ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭМП
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПОЛЕ

Плахтиев А.М.

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Полная система уравнений ЭМП
2. Электростатическое поле
3. Плоскопараллельное поле

1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭМП

Полная система уравнений электромагнитного поля в пустоте имеет вид

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}; \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{\delta} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0.$$

Полная система уравнений электромагнитного поля в обычной среде имеет вид

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}; \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \quad \boldsymbol{\delta} = \gamma \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}};$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0.$$

Плотность тока для общности выражена в виде суммы трех составляющих. При этом надо иметь в виду, что по самому смыслу первой и третьей составляющих они не могут иметь места в одной и той же точке пространства одновременно. Две первые составляющие могут быть одновременно в полупроводящей среде. Однако в хорошо проводящих веществах всегда можно пренебречь второй составляющей по сравнению с первой и в диэлектриках обычно можно пренебречь первой составляющей по сравнению со второй.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

2.1. Безвихревой характер электростатического поля. Градиент электрического потенциала

Электростатическое поле - электрическое поле системы неподвижных относительно наблюдателя заряженных тел при отсутствии электрических токов.

Если в системе нет намагниченных тел, то магнитное поле отсутствует. Следовательно, всюду

$$J = 0; \quad B = 0; \quad H = 0.$$

Наличие в электрическом поле свободных распределенных в объеме зарядов привело бы к возникновению электрического тока. Поэтому предположение, что $J = 0$, ведет к заключению, что всюду р = 0. Могут быть только заряды, распределенные по поверхностям заряженных тел.

Из системы уравнений электромагнитного поля остается следующая совокупность:

$$\operatorname{rot} E = 0; \; D = s E; \quad \operatorname{div} D = 0.$$

Условие rot $E = 0$ свидетельствует, что *электростатическое поле имеет безвихревой характер.* Поле, удовлетворяющее этому условию, называют безвихревым. Согласно теореме Стокса, для любого замкнутого контура имеем

$$\oint_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = \int_s \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = 0.$$

Таким образом, условие rot $E = 0$ выражает в дифференциальной форме ранее высказанное важное положение: в электростатическом поле линейный интеграл вектора E вдоль любого замкнутого контура равен нулю.

В электростатическом поле линейный интеграл вектора ***E***, взятый от точки *A* до точки *B*, не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек *A* и *B*. Это обстоятельство дало нам возможность ввести понятие о потенциале электростатического поля. Потенциал электростатического поля в точке *A* мы определили как линейный интеграл вектора ***E***, взятый от точки *A* до некоторой заданной точки *P*, т. е.

$$U_A = \int_A^P \mathbf{E}\, d\mathbf{l}.$$

Потенциал в точке *P* равен нулю.

Линейный интеграл вектора ***E*** вдоль некоторого пути от точки *A* до точки *B* есть разность электрических потенциалов в точках *A* и *B*:

$$\int_A^P \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = U_A - U_B.$$

Установим связь между напряженностью электрического поля и изменением потенциала в пространстве. Допустим, что положение точки *A*, в которой рассматриваем потенциал *U*, определяется ее расстоянием *l* от начальной точки *O* вдоль некоторого пути (рис..1), идущего в точку *P*, где потенциал принят равным нулю. Выражение для потенциала при этом можно написать в виде

$$U = \int_{l}^{l_P} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \int_{l}^{l_P} E\cos\alpha\, dl,$$

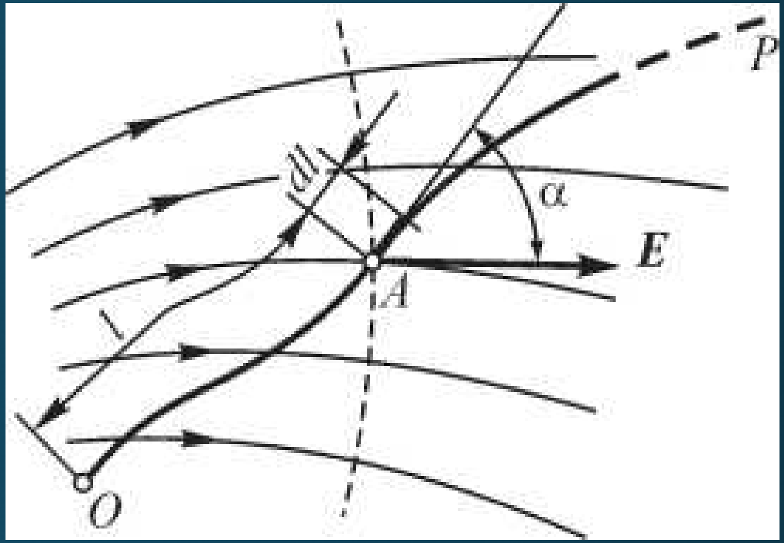

Рис. .1

причем l_P — длина всего пути от точки *O* до точки *P*; а — угол между направлением вектора ***E*** и касательной к пути.

Взяв частную производную от обеих частей равенства по нижнему пределу, найдем

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E\cos a,$$

откуда следует, что приращение потенциала, рассчитанное на единицу перемещения в каком-либо направлении, численно равно взятой с обратным знаком составляющей напряженности поля в этом направлении.

В частности, в декартовых координатах имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -E_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -E_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -E_z.$$

Если направление перемещения *dl* составляет прямой угол (а = л/2) с вектором ***E***, то cos а = 0 и *dU/dl* = 0. Следовательно, мысленно перемещаясь в направлении, нормальном к направлению линий напряженности поля, будем иметь *U* = const, т. е. будем оставаться *на поверхности равного потенциала. Линии напряженности поля нормальны к поверхностям равного потенциала.* Уравнение *U*(*x*, *y*, *z*) = const определяет совокупность точек, лежащих на поверхности равного потенциала, т. е. является уравнением этой поверхности. Следы поверхностей равного потенциала в плоскости чертежа называют линиями равного потенциала. Линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом.

Совмещая направление перемещения *dl* с направлением вектора ***E***, будем иметь

$$\alpha = 0; \quad \cos\alpha = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -E.$$

Это характерное направление совпадает с нормалью к поверхности равного потенциала. Поэтому условимся обозначать перемещение *dl* в этом направлении через *dn,* в соответствии с чем напишем:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -E.$$

Очевидно, *dn* есть элемент длины линии напряженности поля, причем координату *n* считаем растущей в направлении вектора ***E***.

Производная от потенциала по координате имеет наибольшее значение в направлении, нормальном к поверхности равного потенциала и противоположном направлению вектора *E*. Это наибольшее значение производной может быть изображено вектором, направленным против вектора *E* и носящим название градиента электрического потенциала. Его обозначают символом grad *U*.

Градиент потенциала равен приращению потенциала, отнесенному к единице длины и взятому в направлении, в котором это пр наибольшее значение:

$$|\mathrm{grad}\ U| = \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|.$$

Векторы *E* и grad *U* равны между собой по величине и направлены в противоположные стороны:

$$\mathrm{grad}\ U = -\boldsymbol{E}.$$

Знак минус в этом равенстве указывает, что потенциал убывает в направлении линий напряженности поля. Это является следствием определения потенциала как линейного интеграла напряженности электрического поля, взятого от рассматриваемой точки *A* до заданной точки *P*, в которой *U* = 0. Такое определение целесообразно, так как при этом потенциал положительно заряженного тела оказывается также положительным при условии, что потенциал бесконечно удаленных точек принимается равным нулю.

Все сказанное свидетельствует о том, что всякое *безвихревое поле есть поле потенциальное,* т. е. такое, которое может быть охарактеризовано потенциальной функцией *U*(*x*, *y*, *г*).

Составляющие градиента электрического потенциала по осям в декартовой системе координат суть

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

Следовательно,

$$\text{grad } U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Градиент потенциала может быть обозначен при помощи символического оператора V (знак «набла») в виде *VU.* При этом V*U* формально можно рассматривать как произведение символического вектора V на скаляр *U.* В декартовых координатах имеем

$$\nabla U = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z} = \text{grad } U.$$

Следовательно, равенство *E* = - grad *U* может быть написано в форме

$$\boldsymbol{E} = -\nabla U.$$

3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПОЛЕ (ПП)

Величины, характеризующие ПП, зависят только от двух координат. Такому условию удовлетворяет поле системы из нескольких бесконечно длинных параллельных друг другу цилиндрических проводов с зарядами, равномерно распределенными по их длине. Диэлектрик будем предполагать однородным. Направим ось *OZ* параллельно осям проводов. Тогда все линии напряженности поля будут лежать в плоскостях, параллельных плоскости *XOY*. Картина поля во всех этих плоскостях одинакова, и достаточно исследовать поле только в плоскости *XOY*. Поле такого вида будем называть плоскопараллельным полем.

На рис. 2 изображены поперечные сечения двух проводов и картина поля около них. Потенциал плоскопараллельного поля есть функция только двух координат: *x* и *y*. Поверхности равного потенциала суть цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси *OZ*. Линии равного потенциала в плоскости *XOY* определяются уравнениями вида

$$U(x, y) = \text{const.}$$

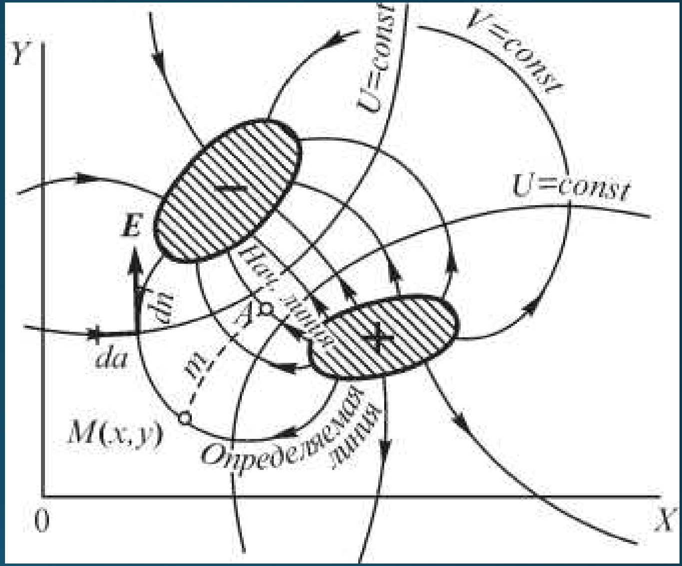

Рис. .2