ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 2/1(48) 2023

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Сайт: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 15.05.2023 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №3. Тираж 100 экз.

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

No. 2/1(48) 2023

The journal was established in 2015.
6 issues are published per year.

Founder:
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute.

The journal is registered by Agency of Information and Mass Communications under the Administration of the President of the Republic of Uzbekistan.
The registration certificate No. 0856 of 5 August 2015.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Address:
100125, Tashkent, Buz-2, 17A.
Tel.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Web: journals.airi.uz (www.pvpm.uz).

Design and desktop publishing:
Sharipov Kh.D.

DTAIDRI printing office.
Signed for print 15.05.2023
Format 60x84 1/8. Order No. 3. Print run 100 copies.

Профессор
ХОЛМАТВАЙ ШАДИМЕТОВ
(к 70-летию со дня рождения)

В знак уважения и признания заслуг, настоящий специальный выпуск журнала посвящен Холматваю Махкамбаевичу Шадиметову – известному ученому математику, доктору физико-математических наук, профессору. Работы Х.М. Шадиметова внесли большой вклад в развитие вычислительной математики и теории приближений в нашей республике и за ее пределами. В формировании Х.М. Шадиметова как ученого, большую роль сыграл один из крупнейших математиков XX века – академик С.Л. Соболев.

Х.М. Шадиметов родился 5 мая 1953 года в городе Чимкенте. После окончания средней школы им А. Навои в 1970 году он поступил на механико-математический факультет Ташкентского государственного университета (ныне Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека).

После окончания университета в 1975 году, Х.М. Шадиметов начинает свою трудовую деятельность в лаборатории «Теории приближенного интегрирования» Института кибернетики АН РУз. В 1977 году он поступает в аспирантуру, где его руководителями были Г.Н. Салихов и З.Ж. Жамалов. Во время обучения в аспирантуре он занимался оптимальными квадратурными формулами в пространстве дифференцируемых функций. В 1979 году Х.М. Шадиметов был направлен для завершения аспирантуры в Новосибирск, где продолжил свои научные исследования под руководством академика С.Л.Соболева. В 1983 году он успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Оптимальные формулы приближенного интегрирования для дифференцируемых функций».

По возвращении Х.М. Шадиметов продолжил свою трудовую деятельность в Институте кибернетики АН РУз в должностях научного сотрудника и старшего научного сотрудника. Начиная с 1995 года он работал заведующим лаборатории «Вычислительных методов» Института математики им. В.И.Романовского АН РУз, а в 2005 году был избран также заведующим кафедрой «Информатики и компьютерной графики» Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта.

Х.М. Шадиметов известен как автор глубоких научных исследований по вычислительной математике. Им получены оптимальные алгоритмы для приближенного вычисления регулярных, сингулярных интегралов и интегралов Фурье в функциональных пространствах Соболева. Создан метод для приближенного решения интегральных уравнений на функциональных пространствах. Разработаны методы построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в функциональных пространствах Соболева. Х.М. Шадиметов решил ряд фундаментальных задач теории квадратурных и кубатурных формул под руководством академика С.Л. Соболева. Особым вкладом в теорию кубатурных формул являются его следующие результаты: весовые кубатурные формулы в пространстве Соболева периодических функций и кубатурные формулы типа Эйлера–Маклорена. Итогом этих исследований явилась защита в 2002 году докторской диссертации на тему: «Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева».

Отрадно отметить, что в 2008 году на конгрессе, посвященном 100-летию С.Л. Соболева, Х.М. Шадиметов в числе пяти известных ученых был награжден медалью Соболева. В 2012 году Х.М. Шадиметову было присуждено ученое звание профессора.

В последующие годы Х.М.Шадиметовым развиваются исследования оптимальных кубатурных формул и сплайн функций в гильбертовых пространствах. Кроме того, он занимается созданием оптимальных алгоритмов решения краевых задач. Х.М. Шадиметовым опубликованы более 250 научных работ в престижных зарубежных и республиканских изданиях, написаны две монографии, один учебник и 6 учебных пособий. Под его руководством защищены 2 докторские, 4 кандидатские и 10 PhD диссертаций. Х.М. Шадиметов оказывает большое влияние на формирование кандидатов и докторов наук по специальностям вычислительная математика и математическое моделирование в нашей республике.

Как педагог он активно читает лекции в Ташкентском государственном транспортном университете, в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, в Бухарском государственном университете, Государственном педагогическом университете им. Низами, а также принимает активное участие в организации и проведении республиканских школьных математических олимпиад.

Х.М. Шадиметов является главным редактором журнала «Международный научный журнал вычислительных технологий и математического моделирования», членом редакционных коллегий журналов:Узбекский математический журнал, Проблемы вычислительной и прикладной математики и Вестник КРАУНЦ (Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр»). Х.М. Шадиметов являлся членом экспертного совета по математике Высшей Аттестационной Комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан. Начиная с 1995 года Х.М. Шадиметов руководит работой научного семинара по вычислительной математике и теории чисел в Институте математики им. В.И.Романовского АН РУз, где проходит апробация результатов, полученных математиками Узбекистана в области вычислительной математики и теории чисел.

Свой семидесятилетний юбилей Холматвай Махкамбаевич встречает в расцвете творческих сил.

Редакционная коллегия журнала «Проблемы вычислительной и прикладной математики» от имени многочисленных коллег и благодарных учеников сердечно поздравляет Холматвай Махкамбаевича с 70-летним юбилеем, желает ему крепкого здоровья, больших творческих успехов и семейного благополучия.

Содержание

УДК 511.513.82

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОТЫСКАНИЯ ГРАНЕЙ ОБЛАСТИ ВОРОНОГО ВТОРОЙ СОВЕРШЕННОЙ ФОРМЫ

Гуломов О.Х.
otabek10@mail.ru
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,
100174, Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, 9;
Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства",
100000, Узбекистан, Ташкент, ул. Кари Ниязий 39.

Посвящается 70-летию со дня рождения профессора Холмата Шадиметова

Задача классификации целочисленных квадратичных форм имеет долгую историю, на протяжении которой многие математики внесли свой вклад в ее решение. Бинарные формы были всесторонне изучены Гауссом. Он и позднейшие исследователи наметили также основные пути решения проблемы классификации тернарных форм и форм более высоких размерностей. Величайшими достижениями последующего периода явились глубокое развитие теории рациональных квадратичных форми проведенная Эйхлером полная классификация неопределенных форм в размерностях 3 и выше в терминах спинорных родов.

В настоящей работе предлагается алгоритм для вычисления неэквивалентные соответствующий квадратичные формы граням области Вороного второй совершенный формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислено все соответствующий неэквивалентные квадратичные формы.

Ключевые слова: Квадратичние формы, совершенние формы, область Вороного, окрестность Вороного, усовершенствованный алгоритм Вороного.

Цитирование: *Гуломов О.Х.* Об одном алгоритме отыскания граней области Вороного второй совершенной формы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – № 2/1(48). – С. 70-78.

1 Введение: постановка задачи

Тематика работы относится к одному из современных разделов геометрической теории чисел – геометрии положительных квадратичных форм. Термин «геометрия положительных квадратичных форм» и выделение этого раздела из геометрии чисел впервые встречаются в фундаментальной работе Б.Н.Делоне [1].

В работе С.С.Рышков, Е.П.Барановский [2] перечислены основные в настоящее время задачи геометрии положительных квадратичных форм и классические методы подхода к этим задачам.

В работе [2] речь идет о классической проблеме Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

Эти проблемы являются интересными и нетривиальными задачами геометрической теории чисел, которыми занимались многие математики (Эрмит, Гаусс, Коркин, Золотарев, Минковский, Вороной, Делоне, Рышков, Малышев, Барнс, Владимиров,

Скотт, Лармоут, Стаси, Барановский, Шушбаев, Анзин, Умаров и др.). Они появились и в работах С.Л.Соболева [3] и Х.М. Шадиметова [4] в связи с построением решетчатых оптимальных кубатурных формул.
Пусть

$$f = f(x) = f\left(x_1, ..., x_n\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

положительно определенная квадратичная форма от n переменных $(n \geqslant 2)$ с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, ..., n)$, матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ и определителем $d = d(f) = \det(a_{ij}) > 0$. Форму f можно интерпретировать точкой $f = (a_{11}, ..., a_{nn}, a_{12}, ..., a_{n-1n})$ в $N = \frac{n(n+1)}{2}$ - мерном евклидовом пространстве E^N. Множество всех положительно определенные квадратичные формы в E^N образует конус положительности K^N.

Пусть f – положительно определенная квадратичная форма вида (1). Точная нижняя граница

$$m = m(f) = \inf_{x \in Z^n | \{0\}} f(x), \tag{2}$$

взятая по всем целым точкам $x \neq 0$, называется арифметическим минимумом формы f. Эта точная нижняя граница достигается, ибо множество $f(x) \leqslant c$ ограничено для любого $c > 0$.

Пусть

$$\pm m_k = \pm\left(m_{1k}, ..., m_{nk}\right) \qquad (k = 1, ..., s; \quad s = s(f)) \tag{3}$$

все представления минимума $m(f) = f(\pm m_1) = ... = f(\pm m_s)$. Отсюда, в частности, следует, что $m(f) > 0$. Так как тело $f(x) = m(f)$ строго выпукло, то $1 \leqslant s \leqslant 2^n - 1$.

Точки в (3) мы иногда будем называть минимальными точками (векторами), а матрицу

$$M\left(f\right) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & ... & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & ... & m_{n2} \\ .... & .... & .... & .... \\ m_{1s} & m_{2s} & ... & m_{ns} \end{pmatrix} -$$

минимальной матрицей формы f.

Ввиду того, что $m(\lambda f) = \lambda m(f)$, $\lambda > 0$, естественно рассматривать нормированный арифметический минимум

$$\mu(f) = \frac{m(f)}{\sqrt[n]{d(f)}}.$$

Теперь $\mu(\lambda f) = \mu(f)$. Арифметический минимум $m(f)$ есть непрерывная функция от f, заданная на конусе положительности K^N (см. [5–7]). Нормированный арифметический минимум $\mu(f)$ есть непрерывная функция от f, заданная на эквидискриминантной поверхности $\{f : d(f) = 1\} \subset K^N$, то есть на множестве положительно определенные квадратичные формы. определителя, равного 1.

Две положительно определенная квадратичная форма $f_1(x)$ и $f_2(y)$ называются целочисленно эквивалентными (эквивалентными, $f_1 \sim f_2$) если существует целочисленная унимодулярная подстановка $x = y\mathrm{U}$, переводящая форму $f_1(x)$ в $f_2(y)$, то есть $f_1(y\mathrm{U}) = f_2(y)$ или $f_1\mathrm{U} = f_2$. В частности, в случае $f_1 = f_2 = f$ U называется целочисленным автоморфмизмом формы f, т.е. $f\mathrm{U} = f$.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f – предельная (экстремальная) форма Коркина-Золотарева [6, 7], если f есть точка локального максимума функции $\mu(f)$, то есть если существует такая окрестность $v_f \subset \{f : d(f) = 1\}$ точки f, что $\mu\ (f') \leqslant \mu\ (f)$, если $f' \in v_f$.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f – оптимальная предельная форма Коркина-Золотарева [6, 7], если f есть точка абсолютного максимума функции $\mu(f)$, то есть если $\mu\ (f')\leqslant \mu\ (f)$ для всех $f'\in \{f\ :\ d(f){=}1\}$.

Известно [6, 7], что число различных классов предельных форм от n переменных для данного n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных предельных форм для фиксированного n. Это и есть проблема Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм. Следовательно, существует оптимальная предельная форма f_0, для которой $\gamma_n = \sup\limits_{f\in\{f:d(f)=1\}} \mu\left(f\right) = \mu\left(f_0\right)$. Число γ_n называется постоянной Эрмита. γ_nесть наибольшее из чисел $\mu\left(f_1\right),...,\mu\left(f_t\right)$, где $f_1,...,f_t$ - суть представители всех лучей классов предельных форм. В работах Minkowskii H. [8], C.A.Rogers [9], С.С. Рышков [10], задача вычисления постоянной Эрмита получила геометрическую интерпретацию как задача о плотнейшей решетчатой упаковки равных шаров в E^N.

2 Проблема Вороного отыскания совершенных форм и алгоритм Вороного

Отметим одно известное [6, 7] важное свойство предельных форм: представления (3) минимума (2) предельной формы f однозначно определяют форму, т.е. следующая система линейных уравнений

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}m_{ik}m_{jk} = m \qquad (k=1,...,s) \tag{4}$$

имеет относительно неизвестных a_{ij} единственное решение. На основе этого свойства Вороным создана теория совершенных форм.

Говорят, что положительно определенная квадратичная форма f является совершенной формой Вороного [5], если системой линейных уравнений (4) коэффициенты $a_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ формы f определяются однозначно.

Так как система (4) однозначно определяет N неизвестных коэффициентов (a_{ij}), то верны неравенства $\frac{n(n+1)}{2}\leqslant s\leqslant 2^n-1$ для любой совершенной формы.

Таким образом, из вышеупомянутого свойства предельной формы и определения совершенной формы следует, что всякая предельная форма является совершенной. Обратное не верно. Начиная с $n{=}6$, существуют совершенные, но не предельные формы.

Известно [5], что число различных классов совершенных форм от n переменных при данном n конечно. Отсюда вытекает проблема отыскания неэквивалентных совершенных форм для фиксированного n. Это и есть проблема Вороного отыскания совершенных форм. Теперь ясно, что из постановок этих проблем (Эрмита, Вороного) следует, что проблема Эрмита содержится в проблеме Вороного, другими словами, проблема Эрмита сводится к проблеме Вороного.

Согласно теории Вороного [5], каждой совершенной форме f вида (1) ставится в соответствие область $V^N(f)\subset \bar{K}^N\ \ -\ N$ - мерная бесконечная пирамида с конечным числом $(N-1)$ — мерных граней и с вершиной в начале координат (совершенный гоноэдр [2, 5, 10–12]) – совокупность всех неотрицательных квадратичных форм, представимых в виде

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{1\leqslant k\leqslant s} \rho_k\lambda_k^2\left(x_1,...,x_n\right), \tag{5}$$

где $\bar{K}^N$ – замыкание конуса K^N, $\rho_k \geqslant 0$,

$$\lambda_k = \lambda_k(x) = \lambda_k\left(x_1, ..., x_n\right) = m_{1k}x_1 + ... + m_{nk}x_n \qquad (k = 1, ..., s).$$

В пространстве E^N область $V^N(f)$ есть множество решений некоторой системы однородных неравенств с неизвестными a_{ij} :

$$\Psi_k\left(a_{ij}\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} P_{ij}^{(k)} a_{ij} \geqslant 0 \quad (k = 1, ..., \sigma). \tag{6}$$

Тогда по алгоритму Вороного [5] совершенные формы f_k, смежные с совершенной формой f, строятся следующим образом:

$$f_k(x) = f(x) + r_k \Psi_k(x) \qquad (k = 1, ..., \sigma), \tag{7}$$

где

$$r_k = \min_{\{x \in Z^n/\{0\}: \Psi_k(x) < 0\}} \left\{ \frac{f(x) - m}{[-\Psi_k(x)]} \right\}, \tag{8}$$

$$\Psi_k(x) = \Psi_k\left(x_1, ..., x_n\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} P_{ij}^{(k)} x_i x_j. \tag{9}$$

Выделив из совокупности $\{f, f_1, ..., f_\sigma\}$ неэквивалентные относительно группы $G(n;\, Z)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных $x_1,\ldots,x_n$), получаем окрестность Вороного $\{f, f_1, ..., f_\tau\}$ (см. [5, 6, 13, 14]) совершенной формы f относительно группы $G(n;\, Z)$ (группа целочисленных унимодулярных подстановок переменных $x_1,\ldots,x_n$), или просто окрестность Вороного, которую обозначают $VN(f;\, G(n;\, Z))$ или $VN(f)$.

Основные трудности в реализации алгоритма Вороного следующие: отыскание уравнений всех $(N\text{–}1)$ -мерных граней области $V^N(f)$; выделение среди всех $(N\text{–}1)$ -мерных граней неэквивалентных относительно группы $G(f)$ целочисленных автоморфизмов совершенной формы f; нахождение числа r_lи вычисление $VN(f)$.

3 Алгоритм установления эквивалентности положительных квадратичных форм

Прямоугольная $(s{\times}n)$ матрица всех представлений минимума положительных квадратичных форм f называется минимальной матрицей формы f и обозначается через $M{=}M(f)$, а миноры n – го порядка этой матрицы называются минимальными определителями формы f (см. [2, 5]). Понятия «минимальная матрица», «минимальный определитель» введены в [2, 5] под другими названиями: соответственно «характеристическая матрица», «характеристический определитель». Минимальный определитель, абсолютная величина которого равна 1, называется базисным определителем формы f, а соответствующая матрица называется базисной подматрицей минимальной матрицы или просто базисной матрицей. В решетке, отвечающей положительных квадратичных форм f, базисной подматрице соответствует основной репер минимальных векторов этой решетки. По минимальной матрице $M(f)$ положительных квадратичных форм f вида (1) вычисляем матрицу $\Gamma{=}MAM$, т.е. симметричную $(s{\times}s)$ матрицу, составленную из скалярных произведений $(m_k, m_k^{'})$ представлений минимума m в метрике формы f. При этом каждой базисной подматрице матрицы M будет отвечать подматрица Υ матрицы Γ, являющаяся матрицей Грама, соответствующей этой базисной матрице основного репера минимальных векторов.

Лемма 3. Пусть f_i, где i =1, 2 - две такие п.к.ф. от n переменных с матрицами коэффициентов A_i, что матрица $M_i = M(f_i)$ для каждого i = 1, 2 имеет базисную подматрицу. Тогда для того, чтобы положительных квадратичных форм f_1 и f_2 были целочисленно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы в матрицах $M_iA_iM_i^T = \Gamma_i$ нашлись одинаковые подматрицы Υ_i, отвечающие базисным подматрицам минимальных матриц M_i ,соответственно.

Лемма 3 содержит в себе алгоритм для отыскания целочисленной унимодулярной подстановки U, переводящей п.к.ф. f_1 в п.к.ф. f_2, то есть
$f_1(y\mathrm{U})$=$f_2(y)$. Основой этого алгоритма является отыскание в матрице
$\Gamma_1 = M_1A_1M_1^T$ подматрицы Υ_2, отвечающей какому нибудь базисному определителю матрицы M_2=$M(f_2)$ поэлементно методом перебора.

4 Алгоритм для отыскания граней области Вороного совершенной формы $\varphi_1^n\,(x_1, \dots , x_n)$

В [5] доказывается, что квадратичные формы (9), соответствующие $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$-мерным граням $\Psi_k = \Psi_k\,(\varphi_1^n)$ области $V^{\frac{n(n+1)}{2}}\,(\varphi_1^n)$ совершенной формы

$$\varphi_1^n = \varphi_1^n\,(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n \tag{10}$$

имеют вид:

$$-x_1x_3, \tag{11}$$

$$x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - ... - \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n. \tag{12}$$

Следовательно, чтобы найти совершенные формы, смежные с φ_1^n, необходимо выделить среди форм

$$\delta_{34}x_3x_4 + ... + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n \tag{13}$$

неэквивалентные относительно группы $G\,(\varphi_1^n)$ целочисленных автоморфизмов формы φ_1^n, где $\delta_{ij} = 0$ или 1 ($3 \leqslant i < j \leqslant n$). Число форм (12) достаточно большое, и равно

$$2^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}. \tag{14}$$

А затем с помощью формулы (7) строятся совершенные формы, смежные с совершенной формой φ_1^n.

В связи с этим предлагается следующий алгоритм. Обозначим через q число членов формы (13) так, что $q \leqslant \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Каждой переменной x_i
(i=3,. . . ,n) ставим в соответствие натуральное число l_i, равное фактическому количеству переменной x_i в сумме $\delta_{34}x_3x_4+...+\delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$, то есть сколько раз переменная x_i фактически участвует в сумме.

Будем говорить, что два натуральных числа l_i, l_j соединены (этот факт будем обозначать через l_i l_j), если в сумме (13) есть произведение x_ix_j. Тогда форму (13) можно интерпретировать как представление числа $2q$ в виде суммы чисел l_i при условии, что каждое число данного представления имеет возможность для соединения с другими оставшимися числами. Такое ограничение представления числа $2q$ следует из самой природы формы $\delta_{34}x_3x_4 + ... + \delta_{n-1n}x_{n-1}x_n$. Число натуральных чисел, участвующих в сумме представления числа $2q$, не меньше 2 и не больше n – 2.

5 Основной результат

Теорема 1. Число 20-мерных граней области Вороного $\mathrm{V}^{21}(\varphi_1^6)$

совершенной формы φ_1^6, неэквивалентных относительно группы S_4перестановок переменных x_3, ..., x_6, равно 12.

Доказательство. В самом деле, по алгоритму имеем 1$\leqslant$ q $\leqslant$ 6.

I.Если q = 1, то 2 представляется в виде: 1100 $\to$ 0000 и получаем форму x_3x_4. Число возможных перестановок 1100 равно 6 $\left(\frac{4!}{2!2!}=6\right)$, т.е. 1100, 1010, 1001,0110, 0101, 0011. Все они эквивалентны между собой, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5, x_6. Поэтому оставляем только одну 1100(x_3x_4).

II. Если q=2, то 4 представляется в виде 2110 $\to$ 0000, и получаем форму $x_3(x_4$ + $x_5)$. Число всевозможных перестановок 2110 равно 12 $\left(\frac{4!}{1!2!1!}=12\right)$, т.е.

$$2110, 2101, 2011, 1210, 1201, 1021, 1120, 1102, 1012, 0112, 0211, 0121. \tag{15}$$

Остальные представления числа 4 (см.(15)) эквивалентны 2110, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных
x_3, x_4,x_5, x_6. Здесь всего форм 12, и все они эквивалентны между собой. Пусть q = 2, тогда 4 представляется также в виде: 1) 1111$\to$0000 (x_3x_4 + x_5x_6); 2) 1111$\to$0000 (x_3x_5 + x_4x_6); 3) 1111$\to$0000 (x_3x_6 + x_4x_5) – это всевозможные соединения. Их всего три. Они эквивалентны между собой, так как 1111 имеет группу перестановок переменных x_4, x_5,x_6. Таким образом, при q=2 из 15 возможных случаев неэквивалентными оказываются только два: $x_3(x_4$+$x_5)$, x_3x_4 + x_5x_6.

III. Пусть q=3, тогда 6 представляется в виде: 1) 3111$\to$0000, и получаем форму $x_3(x_4$ + x_5 + $x_6)$. Число всевозможных перестановок 3111 равно 4 $\left(\frac{4!}{1!3!}=4\right)$, т.е. 3111, 1311, 1131, 1113. Остальные представления числа 6 эквивалентны 3111, так как форма φ_1^6 имеет автоморфизмы, состоящие из перестановок переменных x_3, x_4, x_5,x_6. Всего их 4, и все они эквивалентны между собой. Поэтому остается 1: 3111($x_3\,(x_4+x_5+x_6)$).Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

2) 2220 $\to$ 0110 $\to$ 0000, и получаем форму $x_3(x_4$ + $x_5)$ + x_4x_5. Число всевозможных перестановок равно 4$\left(\frac{4!}{1!3!}=4\right)$, т.е. 2220, 2202, 2022, 0222. Другие (2202, 2022, 0222) представления числа 6 эквивалентны 2220. Всего форм 4, и все они эквивалентны между собой.

3) 2211$\to$0101$\to$0000, и получаем форму $x_3(x_4$ + $x_5)$ + x_4x_6. Число всевозможных перестановок равно 6 $\left(\frac{4!}{2!2!}=6\right)$. Остальные представления числа 6 (2121, 2112, 1221, 1212, 1122) эквивалентны 2211. Получается 6 форм, и они эквивалентны между собой. У 2211 есть еще одно соединение 2211$\to$0110$\to$0000: $x_3(x_4$ + $x_6)$ + x_4x_5, оно эквивалентно 2211 (так как 2211 имеет $x_5$$\to$$x_6$, $x_6$$\to$$x_5$в качестве автоморфизма). И здесь получается 6 форм, эквивалентных между собой. Таким образом, при q=3 из 20 возможных случаев неэквивалентными представлениями оказались только 3: 3111, 2220, 2211.

IV. Пусть q=4, тогда 8 представляется в виде: 1) 3221$\to$0110$\to$ 0000;
$x_3(x_4$+x_5+$x_6)$+ x_4x_5. Число всевозможных перестановок равно 12$\left(\frac{4!}{1!2!1!}=12\right)$. Остальные представления числа 8 (их 11) эквивалентны 3221.Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

2) 2222$\to$0112$\to$0000; $x_3(x_4$ + $x_5)$ + $x_6(x_4$+ $x_5)$. У 2222 есть еще другие соединения, но все они эквивалентны 2222, так как 2222 имеет группу перестановок переменных x_4, x_5, x_6; 2222$\to$0112$\to$0000; 2222$\to$0121$\to$0000; 2222$\to$0211$\to$0000. При q=4 из 15 возможных случаев неэквивалентными оказались только 2 представления: 3221, 2222.

V. Пусть q=5, тогда 10 представляется в виде: 3322$\to$0211$\to$0000;

$x_3(x_4 + x_5 + x_6) + x_4(x_5 + x_6)$. Число всевозможных перестановок равно 6 $\left(\frac{4!}{2!2!} = 6\right)$. Остальные представления числа 10 (их 5) эквивалентны 3322.
Поэтому, при q=5 из 6 представлений остается только 1: 3322.

VI. Если q=6, то 12 представляется в виде: 3333→0222→0011→0000; $x_3(x_4+x_5+x_6)+x_4(x_5+x_6)+ +x_5x_6$.

VII. В случае, когда δ_{34}, δ_{35},δ_{36}, δ_{45}, δ_{46}, δ_{56} все одновременно равны нулю, имеем одну форму x_1x_2.

В силу (14) число всевозможных форм

$$x_1x_2 - \delta_{34}x_3x_4 - \delta_{35}x_3x_5 - \delta_{36}x_3x_6 - \delta_{45}x_4x_5 - \delta_{46}x_4x_6 - \delta_{56}x_5x_6 \tag{16}$$

равно 2^6=64. С одной стороны, наши приведенные выше рассуждения показывают, что число всевозможных представлений числа $2q$ для $1\leqslant q\leqslant 6$ с учетом соответствующих перестановок чисел и их различных всевозможных соединений также равно 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 + 1 = 64. Число всевозможных форм вида (16) и число всевозможных представлений числа $2q$ в виду суммы чисел l_i (при условии, что каждое натуральное число l_iимеет возможность для соединения с другими числами этого представления) совпадают. С другой стороны, как видно из вышеприведенных рассуждений, с помощью алгоритма, приведенного в пункта 2, число 64 значительно сокращается: форм вида (16), неэквивалентных относительно перестановок переменных $x_3, \ldots, x_6$, будет только 11 (1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1).

Таким образом, в случае n=6 число различных неэквивалентных форм вида (15) и (16) равно 12:

1) x_1x_2,
2) $x_1x_2 - x_3x_4$,
3) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6)$,
4) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_4x_5$,
5) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_4x_6$,
6) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4x_5$,
7) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5)$
8) $x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6$,
9) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5) - x_6(x_4 + x_5)$,
10) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4(x_5 + x_6)$,
11) $x_1x_2 - x_3(x_4 + x_5 + x_6) - x_4(x_5 + x_6) - x_5x_6$,
12) $- x_1x_3$.

Каждая из этих форм, в силу теории Вороного [5], определяет 20-мерную грань области Вороного $V^{21}(\varphi_1^6)$ совершенной формы φ_1^6.
Теорема 1 доказана.

6 Заключение

В работе речь идет о классической проблеме Вороного отыскания совершенных форм, тесно связанной с известной проблемой Эрмита арифметических минимумов положительных квадратичных форм.

В работе предложен алгоритм для вычисления неэквивалентные соответствующий квадратичные формы граням области Вороного второй совершенный формы от много переменных и с помощью этого алгоритма вычислены все соответствующий неэквивалентные квадратичные формы.

Литература

[1] *Делоне Б.Н.* Геометрия положительных квадратичных форм: Успехи. матем. Наук. 1937. 3. С.16-62; – 1938. 4. – С. 102–164.

[2] *Рышков С.С., Барановский Е.П.* Классические методы теории решетчатых упаковок Успехи матем. Наук. – 1979. 34. – № 4. – С. 3–63.

[3] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул.: Москва: Наука, – 1974. – 808 с.

[4] *Шадиметов Х.М.* Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурная формулы в пространствах Соболева.: Ташкент: фан ва технология, – 2019. – 224 с.

[5] *Г.Ф. Вороной* О некоторых свойствах положительных квадратичных форм.: Соб. соч., Т.2, Киев-1952, Изд-во АН УССР, – С. 171–238.

[6] *Korkine A., Zolotareff G.* Sur les formes quadratiques Math. Ann. 1873. – С. 366–389. Полное собр. соч. Е.И.Золотарева. Вып.1 Изд-во АН СССР. – 1931.

[7] *Korkine A., Zolotareff G.* Sur les formes quadratiques positives Math.Ann. 1877. Bd. 11. 242-292. Полное собр. соч. Е.И.Золотарева. Вып.1. Изд-во АН СССР. – С. 375–434.

[8] *Minkowski H.* Diskontinui tetsbereich fur Arithmetische Aquivalenz J.reine and angev. Math. 129. – 1905. – P. 220–284.

[9] *Rogers C.A.* Packing and covering. Cambridge. 1964. Русск. пер.: Роджерс К. Укладки и покрытия. Москва. – 1968. – 134 с.

[10] *Рышков С.С.* Основные экстремальные задачи геометрии положительных квадратичных форм.: Докторская диссертация. – М. – 1970. – 171 с.

[11] *E.S. Barnes* The complete enumeration of perfect snare forms.: Phil. Trans. Rog. Soc. London, A-249, – 1957. – P. 461–506.

[12] *Владимиров В.С.* О совершенных формах с шестью переменными. Матем. Сборник, Т.44(86), – № 2. – 1958. – С. 265–272.

[13] *Гуломов О.Х., Шодиев С.Ю.* Вычисление совершенных форм от четырех переменных с помощью усовершенствованного алгоритма Вороного.: Чебышевский сборник, – №2-2(42), – 2014. – С. 59–63. Math-Net.Ru

[14] *Gulomov, O.Kh., Khudayarov, B.A., Ruzmetov, K.Sh., Turaev, F.Zh.* Quadratic forms related to the voronoi's domain faces of the second perfect form in seven variables: Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithmsthis, 28(1), – 2021. – С. 15–23.

Поступила в редакцию 01.05.2023

UDC 511.513.82

ON ONE ALGORITHM FOR FINDING THE FACES OF THE VORONOI DOMAIN OF THE SECOND PERFECT FORM

Gulomov O.Kh.

otabek10@mail.ru

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
4 University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan;
"Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers"
National Research University,
39 Kori Niyoziy str., Tashkent, 100000, Uzbekistan.

The problem of classifying integer quadratic forms has a long history, during which many mathematicians have contributed to its solution. Binary forms were comprehensively studied by Gauss. He and later researchers also outlined the main ways to solve the problem of classifying ternary forms and forms of higher dimensions. The greatest achievements of the subsequent period were the deep development of the theory of rational quadratic forms and the complete classification of indefinite forms in dimensions 3 and higher by Eichler in terms of spinor genera.

The paper proposes an algorithm for calculating non-equivalent quadratic forms corresponding to the faces of the Voronoi domain of the second perfect form in many variables, and using this algorithm, all corresponding non-equivalent quadratic forms are calculated.

Keywords: Quadratic forms, perfect forms, Voronoi domain, Voronoi neighborhood, improved Voronoi algorithm.

Citation: Gulomov O.Kh. 2023. On one algorithm for finding the faces of the Voronoi domain of the second perfect form. *Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2/1(48): 70-78.