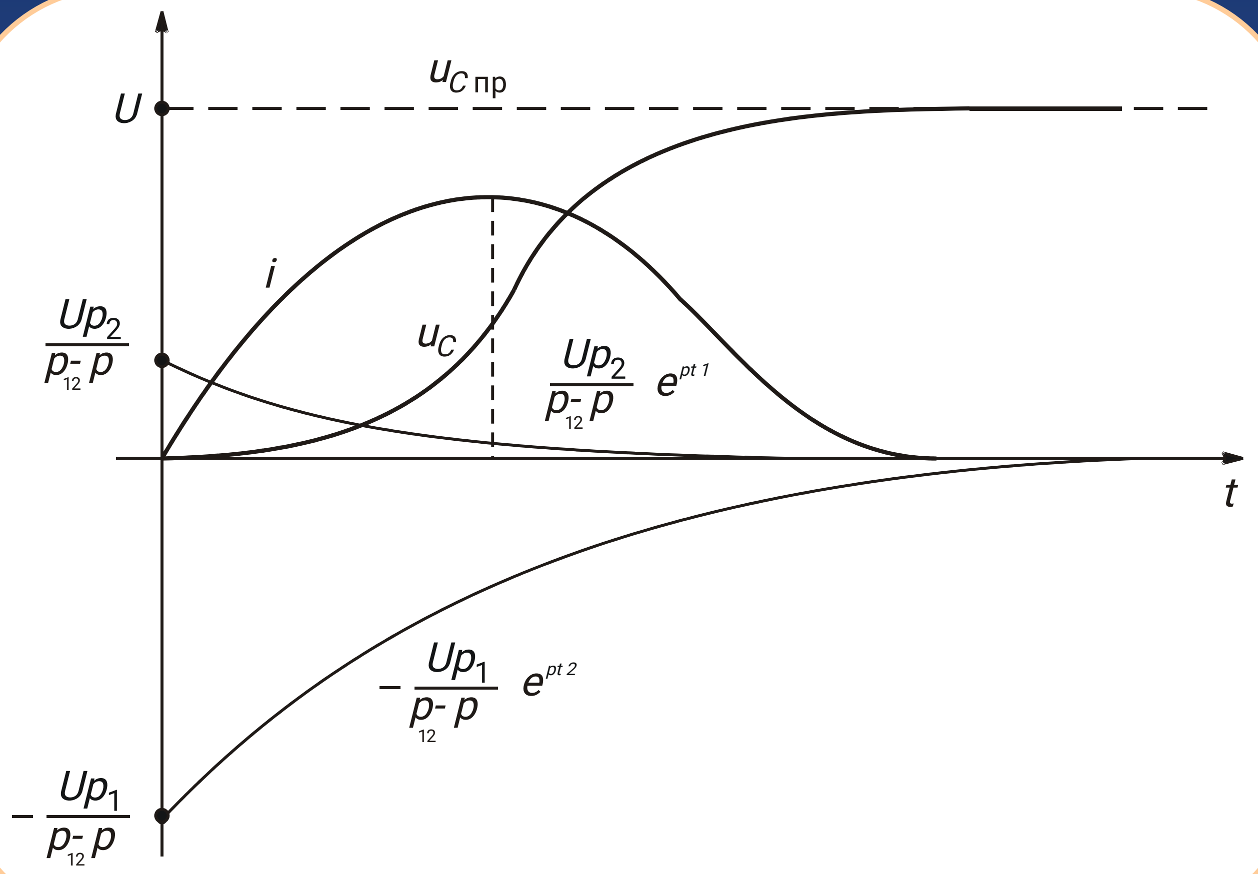
Закон изменения напряжения на конденсаторе при его заряде от источника постоянного напряжения имеет вид:

$$u_C = U + \frac{U}{p_1 - p_2}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t} \right) .$$

Закон изменения тока найдем по закону Ома:

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{CU}{p_1 - p_2}\left(p_2 p_1 e^{p_1 t} - p_1 p_2 e^{p_2 t} \right) = \frac{U}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \right).$$

Проиллюстрируем процессы графиками



Ток в начале переходного процесса и после его окончания равен нулю.

Если $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, корни будут действительными и равными:

$$p_1 = p_2 = p = -\frac{R}{2L}.$$

Такой случай переходного процесса называют критическим или предельным апериодическим.

При этом свободная составляющая напряжения меняется по закону:

$$u_{C\,св} = (A_1 + A_2 t)\,e^{pt}.$$

Закон изменения напряжения:

$$u_C = U + (-U + pUt)\,e^{pt} = U\,[1 - (1 - pt)]\,e^{pt}.$$

Закон изменения тока:

$$i_C = C\,\frac{du_C}{dt}.$$

Графики аналогичны приведенным на предыдущем слайде.

Если $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, корни будут комплексными сопряженными.

Такой случай переходного процесса называют колебательным.

Введем обозначения:

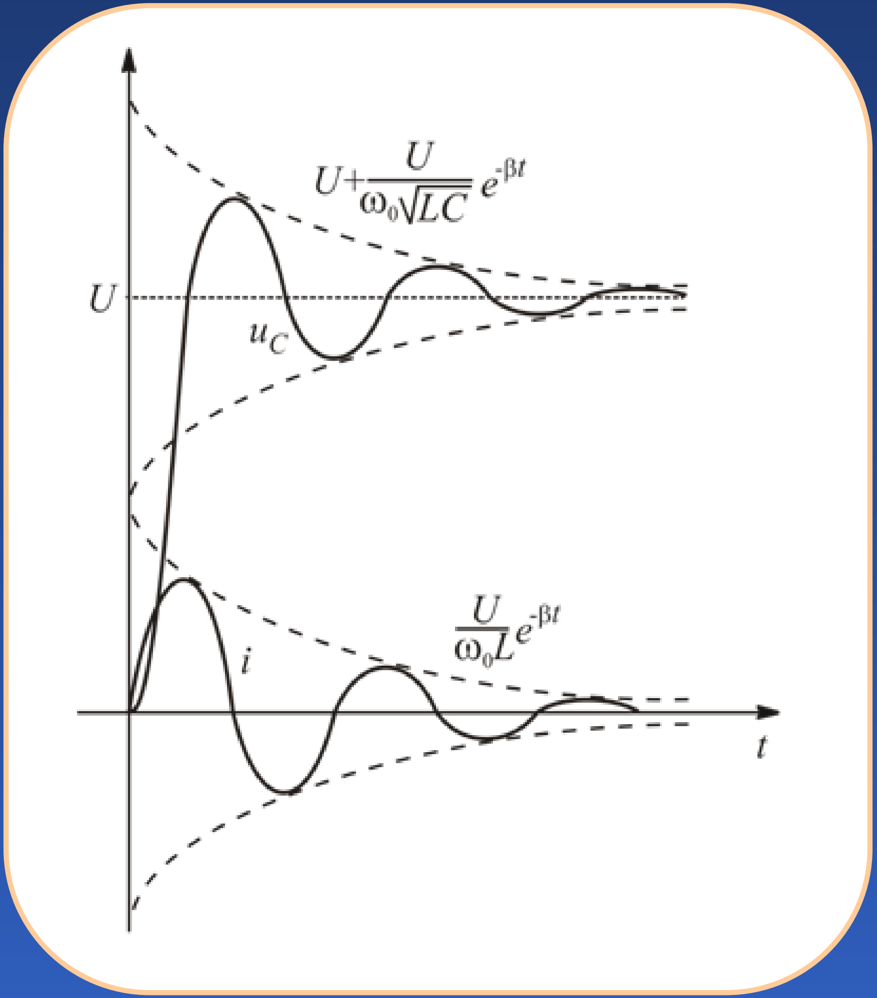
$\frac{R}{2L} = \beta$ – коэффициент затухания;

$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_0$ – угловая частота собственных колебаний контура.

Тогда $p_{1,2} = -\beta \pm j\omega_0$.

Свободную составляющую удобно записать как синусоиду, затухающую по экспоненте:

$$u_{C\,св} = A e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \lambda).$$



Закон изменения напряжения:

$$u_C = U - \frac{U}{\omega_0\sqrt{LC}} \cdot e^{-\beta t}\sin(\omega_0 t + \lambda).$$

Закон изменения тока:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U}{\omega_0 L} e^{-\beta t}\sin\omega_0 t.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какие законы коммутации выполняются в цепи, содержащей индуктивную катушку и конденсатор?
2. Какой режим назвали принужденным?
3. Как составить характеристическое уравнение для неразветвленной цепи?
4. Каким образом ищут постоянные интегрирования?
5. Как получают второе уравнение для вычисления постоянных интегрирования?
6. В каком случае переходный процесс будет апериодическим?
7. В каком случае переходный процесс будет критическим?
8. В каком случае переходный процесс будет колебательным?
9. От чего зависят корни характеристического уравнения?

Лекция № 17. Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока – графическими методами

1. Основные понятия и определения
2. Линейные эквивалентные схемы замещения нелинейных элементов
3. Расчет нелинейной цепи с последовательным соединением элементов

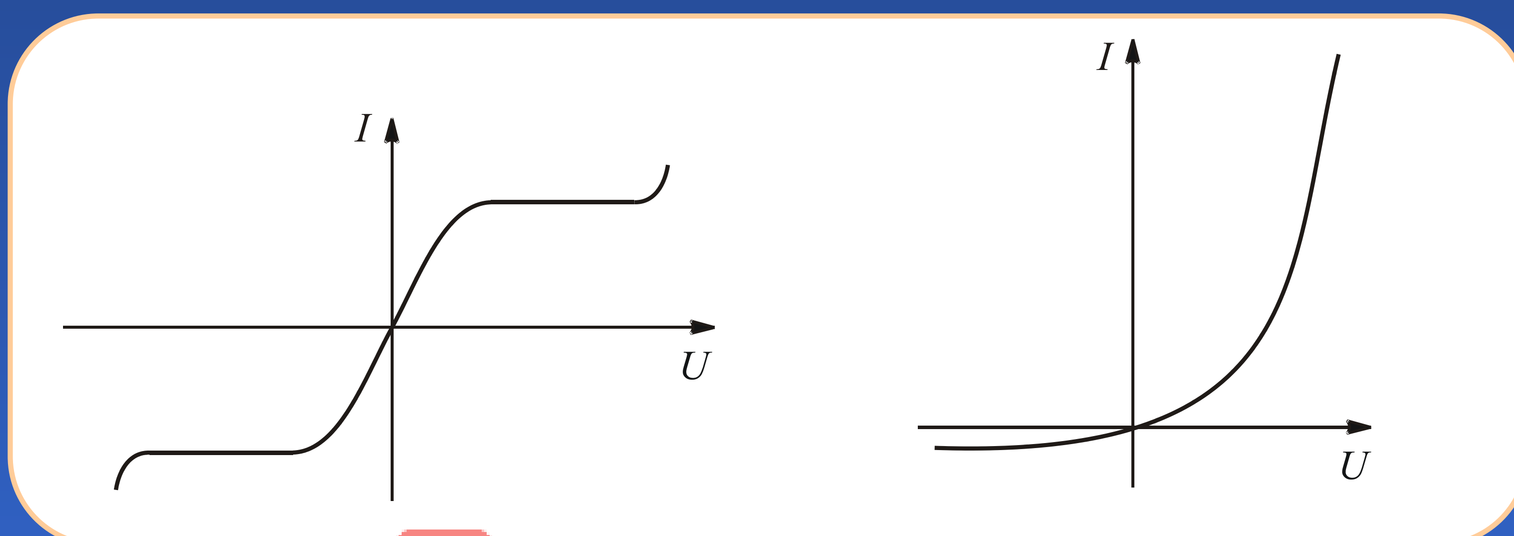
Нелинейные электрические цепи содержат нелинейные элементы, параметры которых зависят от тока либо напряжения.

Все НЭ делят на две большие группы: неуправляемые и управляемые.

К неуправляемым НЭ относятся лампа накаливания, бареттер, диод, газотрон.

Управляемыми НЭ являются трех - и более электродные лампы, транзисторы, тиристоры.

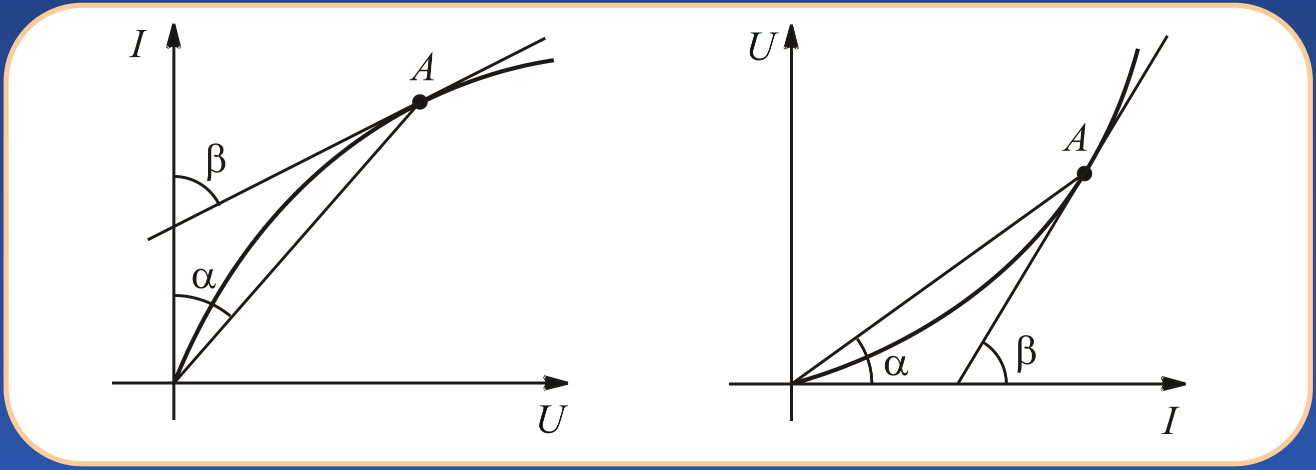
Вольт-амперная характеристика (ВАХ) НЭ может быть симметричной и несимметричной.



Статическое сопротивление $R_{ст}$ характеризует НЭ в неизменном режиме. Оно равно отношению напряжения на НЭ к току через него:

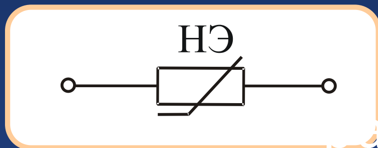
$$R_{ст} = \frac{U}{I}.$$

Статическое сопротивление можно определить тангенсом угла α между соответствующей осью координат и прямой, соединяющей рабочую точку с нулевой. При изображении ВАХ НЭ ток и напряжение могут быть отложены на разных координатных осях.



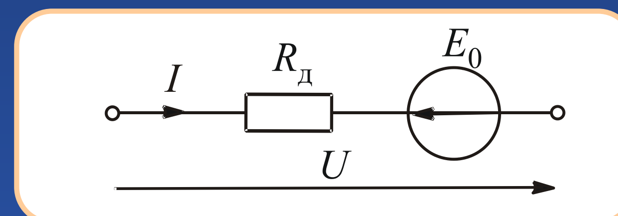
Дифференциальное (динамическое) сопротивление $R_{д}$ равно отношению бесконечно малого приращения напряжения на НЭ к соответствующему бесконечно малому приращению тока:

$$R_{д} = \frac{dU}{dI}.$$



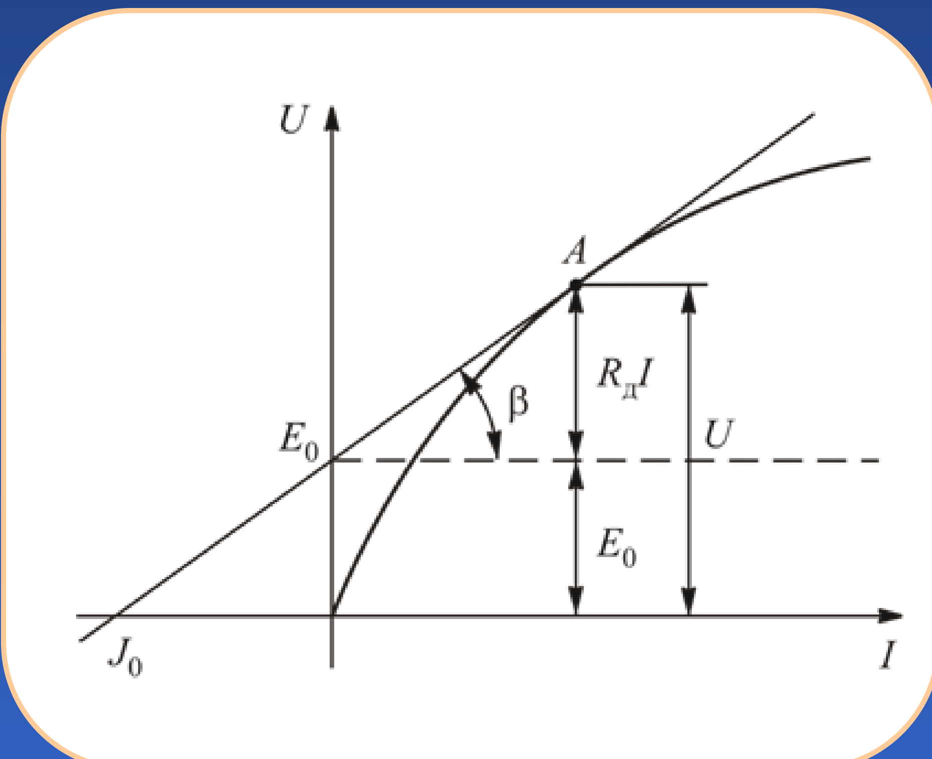
Расчет нелинейных цепей очень сложен. Но если рабочая точка перемещается на небольшом участке, который можно считать практически линейным, то нелинейный резистор можно заменить линейной эквивалентной схемой, состоящей из источника энергии и резистора сопротивлением $R_д$.

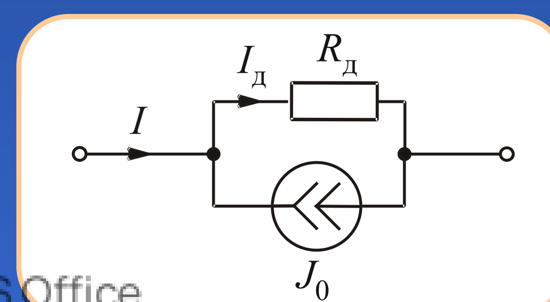
$$U = R_д I + E_0.$$



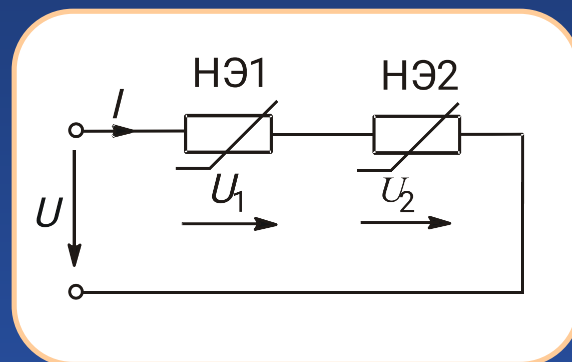
$$\frac{U}{R_д} = I + \frac{E_0}{R_д}, \qquad \frac{U}{R_д} = I_д, \qquad \frac{E_0}{R_д} = J_0,$$

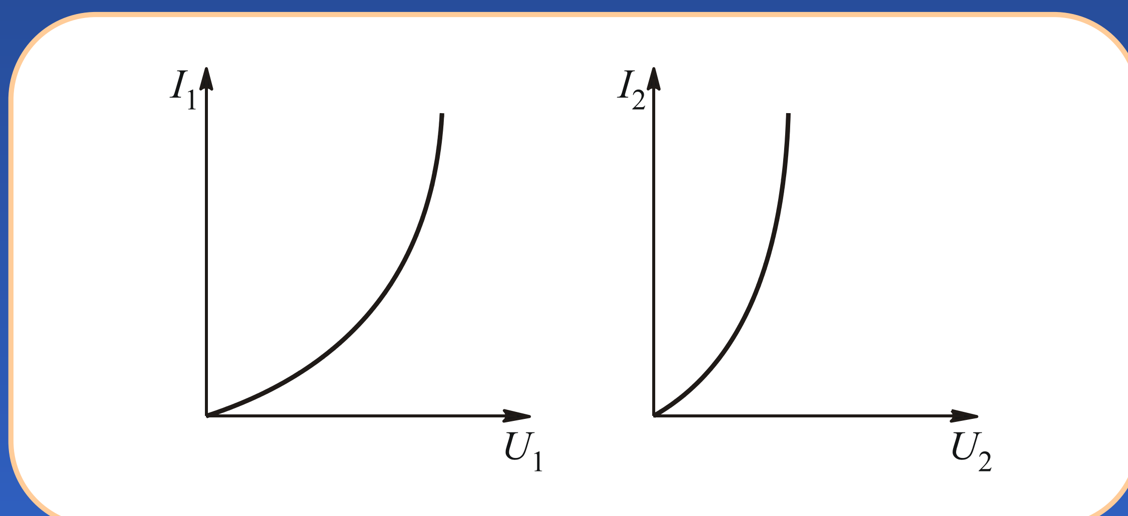
$$I_д = J_0 + I.$$



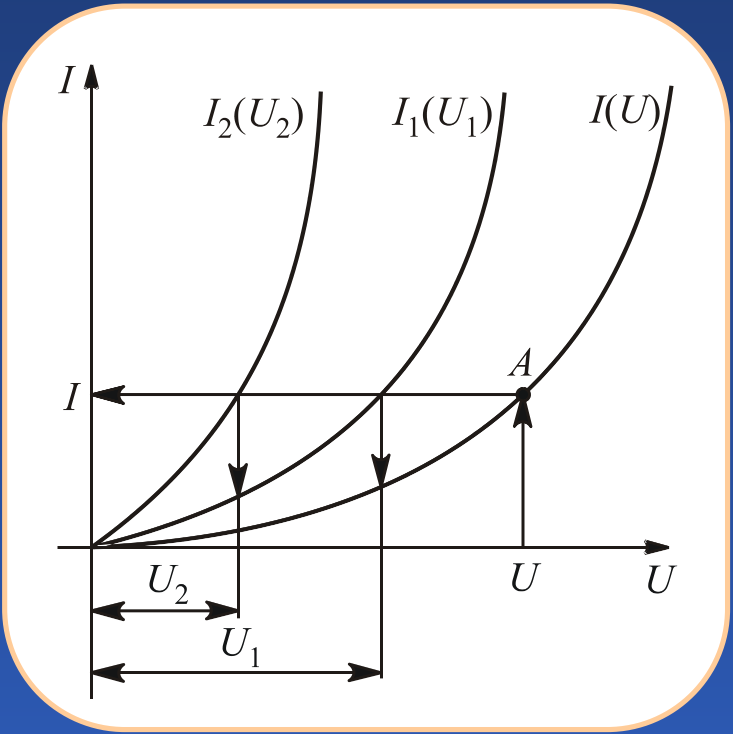


Определить ток в цепи и напряжения на НЭ U_1 и U_2, если заданы входное напряжение U и ВАХ каждого элемента.





Задачу можно решить двумя путями

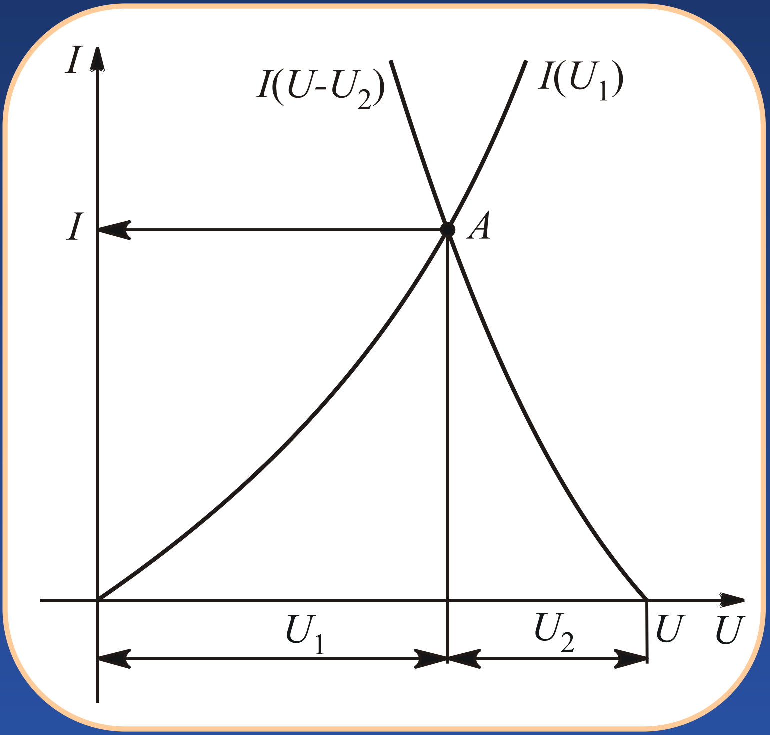


1. Отыскание рабочей точки на результирующей ВАХ.

Ток в цепи один. Входное напряжение на основании второго закона Кирхгофа складывается из напряжений на отдельных НЭ. В рассматриваемой цепи

$$U = U_1 + U_2.$$

2. Отыскание рабочей точки на пересечении ВАХ одного элемента с зеркальным отображением ВАХ другого элемента.



Ток в цепи один, поэтому

$$I_1 = I_2 = I.$$

Строим график $I(U_1)$.

В рабочей точке на основании второго закона Кирхгофа напряжение $U_1 = U - U_2.$

Построим график $I(U - U_2)$.

Очевидно, что графики пересекаются в рабочей точке *A*.

Находим соответствующие ей значения тока I и напряжений U_1 и U_2.

Этот метод рационально использовать для цепи с двумя элементами, один из которых – линейный.

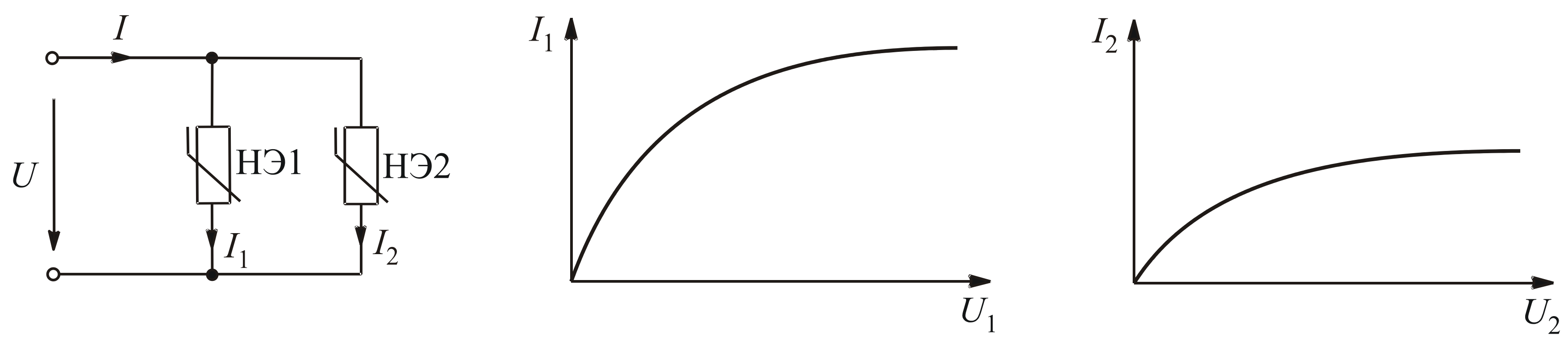
Вопросы для самопроверки

1. Чем нелинейный элемент отличается от линейного?
2. На какие группы делят нелинейные элементы?
3. Чем линейный элемент с симметричной ВАХ принципиально отличается от нелинейного элемента с несимметричной ВАХ?
4. Как можно графически определить статическое и дифференциальное сопротивления?
5. Каков алгоритм составления линейной схемы замещения, эквивалентной на рабочем участке ВАХ нелинейному элементу?
6. Какие пути отыскания рабочей точки при последовательном соединении нелинейных элементов Вы знаете?
7. Для каких цепей рационально использовать отыскание рабочей точки на пересечении ВАХ одного элемента с зеркальным отображением ВАХ второго элемента?
8. Как построить результирующую ВАХ цепи с последовательным соединением элементов?

Лекция № 18. Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока – графическими методами (продолжение)

1. Расчет нелинейной цепи с параллельным соединением элементов
2. Расчет нелинейной цепи со смешанным соединением элементов
3. Расчет нелинейных цепей методом напряжения между двумя узлами

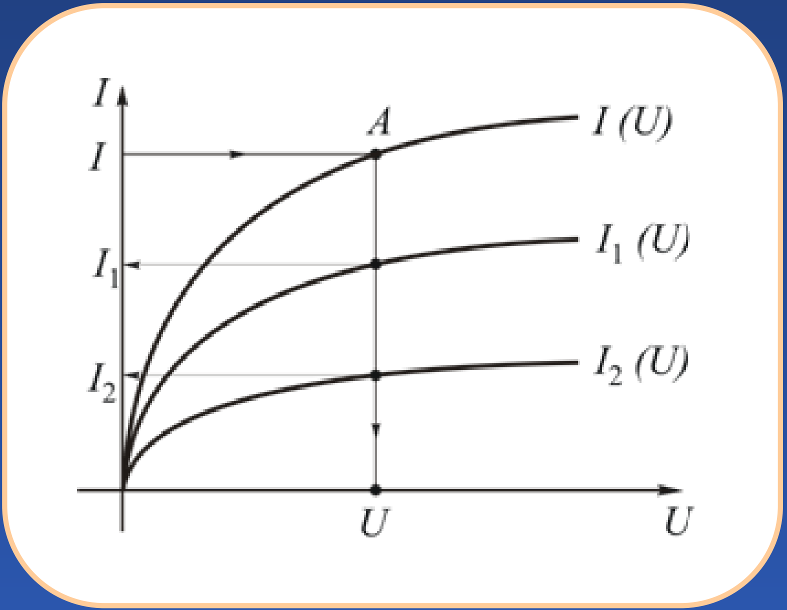
Определить все токи, если заданы входное напряжение и ВАХ каждого нелинейного элемента.



На ВАХ отдельных элементов находим токи I_1 и I_2.

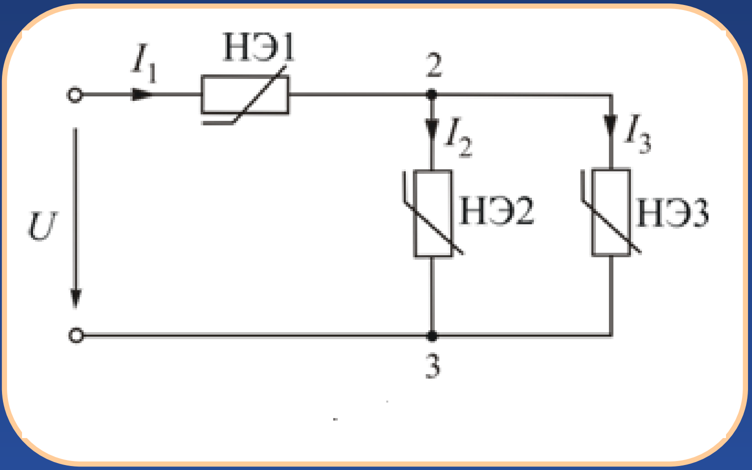
Входной ток на основании первого закона Кирхгофа равен сумме токов в пассивных ветвях:

$$I = I_1 + I_2.$$



Если в анализируемой цепи нужно найти токи I_1 и I_2, а также входное напряжение при заданном входном токе, то рабочую точку можно найти на результирующей ВАХ.

Решение методом эквивалентных преобразований



Определить все токи, если задано входное напряжение и ВАХ отдельных элементов: $I_1(U_1)$, $I_2(U_{23})$, $I_3(U_{23})$.

Решение заключается в постепенном построении результирующих ВАХ. Очевидно, что сначала нужно построить результирующую ВАХ для параллельного участка.

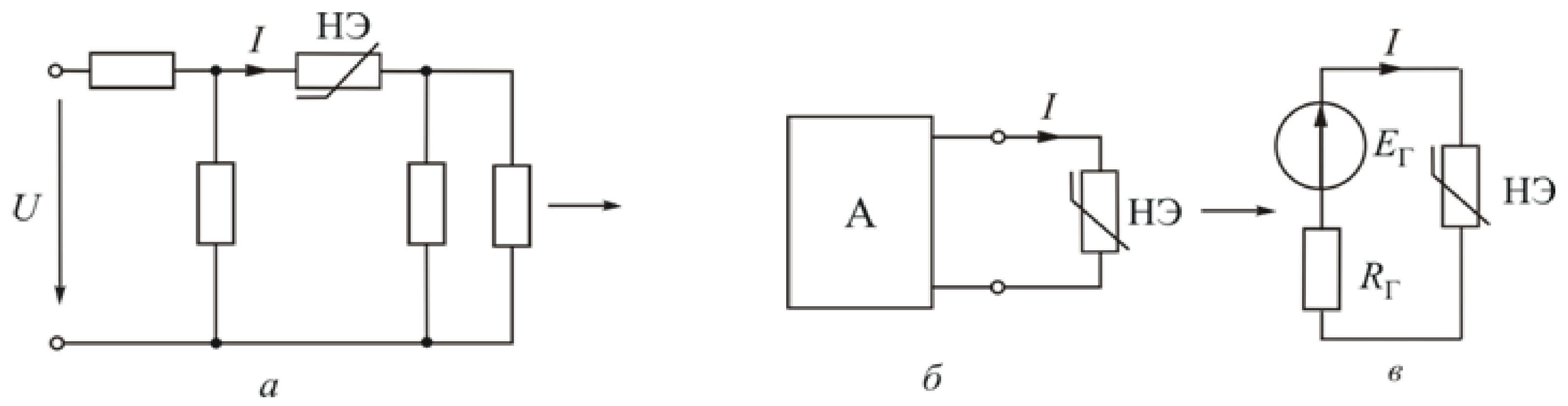
Затем нужно построить результирующую ВАХ всей схемы.

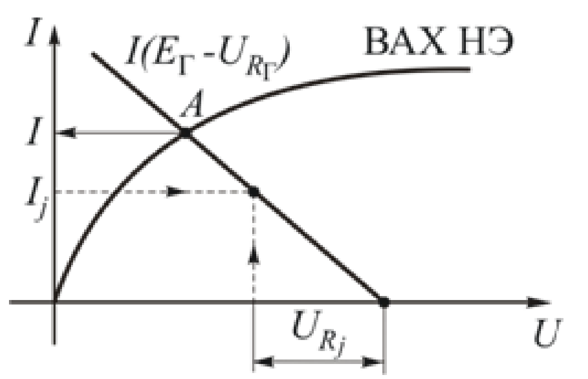
По заданному значению входного напряжения найдем рабочую точку и соответствующее ей значение входного тока I_1.

Решение с использованием метода эквивалентного генератора

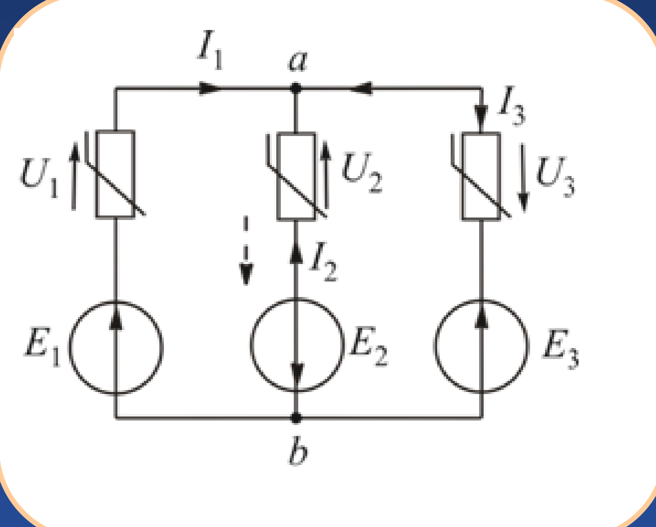
Этот метод можно использовать для схемы с одним нелинейным элементом, ток в котором и надо найти. Делим схему на две части: НЭ и всю остальную часть схемы, которая является активным двухполюсником.

Активный двухполюсник заменим эквивалентным ему генератором.



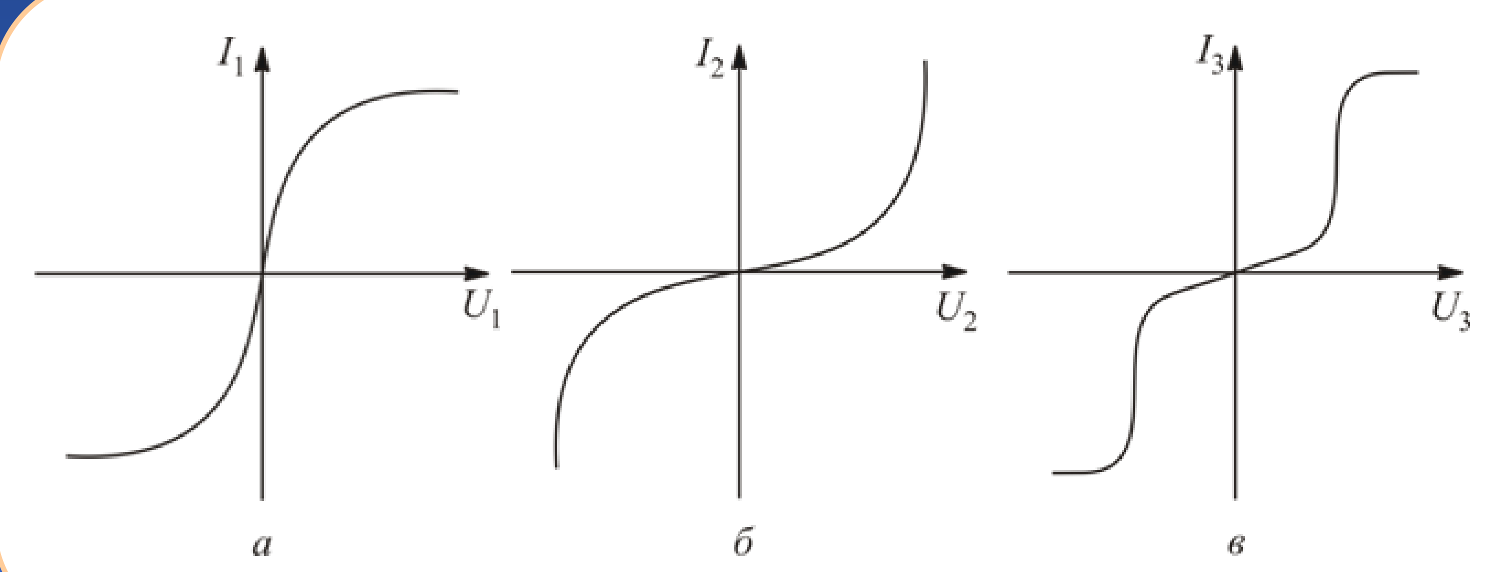


Рабочую точку рационально найти на пересечении ВАХ НЭ и зеркального изображения ВАХ линейного элемента.



Цепи с двумя узлами часто встречаются на практике. Рассмотрим метод на конкретном примере.

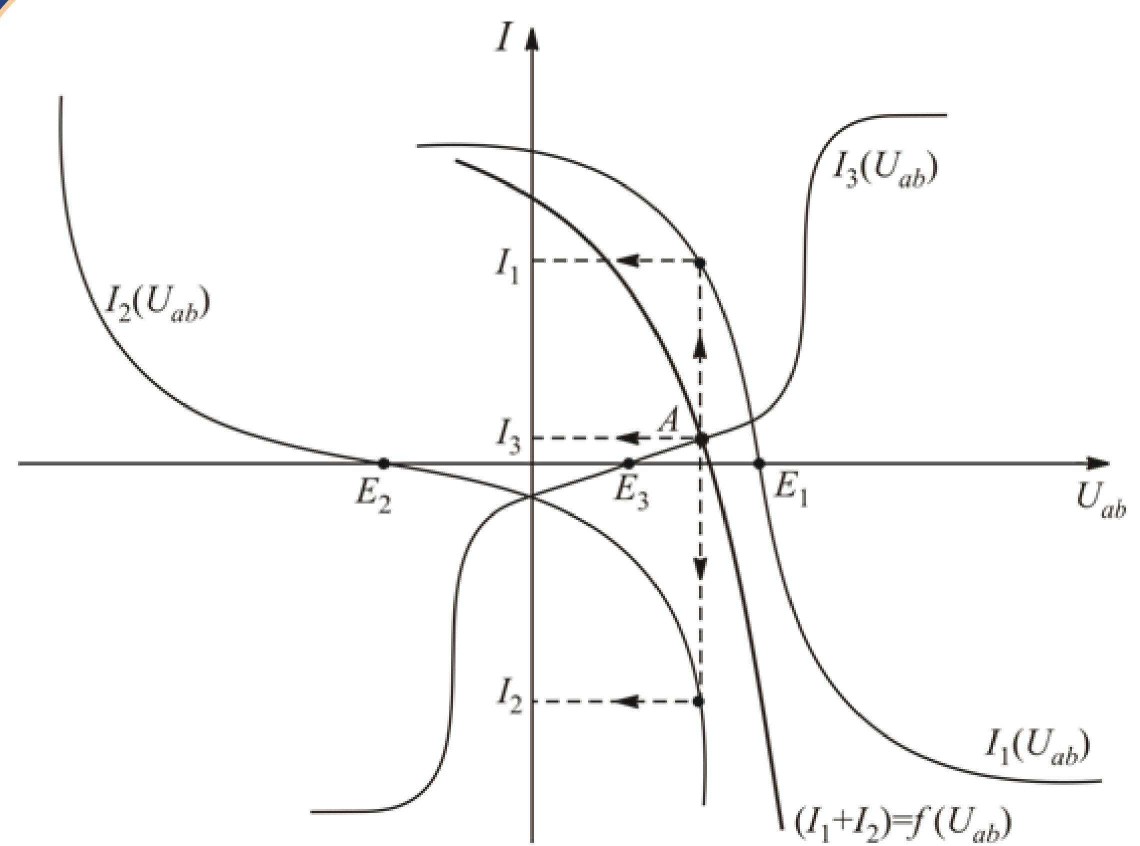
Вычислить все токи, если заданы ЭДС и ВАХ нелинейных элементов.



1. Запишем уравнение на основании первого закона Кирхгофа: $I_1 + I_2 = I_3$.
2. Приведем токи к зависимости от одного аргумента.

$$U_{ab} = E_1 - U_1, \qquad U_{ab} = -E_2 - U_2, \qquad U_{ab} = E_3 + U_3.$$

3. Построим графики токов $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$.



4. Ищем рабочую точку на пересечении графиков

$(I_1 + I_2) = f(U_{ab})$ и $I_3 = f(U_{ab})$.

5. Определяем токи в ветвях и напряжение U_{ab}.

Вопросы для самопроверки

1. Какой закон используют для анализа нелинейной цепи с параллельным соединением элементов?
2. Как построить результирующую ВАХ цепи с параллельным соединением элементов?
3. Каким методом можно сделать расчет цепи с одним источником энергии при смешанном соединении приемников?
4. В каком случае для расчета нелинейной цепи можно применять метод эквивалентного генератора?
5. В чем суть метода эквивалентного генератора?
6. Что является условием для нахождения рабочей точки при решении методом напряжения между двумя узлами?